

УДК 534.2

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ТВЕРДЫХ ЧАСТИЦ В АКУСТИЧЕСКОМ ПОЛЕ РЕЗОНАНСНОЙ ТРУБЫ ПРИ РАЗЛИЧНЫХ РЕЖИМАХ ВОЗБУЖДЕНИЯ КОЛЕБАНИЙ*

А.Л. ТУКМАКОВ

Институт механики и машиностроения РАН КНЦ, Казань

На основе численного решения системы уравнений движения вязкого сжимаемого теплопроводного газа исследуется процесс дрейфа твердых сферических частиц в закрытой трубе. Движение частиц возникает под действием колебаний газового столба, которые возбуждаются плоским поршнем, перемещающимся по гармоническому закону. Приведены характерные для первого и второго линейного и первого нелинейного резонансов распределения частиц вдоль оси трубы, полученные в предположении о стоковом характере обтекания частицы газом. Показано, что средняя скорость дрейфа определяется асимметрией формы волны и возрастает вблизи резонансов, где колебания сопровождаются образованием ударных волн.

Известно, что находящиеся в акустическом поле частицы могут приобретать под его воздействием ненулевую среднюю скорость. Явление направленного дрейфа частиц, возникающее при колебаниях газа в закрытой трубе, было описано в работе [1]. Известно, что резонансные частоты, вблизи которых колебания газа в закрытой трубе могут сопровождаться образованием ударных волн, определяются соотношением $\omega_{mn} = n \cdot \pi \cdot a_0 / (m \cdot L)$ ($m, n = 1, 2, 3, \dots$), где a_0 — скорость звука в газе, L — длина трубы. Собственные частоты газового столба реализуются при $m = 1, n \geq 1$. Нелинейные резонансы возникают при $n = 1, m > 1$. В работе [1] экспериментально исследовали продольные колебания газа в трубе, возбуждаемые гармонически колеблющимся с частотой первого линейного резонанса поршнем. Было установлено, что твердые частицы, помещенные в такой резонатор, участвуют в направленном движении и через некоторое время покидают среднюю часть трубы, оказываясь вблизи ее закрытого конца и поршня. В настоящей работе процесс дрейфа частиц исследуется численно, что позволяет рассмотреть особенности его протекания при различных режимах возбуждения резонансной системы.

Для описания движения газа в трубе применялась система уравнений Навье — Стокса для сжимаемого теплопроводного газа [2–4], записанная в цилиндрической системе координат:

$$\mathbf{q}_t + \mathbf{F}_x + \mathbf{G}_y = \mathbf{H}; \quad (1)$$

* Работа выполнена в рамках Федеральной целевой программы “Интеграция” (проект Б0020) при финансовой поддержке РФФИ (грант № 04–01–00107) и фонда НИОКР Республики Татарстан (грант № 05–5.4–127).

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ E \end{bmatrix}, \quad \mathbf{F} = \begin{bmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p - \tau_{xx} \\ \rho uv - \tau_{xy} \\ (E + p - \tau_{xx})u - \tau_{xy}v + Q_x \end{bmatrix}, \quad \mathbf{G} = \begin{bmatrix} \rho v \\ \rho uv - \tau_{xy} \\ \rho v^2 + p - \tau_{yy} \\ (E + p - \tau_{yy})v - \tau_{xy}u + Q_y \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} -\rho v / y \\ \left(-\rho uv + \tau_{xy} \right) / y \\ \left(-\rho v^2 + \tau_{yy} \right) / y \\ \left(-v(E + p - \tau_{yy}) + k \frac{\partial T}{\partial y} + u \tau_{xy} \right) / y \end{bmatrix}, \quad p = (\gamma - 1)(E - 0,5\rho(u^2 + v^2)),$$

$$Q_x = -k \frac{\partial T}{\partial x}, \quad Q_y = -k \frac{\partial T}{\partial y}, \quad D = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{v}{y},$$

$$\tau_{xx} = \mu \left(2 \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{2}{3} D \right), \quad \tau_{yy} = \mu \left(2 \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{2}{3} D \right), \quad \tau_{xy} = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right).$$

