УДК 539.375

ОБОБЩЕННЫЙ ДОСТАТОЧНЫЙ КРИТЕРИЙ ПРОЧНОСТИ. ОПИСАНИЕ ЗОНЫ ПРЕДРАЗРУШЕНИЯ

В. М. Корнев

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, 630090 Новосибирск

Предложен обобщенный достаточный дискретно-интегральный критерий прочности для трещин нормального отрыва в средах со структурой, построенный для материалов двух типов: упругопластического с ограничением по деформативности и упругого идеально пластического. Получено подробное описание зоны предразрушения, в качестве поперечника которой выбран поперечник зоны пластичности около вершины исходной трещины. При этом критическое раскрытие исходной трещины связывается с деформативностью пластических материалов. Предложена классификация типов разрушения по отношению длины зоны предразрушения к длине исходной трещины: хрупкое, квазихрупкое, квазивязкое и вязкое. Для первых трех типов получено достаточно подробное описание кривых разрушения. Предложены точные и приближенные уравнения, связывающие критические параметры с теоретической прочностью зернистого материала, размером зерна и параметрами, характеризующими интервал осреднения, поврежденности исходного и пластически деформированного материалов.

Введение. Наиболее полное исследование зависимости критического коэффициента интенсивности напряжений (КИН) $K_{\mathrm{I}c}$ от стандартных механических характеристик материала с учетом структуры этого материала проведено в [1], изложение результатов этого исследования содержится в справочнике [2]. Необходимые сведения о критериях разрушения, учитывающих структурные параметры материала, имеются в [2, 3].

Следуя подходу Нейбера — Новожилова [4, 5], в работах [6, 7] для материалов со структурой отыскивается критическая нагрузка по необходимому критерию разрушения [5], при превышении которой перед вершиной трещины начинает формироваться зона предразрушения. При критической нагрузке по достаточному критерию разрушения для макротрещины [5] длина зоны предразрушения достигает критической величины и происходит разделение тела на части (см. [8–10]). Следует отметить, что длина зоны предразрушения (см. [8–10]) в модели Леонова — Панасюка — Дагдейла [11, 12] определяется через обычные механические характеристики.

1. Взаимосвязь критериев и физико-механических моделей зоны предразрушения. Рассматривается твердое тело, имеющее иерархию структур $i = 1, 2, \ldots, i_0$ (i_0 — общее число структур) [6, 7]. Пусть твердое тело с острой трещиной нагружено так, что реализуется первая мода разрушения для плоского напряженного состояния. Трещина отрыва моделируется двусторонним разрезом. Допустим, что наименьшее из критических напряжений $\sigma_\infty^{0(i)}$ по необходимому критерию имеет место для макроструктуры с номером $i = 1$, т. е.

$$\min \sigma_\infty^{0(i)} = \sigma_\infty^{0(1)}, \tag{1}$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (коды проектов 01-01-00873, 00-15-96180).

а критические напряжения $\sigma_\infty^{*(1)}$ по достаточному критерию для макроструктуры удовлетворяют неравенствам

$$\sigma_\infty^{*(1)} > \sigma_\infty^{0(1)}, \qquad \sigma_\infty^{*(1)} < \sigma_\infty^{0(i)}, \qquad i = 2, 3, \ldots, i_0. \tag{2}$$

Если первое неравенство в (2) очевидно (критические напряжения по достаточному критерию превосходят таковые по необходимому критерию для макроструктуры), то при выполнении последующих неравенств зоны предразрушения для мезо- и микроструктур ($i = 2, 3, \ldots, i_0$) не возникают. Допустим, кроме того, что при критических напряжениях $\sigma_\infty^{*(1)}$ перед вершиной трещины не возникают сателлитные трещины (см. [6, 7]). Таким образом, зона предразрушения формируется только для макроструктуры $i = 1$ (обозначим ее длину через Δ_1), перед этой зоной отсутствуют другие зоны предразрушения, порождающие сателлитные трещины.

Необходимый дискретно-интегральный критерий хрупкой прочности (зона предразрушения отсутствует: $\Delta_1 = 0$, $K_{\mathrm{I}\infty}^0 > 0$) имеет вид [6, 7]

$$x \geqslant 0: \quad \frac{1}{k_1 r_1} \int\limits_0^{n_1 r_1} \sigma_y(x,0)\,dx = \sigma_{m1}, \qquad x > 0: \quad \sigma_y(x,0) \simeq \sigma_\infty + \frac{K_{\mathrm{I}\infty}^0}{(2\pi x)^{1/2}}. \tag{3}$$

Достаточные дискретно-интегральные критерии квазихрупкой, квазивязкой или вязкой прочности, описывающие развитие зоны предразрушения, для макроструктуры имеют следующий вид:

— для формирующейся зоны предразрушения [8–10] (критическая длина зоны предразрушения $\Delta_1^* > 0, h_{m1} > 0, K_{\mathrm{I}} > 0$, упругопластический материал с ограничениями по деформативности)

$$\begin{gathered} x \geqslant 0: \quad \frac{1}{k_1 r_1} \int\limits_0^{n_1 r_1} \sigma_y(x,0)\,dx = \sigma_{m1}, \qquad x > 0: \quad \sigma_y(x,0) \simeq \sigma_\infty + \frac{K_{\mathrm{I}}}{(2\pi x)^{1/2}}, \\ x \leqslant 0: \quad 2v^* = ((æ+1)/G) K_{\mathrm{I}} \sqrt{\Delta_1^*/(2\pi)} = h_{m1}; \end{gathered} \tag{4}$$

— для зоны предразрушения, достигшей критической длины Δ_1^{**} (классический случай упругого идеально пластического материала (см., например, [13]), $K_{\mathrm{I}} = 0$):

$$\begin{gathered} x \geqslant 0: \quad \frac{1}{k_1 r_1} \int\limits_0^{n_1 r_1} \sigma_y(x,0)\,dx = \sigma_{m1}, \qquad \sigma_y(x,0) \simeq \sigma_{m1} + \frac{K_{\mathrm{I}}}{(2\pi x)^{1/2}}, \\ x \leqslant 0: \quad \delta_{m1} = \pi l_0 (\sigma_\infty/E)(\sigma_\infty/\sigma_{m1}); \end{gathered} \tag{5}$$

$$K_{\mathrm{I}} = K_{\mathrm{I}\infty} + K_{\mathrm{I}\Delta_1}, \quad K_{\mathrm{I}\infty} > 0, \quad K_{\mathrm{I}\Delta_1} < 0, \quad K_{\mathrm{I}\infty}^0 = K_{\mathrm{I}\infty}^0(l_0), \quad K_{\mathrm{I}\infty} = K_{\mathrm{I}\infty}(l). \tag{6}$$

В соотношениях (3)–(6) σ_y — нормальные напряжения на продолжении трещины (имеющие сингулярную составляющую для критериев (3), (4)); Oxy — прямоугольная система координат, начало которой совпадает с правой вершиной острой макротрещины; r_1 — характерный линейный размер макроструктуры материала, например размер зерна поликристаллического материала; n_1, k_1 — числа ($n_1 \geqslant k_1$, $k_1 \geqslant 1$ — число бездефектных зерен); $n_1 r_1$ — интервал осреднения для зернистого материала ($n_1 \geqslant 1$); $(n_1 - k_1)/n_1$ — коэффициент поврежденности зернистого материала на интервале $n_1 r_1$; σ_{m1} — "теоретическая" прочность зернистого материала (предел текучести); $h_{m1} = 2v^*(-\Delta_1)$ — критическое раскрытие трещины при $\Delta_1 = \Delta_1^*$; $2v(x)$ — раскрытие трещины; $æ = (3-\nu)/(1+\nu)$

для плоского напряженного состояния; ν — коэффициент Пуассона; E, G — модули Юнга и сдвига; δ_{m1} — критическое раскрытие трещины при $\Delta_1 = \Delta_1^{**}$; l_0 и $l = l_0 + \Delta_1 l = l_0 + \Delta_1$ — полудлины исходной и модельной внутренних трещин (в критерии (3) используется полудлина исходной трещины, в критериях (4), (5) — полудлина модельной трещины l); суммарный КИН $K_{\rm I} \geqslant 0$ вычисляется по соотношению (6) для соответствующей задачи; $K_{\rm I\infty}$ — КИН, порождаемый напряжениями σ_∞, заданными на бесконечности (для внутренней трещины $K_{\rm I\infty} = \sigma_\infty\sqrt{\pi l}$); $K_{{\rm I}\Delta_1}$ — КИН, порождаемый напряжениями $\eta_1\sigma_{m1}$ в соответствии с моделью Леонова — Панасюка — Дагдейла [11, 12] в окрестности вершины трещины в зоне предразрушения; параметр η_1, характеризующий поврежденность материала в зоне предразрушения (см., например, рис. 4.2.4 в [14] и рис. 35 в [15]), целесообразно связать с пластическим разрыхлением материала. Четыре основных типа разрушения показаны на рис. 1 в [16]. Далее индекс 1 опущен (за исключением параметра r_1, характеризующего линейный размер макроструктуры материала), так как зона предразрушения формируется только в макроструктуре (см. соотношения (1), (2)).

Замечание. При формулировке критериев (3), (4) используется соотношение $\sigma_y(x,0) \simeq \sigma_\infty + K^0_{\rm I\infty}(2\pi x)^{-1/2}, x > 0$. Эта функция совпадает с точным решением $\sigma_y(x,0) = \sigma_\infty(x+l_0)[x(x+2l_0)]^{-1/2}, x > 0$ для внутренней трещины при $x \to \infty$ и имеет ту же особенность при $x \to 0$.