Система (1) в области с изменяющимися границами решалась в обобщенных подвижных координатах [3, 5]: $\xi = \xi(x, y, t)$, $\eta = \eta(x, y, t)$, $\tau = t$. В новых переменных система (1) имеет вид

$$\mathbf{q}_t^* + \mathbf{F}_\xi^* + \mathbf{G}_\eta^* = \mathbf{H}^*, \quad (2)$$

$$\mathbf{q}^* = \frac{1}{J} \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ E \end{bmatrix}, \quad \mathbf{H}^* = \frac{1}{J} \begin{bmatrix} -\rho v / y \\ \left(-\rho uv + \tau_{xy} \right) / y \\ \left(-\rho v^2 + \tau_{yy} \right) / y \\ \left(-v(E + p - \tau_{yy}) + k \frac{\partial T}{\partial y} + u \tau_{xy} \right) / y \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{F}^* = \frac{1}{J} \begin{bmatrix} \xi_t \rho + \xi_x \rho u + \xi_y \rho v \\ \xi_t \rho u + \xi_x (\rho u^2 + p - \tau_{xx}) + \xi_y (\rho uv - \tau_{xy}) \\ \xi_t \rho v + \xi_x (\rho uv - \tau_{xy}) + \xi_y (\rho v^2 + p - \tau_{yy}) \\ \xi_t E + \xi_x ((E + p - \tau_{xx})u - \tau_{xy}v + Q_x) + \xi_y ((E + p - \tau_{yy})v - \tau_{xy}u + Q_y) \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{G}^* = \frac{1}{J} \begin{bmatrix} \eta_t \rho + \eta_x \rho u + \eta_y \rho v \\ \eta_t \rho u + \eta_x (\rho u^2 + p - \tau_{xx}) + \eta_y (\rho uv - \tau_{xy}) \\ \eta_t \rho v + \eta_x (\rho uv - \tau_{xy}) + \eta_y (\rho v^2 + p - \tau_{yy}) \\ \eta_t E + \eta_x ((E + p - \tau_{xx})u - \tau_{xy}v + Q_x) + \eta_y ((E + p - \tau_{yy})v - \tau_{xy}u + Q_y) \end{bmatrix},$$

$$J = \begin{vmatrix} \xi_x & \xi_y & \xi_t \\ \eta_x & \eta_y & \eta_t \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}; \quad \xi_t = -x_t \xi_x - y_t \xi_y; \quad \eta_t = -x_t \eta_x - y_t \eta_y.$$

Для решения системы (2) применялся явный метод Мак-Кормака второго порядка точности с расщеплением по времени и схемой коррекции потоков [3]. На однородной сетке схема Мак-Кормака содержит два шага, в результате выполнения которых осуществляется переход на следующий временной слой: шаг предиктор и шаг корректор

$$q_{j,k}^0 = q_{j,k}^n - \frac{\Delta t}{\Delta \xi} [F_{j+1,k}^n - F_{j,k}^n] - \frac{\Delta t}{\Delta \eta} [G_{j,k+1}^n - G_{j,k}^n] + \Delta t H_{j,k}^n,$$

$$q_{j,k}^{n+1} = 0,5(q_{j,k}^n + q_{j,k}^0) - 0,5 \frac{\Delta t}{\Delta \xi} [F_{j,k}^0 - F_{j-1,k}^0] - 0,5 \frac{\Delta t}{\Delta \eta} [G_{j,k}^0 - G_{j,k-1}^0] + 0,5 \Delta t H_{j,k}^0.$$

Каждая пространственная группа **F** и **G** на шагах предиктор и корректор аппроксимируется односторонними конечно-разностными операторами. Так, например, на шаге предиктор производные по ξ , входящие в $F_{j+1,k}^n$, $F_{j,k}^n$, аппроксимируются левыми разностными схемами первого порядка точности, а на шаге корректор — правыми, производные по η — центральными разностными схемами второго порядка точности. Производные по η , входящие в $G_{j,k+1}^n$, $G_{j,k}^n$, аппроксимируются левыми разностными схемами первого порядка, по ξ — центральными. Производные по ξ , η , входящие в **H** на шагах предиктор и корректор, выражаются центральными разностными схемами второго порядка. При расчетах на неравномерной сетке со сгущением вблизи боковой поверхности вводилась схема расщепления по времени [3]. На конечно-разностной сетке в физической области (x, y) , фрагмент которой показан на рис. 1, шаг по оси x равномерен. Вдоль оси y задавалось N_k узлов. N_1 первых узлов образовывали ячейки с фиксированным шагом Δy ($0 \leq y \leq r \cdot d/2$), где d — диаметр трубы. Узлы, начиная с N_1 до N_k ($r \cdot d/2 < y \leq d/2$) образовывали ячейки с более мелким шагом Δy_1 . Параметр r задавал границу области с измельченным шагом. Область (ξ, η) представляла собой единичный квадрат с равномерным разбиением по осям ξ, η .

Схема расщепления для рассматриваемой области задавалась симметричной последовательностью одномерных операторов. В области, ограниченной узлами с индексами $2 \leq j \leq N_j - 1$, $2 \leq k \leq N_1$, схема имела вид

$$q_{j,k}^{n+1} = P_\xi \left(\frac{\Delta t}{2} \right) P_\eta \left(\frac{\Delta t}{2} \right) P_\eta \left(\frac{\Delta t}{2} \right) P_\xi \left(\frac{\Delta t}{2} \right) q_{j,k}^n.$$

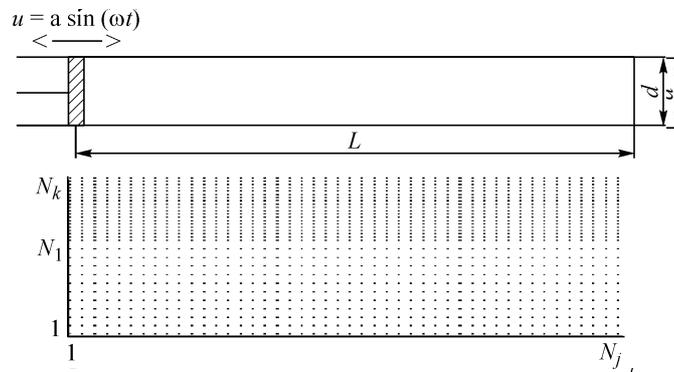


Рис. 1. Схема резонатора и фрагмент конечно-разностной сетки.

Каждый одномерный оператор включал в себя шаги предиктор и корректор. Так, например, действие оператора $P_\xi(\Delta t/2)$ на вектор-столбец $q_{j,k}^n$, в результате которого осуществлялся переход к промежуточному значению $\overline{q_{j,k}}$, состояло в выполнении двух шагов

$$q_{j,k}^0 = q_{j,k}^n - \frac{\Delta t}{\Delta \xi} \left[F_{j+1,k}^n - F_{j,k}^n \right] + \frac{\Delta t}{4} H_{j,k}^n;$$

$$\overline{q_{j,k}} = 0,5(q_{j,k}^n + q_{j,k}^0) - 0,5 \frac{\Delta t}{2\Delta \xi} \left[F_{j,k}^0 - F_{j-1,k}^0 \right] + 0,5 \frac{\Delta t}{4} H_{j,k}^0.$$

В области сгущения сеточных узлов $2 \leq j \leq N_j - 1$, $N_1 \leq k \leq N_k - 1$ в схему расщепления входило $2m$ одномерных операторов P_η :

$$q_{j,k}^{n+1} = P_\xi \left(\frac{\Delta t}{2} \right) P_\eta \left(\frac{\Delta t}{2m} \right) \dots P_\eta \left(\frac{\Delta t}{2m} \right) P_\xi \left(\frac{\Delta t}{2} \right) q_{j,k}^n,$$

где $m = \Delta y / \Delta y_1$. Симметричная структура оператора необходима для сохранения второго порядка точности численного метода [3].

Для подавления осцилляций на ударных волнах применялась схема коррекции потоков, разработанная Дж.П. Борисом и Д.Л. Буком и известная как звуковая схема коррекции потоков Лакса — Вендроффа [3].

В начальный момент времени во внутренних узлах расчетной области задавались температура, плотность и нулевая скорость газа. Поршень двигался по гармоническому закону $x(t) = a \sin(\omega t)$. Продольная составляющая скорости газа на поверхности поршня в начальный момент времени была равна $u = a\omega$. На твердых поверхностях, в том числе, на поверхности подвижного поршня для скорости задавались граничные условия прилипания, а для плотности, давления, энергии, температуры — однородные граничные условия второго рода вида $\partial f / \partial n = 0$, где n — направление внешней нормали к поверхности. Таким образом, рассматривалась теплоизолированная система. На оси трубы задавались граничные условия симметрии. Ниже представлена конечно-разностная реализация граничных условий:

- на оси трубы ($k = 1, 2 \leq j \leq N_j - 1$): $u(j, 1) = u(j, 2)$, $v(j, 1) = -v(j, 2)$, $p(j, 1) = p(j, 2)$, $E(j, 1) = E(j, 2)$, $T(j, 1) = T(j, 2)$, $\rho(j, 1) = \rho(j, 2)$,
- на боковой поверхности ($k = N_k, 2 \leq j \leq N_j - 1$): $u(j, N_k) = 0$, $v(j, N_k) = 0$, $p(j, N_k) = p(j, N_k - 1)$, $E(j, N_k) = E(j, N_k - 1)$, $T(j, N_k) = T(j, N_k - 1)$, $\rho(j, N_k) = \rho(j, N_k - 1)$,
- на закрытом конце трубы ($j = N_j, 2 \leq k \leq N_k - 1$): $u(N_j, k) = 0$, $v(N_j, k) = 0$, $p(N_j, k) = p(N_j - 1, k)$, $E(N_j, k) = E(N_j - 1, k)$, $T(N_j, k) = T(N_j - 1, k)$, $\rho(N_j, k) = \rho(N_j - 1, k)$,
- на поверхности поршня ($j = 1, 2 \leq k \leq N_k - 1$): $u(1, k) = a\omega \cos(\omega t)$, $v(1, k) = 0$, $p(1, k) = p(2, k)$, $E(1, k) = E(2, k)$, $T(1, k) = T(2, k)$, $\rho(1, k) = \rho(2, k)$.

Динамика частицы в волновом поле описывалась на основе модели, построенной в предположении о стоксовом характере обтекания [5]:

$$\frac{4}{3} \pi R^3 \rho_s \frac{\partial \mathbf{w}_s}{\partial t} = \frac{1}{2} C_d \pi R^2 \rho |\mathbf{w}_s - \mathbf{w}| (\mathbf{w}_s - \mathbf{w}), \quad (3)$$

или

$$\frac{\partial \mathbf{w}_s}{\partial t} = \frac{9}{2} f_d \frac{\mu}{R^2 \rho_s} (\mathbf{w}_s - \mathbf{w}), \quad f_d = \frac{C_d}{24} \text{Re}, \quad \text{Re} = \frac{\rho |\mathbf{w} - \mathbf{w}_s| 2R}{\mu},$$

где \mathbf{w}_s, \mathbf{w} — векторы скорости частицы и газа, включающие в себя осевую и радиальную составляющие; μ — динамическая вязкость газа; R, ρ_s — радиус и плотность сферической частицы. В начальный момент времени задавались координаты покоящихся частиц.

Решение уравнения (3) определялось численно с использованием явной схемы с перешагиванием третьего порядка аппроксимации по времени [6]:

$$\Delta \mathbf{w}_s^n = 2\Delta t \frac{\partial \mathbf{w}_s^n}{\partial t} - \Delta \mathbf{w}_s^{n-1},$$

где $\Delta \mathbf{w}_s^n = \mathbf{w}_s^{n+1} - \mathbf{w}_s^n$, Δt — временной шаг.

В результате система уравнений движения частицы примет вид

$$\begin{aligned} u_s^{n+1} &= 9f_d \mu \Delta t (u_s^n - u^n) / (R^2 \rho_s) + u_s^{n-1}, \\ v_s^{n+1} &= 9f_d \mu \Delta t (v_s^n - v^n) / (R^2 \rho_s) + v_s^{n-1}. \end{aligned} \quad (4)$$

Координаты частицы определялись по той же схеме, что и скорости:

$$\begin{aligned} x_s^{n+1} &= 2\Delta t u_s^{n+1} + x_s^{n-1}, \\ y_s^{n+1} &= 2\Delta t v_s^{n+1} + y_s^{n-1}. \end{aligned} \quad (5)$$

РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТОВ

Ниже приводятся результаты моделирования дрейфа частиц, полученные при возбуждении колебаний газового столба в трубе длиной $L = 1$ м, диаметром $d = 0,048$ м. Расчеты проводились при начальной температуре невозмущенного газа $T = 290$ К и начальной плотности $\rho = 1,2$ кг/м³ на расчетной сетке с параметрами: $N_j = 80$, $N_k = 25$, $N_l = 10$, $r = 0,8$. Моделировалась динамика сферической частицы с диаметром $d = 0,001$ м и плотностью $\rho_s = 1000$ кг/м³ в зависимости от частоты колебаний поршня и начального расположения частицы в трубе.

Амплитуда поршня при возбуждении колебаний газового столба на частоте первого линейного резонанса $\omega = \omega_{11}$ составляла 0,015 м. Колебания быстро приобретали разрывной характер — формировались нелинейные волны с крутым передним и пологим задним фронтами (рис. 2, *a*). В начальный момент времени в узлах равномерной сетки, покрывающей расчетную область, размещались частицы, которые начинали перемещаться под действием акустического возбуждения. На рис. 2, *b-d* приведены временные зависимости скоростей и координат двух частиц, в начальный момент времени симметрично расположенных по обе стороны от середины трубы. При $t = 0$ частицы располагались вблизи поршня и вблизи закрытого конца трубы в точках с координатами $x = L/4$, $y = d/4$ и $x = 3L/4$, $y = d/4$. Колебания осевой и радиальной составляющих скорости происходили с частотой возбуждения. При этом величина осевой составляющей скорости на два порядка превышала величину радиальной составляющей (рис. 2, *b, c*). Наибольшая скорость роста среднего значения осевой составляющей скорости наблюдалась на начальной стадии колебаний, когда частота возбуждения точно соответствовала первому линейному резонансу, вследствие чего возбуждались ударные волны (рис. 2, *a, b*). С течением времени в системе из-за влияния диссипативных потерь возрастала температура, менялась скорость звука и нарушалось условие генерации

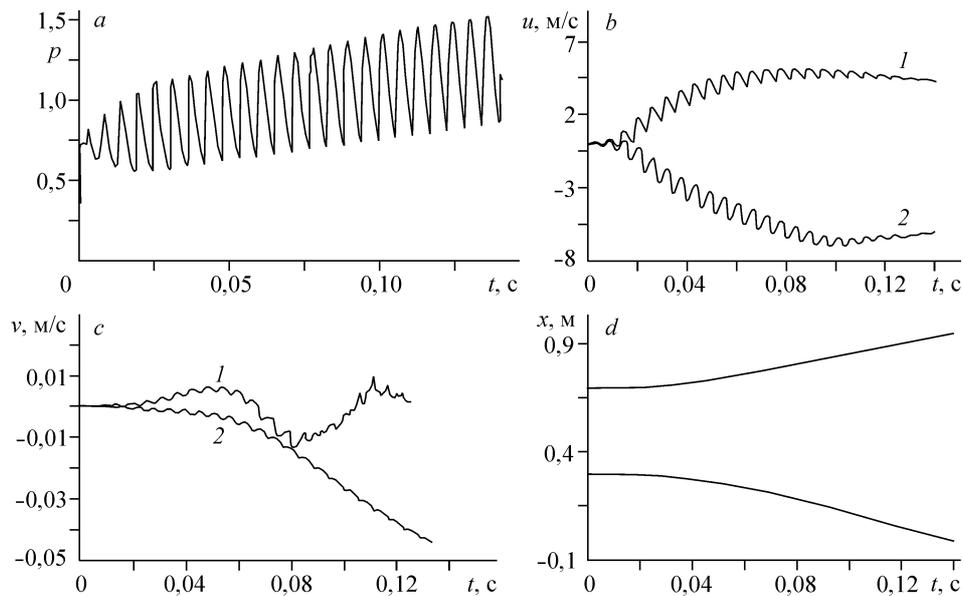


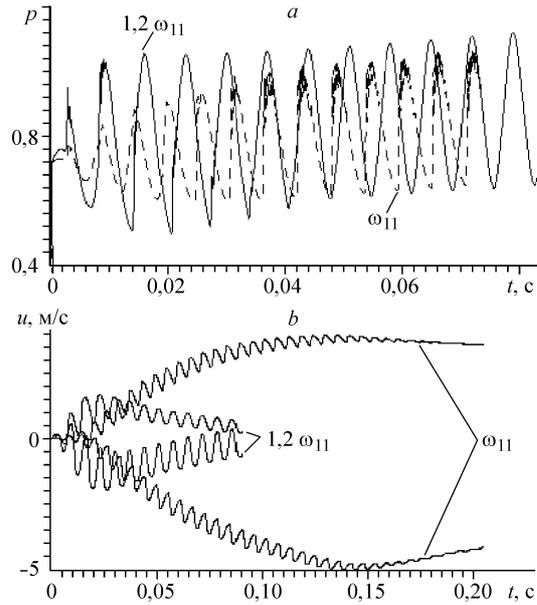
Рис. 2. Зависимости давления от времени у закрытого конца трубы (а) и составляющих скорости и продольного перемещения частиц, находившихся в начальный момент времени в точках с координатами $x = 3L/4, y = d/4$ (1) и $x = L/4, y = d/4$ (2), от времени (b, c, d); $\omega = \omega_{11}$.

первого линейного резонанса при фиксированной частоте возбуждения. Вследствие этого передний фронт волны становился более пологим (см. рис. 2, а), а амплитуда и среднее значение осевой составляющей скорости частиц уменьшались (см. рис. 2, b). На рис. 3, а, b сопоставляются зависимости давления газа и дрейфовой скорости частицы от времени при возбуждении на резонансной частоте $\omega = \omega_{11}$ и на частоте $\omega = 1,2\omega_{11}$. В первом случае амплитуда колебаний поршня составляла $a = 0,015$ м, во втором была в два раза выше — $a = 0,03$ м. В результате, при возбуждении колебаний на нерезонансной частоте амплитуда волны давления была больше, чем в резонансном режиме (рис. 3, а), но форма колебаний была близка к гармонической с незначительной асимметрией переднего и заднего волновых фронтов. Поэтому дрейфовая скорость частиц при большей амплитуде колебаний поршня оказывалась существенно меньшей (рис. 3, b), чем при разрывных колебаниях, возникающих в резонансном режиме с меньшей интенсивностью возбуждения.

На частоте первого линейного резонанса было выявлено две области притяжения частиц — с течением времени частицы дрейфовали по направлению к закрытому концу трубы и к поршню (см. рис. 2, b, d). Кривые осевой скорости и перемещения частиц, расположенных в начальный момент времени симметрично относительно середины трубы, также были симметричны. На рис. 4, а точками показано начальное равномерное расположение частиц в трубе при $t = 0$. К моменту времени $t = 0,1$ с в центральной области трубы число частиц уменьшается за счет их смещения к закрытому концу и к поршню (рис. 4, b). Таким образом, при возбуждении колебаний в закрытой трубе на частоте первого линейного резонанса в центральной области трубы концентрация частиц уменьшается, а вблизи закрытого конца и поршня — возрастает [1].

Рис. 3. Влияние асимметрии фронтов на величину дрейфовой скорости частиц.

a — зависимости давления у закрытого конца трубы при возбуждении с частотами ω_{11} и $1,2\omega_{11}$ от времени; *b* — соответствующие этим режимам скорости частиц, расположенных в начальный момент времени в точках с координатами $x = L/4, y = d/4$ и $x = 3L/4, y = d/4$.



Амплитуда колебаний поршня на частоте второго линейного резонанса $\omega = \omega_{21}$ также составляла 0,015 м. Вблизи резонанса наблюдались нелинейные колебания с крутым передним и пологим задним фронтом, под действием которых частицы начинали перемещаться (рис. 5, *a-d*). Скорость частиц изменялась с частотой

внешнего возбуждения и имела ненулевое среднее значение (рис. 5, *b, c*). В отличие от предыдущего случая, концентрация частиц с течением времени увеличивалась не только вблизи поршня и закрытого конца трубы, но и в ее средней области (рис. 6). Таким образом, при возбуждении колебаний в закрытой трубе на частоте

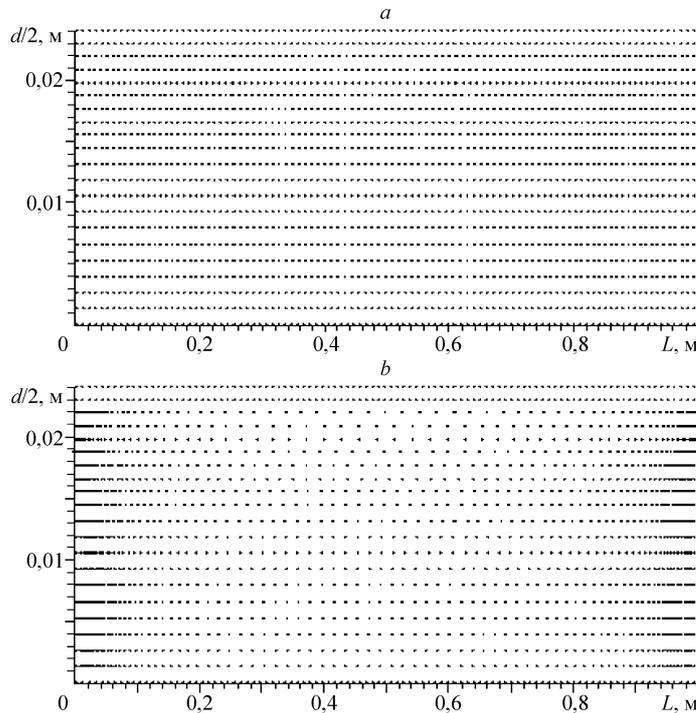


Рис. 4. Характерное для первого линейного резонанса расположение частиц в трубе в различные моменты времени.

$t = 0$ (*a*), $0,1$ с (*b*).

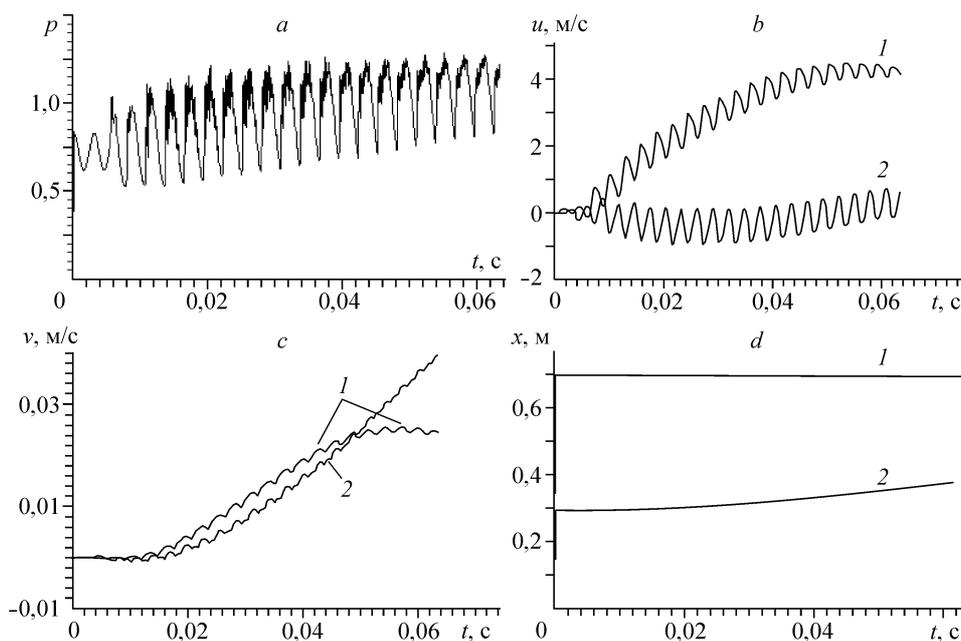


Рис. 5. Зависимости давления от времени у закрытого конца трубы (а) и составляющих скорости и продольного перемещения частиц, находившихся в начальный момент времени в точках с координатами $x = 3L/4$, $y = d/4$ (1) и $x = L/4$, $y = d/4$ (2), от времени (b, c, d); $\omega = \omega_{21}$.

второго линейного резонанса частицы с течением времени смещаются по направлению к середине трубы, к ее закрытому концу и к поршню, создавая там области повышенной концентрации.

Возбуждение резонатора на частоте первого нелинейного резонанса $\omega = \omega_{12}$ осуществлялось при амплитуде колебаний поршня 0,05 м. В этом случае на один период колебаний поршня приходилось два периода колебаний газового столба (рис. 7, а). Вблизи поршня концентрация частиц уменьшалась, равномерно возрастая к закрытому концу трубы (рис. 7, b). При возбуждении колебаний газа в закрытой трубе на частоте первого нелинейного резонанса твердые частицы с течением времени смещаются по направлению к закрытому концу трубы, создавая там область повышенной концентрации.

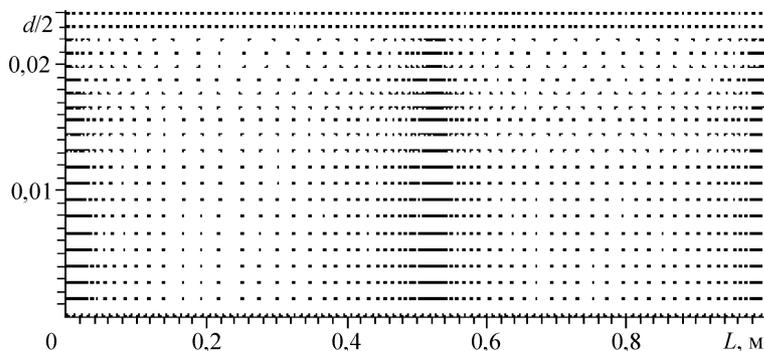


Рис. 6. Характерное для второго линейного резонанса расположение частиц в трубе в различные моменты времени, $t = 0,07$ с.

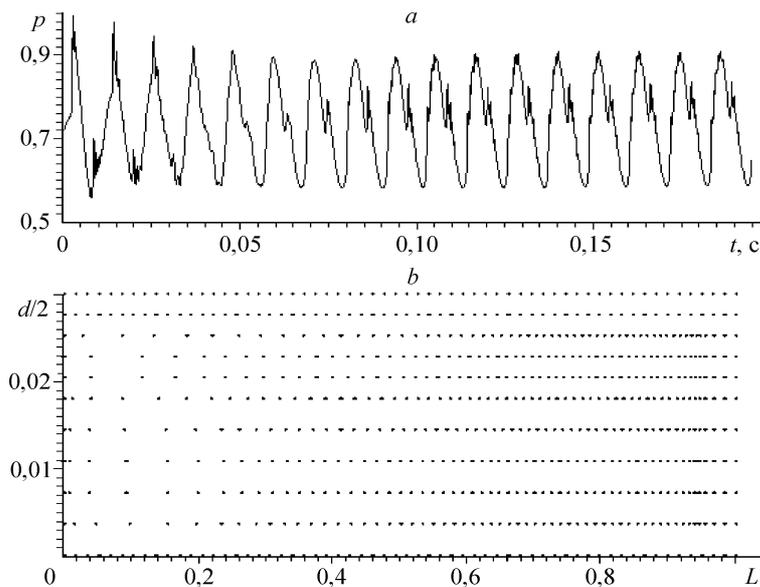


Рис. 7. Зависимость давления у закрытого конца трубы от времени (а) и характерное для первого нелинейного резонанса расположение частиц в трубе (b) в момент времени $t = 0,23$ с.

Проведенный численный эксперимент показал, что скорость направленного дрейфа частиц определяется асимметрией фронтов акустической волны и возрастает в окрестности резонансных частот возбуждения, где формируются нелинейные волны с крутым передним фронтом. Характер пространственного распределения частиц в волновом поле резонатора определяется типом резонанса — с течением времени частицы оказываются вблизи узлов стоячей волны поля скорости.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гуляев А.И., Кузнецов В.Н. Коагуляция аэрозолей под действием периодических ударных волн // Акуст. журн. — 1962. — Т. 8, вып. 4. — С. 219–220.
2. Steger J. L. Implicit finite-difference simulation of flow about arbitrary two-dimensional geometries // AIAA J. — 1978. — Vol. 16, No. 7. — P. 679–686.
3. Флетчер К. Вычислительные методы в динамике жидкостей. — М.: Мир, 1991. — 551 с.
4. Ковеня В.М., Гарнаевский Г.А., Черный С.Г. Применение метода расщепления в задачах аэродинамики. — Новосибирск: Наука. Сиб. отд-ние, 1990. — 247 с.
5. Стернин Л.Е. Двухфазные моно- и полидисперсные течения газа с частицами. — М.: Машиностроение, 1980. — 176 с.
6. Рихтмайер Р., Мортон К. Разностные методы решения краевых задач. — М.: Мир, 1972. — 418 с.

Статья поступила в редакцию 2 сентября 2004 г.