Предлагаемые критерии (3)–(5) можно классифицировать по числу используемых в них параметров [3]: критерии (3), (5) — однопараметрические силовые критерии (параметр σ_m чаще всего связывается с пределом текучести), критерий (4) — двухпараметрический деформационно-силовой критерий (этими параметрами являются σ_m, h_m). Наряду с пределом текучести в (4) входит параметр h_m, характеризующий критическое раскрытие трещин и непосредственно связанный с деформативностью материала. Очевидно, что при предельном переходе от упругопластического материала с ограничениями по деформативности (критерий (4)) к упругому идеально пластическому (критерий (5)) часть полезной информации теряется. Поэтому объединение критериев (4), (5) в обобщенный достаточный критерий представляется целесообразным.

2. Типы разрушения. Критерий (3) описывает хрупкое (первый тип) разрушение, критерии (4), (5) — квазихрупкое (второй тип) разрушение и могут описывать квазивязкое (третий тип) и вязкое (четвертый тип) разрушения в зависимости от того, какой тип разрушения (см. [16]) реализуется. Второй, третий и четвертый типы разрушения не противоречат модели Леонова — Панасюка — Дагдейла [11, 12] или модификации этой модели. Опишем количественно четыре основных типа разрушения в зависимости от относительной длины зоны предразрушения Δ/l_0: 1) $\Delta \equiv 0$; 2) $\Delta/l_0 = o(1)$; 3) $\Delta/l_0 = O(1)$ или $l_0/\Delta = O(1)$; 4) $l_0/\Delta = o(1)$. Для хрупкого разрушения зона предразрушения отсутствует; для квазихрупкого разрушения длина зоны предразрушения существенно меньше длины исходной трещины: $\Delta \ll l_0$; для квазивязкого разрушения длина зоны предразрушения сравнима с длиной исходной трещины: $\Delta \approx l_0$; для вязкого разрушения длина исходной трещины существенно меньше длины зоны предразрушения: $l_0 \ll \Delta$.

Приведенная классификация соответствует модели Леонова — Панасюка — Дагдейла [11, 12], когда зоны пластичности около вершин внутренней трещины не смыкаются, а граница зоны пластичности для краевой трещины не выходит на поверхность тела. Принятые ограничения могут иметь принципиальное значение для квазивязкого и вязкого разрушений.

На рис. 1 приведены диаграммы σ–ε упругого идеально пластического и нелинейно-упругопластического материалов. Участок нелинейного деформирования ab показан штриховой линией (σ_m — предел текучести; ε_0, ε'_0 — предельные относительные удлинения упругого и нелинейно-упругого материалов соответственно; ε_m — предельное относи-

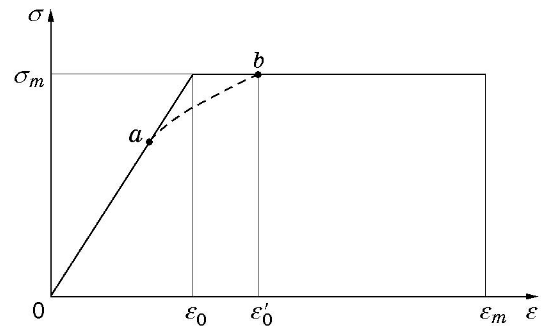

Рис. 1

тельное удлинение материала; для упругого идеально пластического материала принято $\varepsilon_m = \infty$). Для дальнейших рассуждений принципиальное значение имеют параметры $\varepsilon_m - \varepsilon_0$, $\varepsilon_m - \varepsilon_0'$, характеризующие максимальные относительные удлинения пластического материала и позволяющие получить критическое раскрытие трещины, если известен поперечник зоны предразрушения h. Предлагаемая модель материала не учитывает различия между диаграммами σ–ε упругого идеально пластического и нелинейно-упругопластического материалов.

Замечание. В случае нелинейно-упругопластического материала следует учитывать, что при нелинейно-упругом деформировании могут изменяться особенности полей напряжений в вершине трещины [17].

3. Критические раскрытия трещин. Определим критическое раскрытие трещин (КРТ) для материалов двух типов. Для упругопластического материала с ограничениями по деформативности критические параметры $\Delta = \Delta^*, \sigma_\infty = \sigma_\infty^*$, для упругого идеально пластического материала критические параметры $\Delta = \Delta^{**}$, $\sigma_\infty = \sigma_\infty^{**}$. Непосредственно сравнить предлагаемые критические параметры Δ^* или Δ^{**} с критическим параметром КРТ-критерия (см. [3, гл. 3]) нельзя из-за отсутствия линейного размера, характеризующего поперечное сечение зоны предразрушения. Получим оценку поперечника h зоны предразрушения в окрестности вершины трещины. В качестве поперечника h зоны предразрушения примем поперечник зоны пластичности около вершины исходной трещины длиной l_0. Следует отметить, что большие пластические деформации связаны с разрушением пластических металлов [15].

3.1. *Квазихрупкий тип разрушения* ($\Delta^* \ll l_0$, $\sigma_\infty^* \ll \sigma_m$ или $\Delta^{**} \ll l_0$, $\sigma_\infty^{**} \ll \sigma_m$). Допустим, что напряжения, заданные на бесконечности, существенно меньше предела текучести: $\sigma_\infty^* \ll \sigma_m$ или $\sigma_\infty^{**} \ll \sigma_m$. Тогда можно использовать поправку Ирвина на пластическую деформацию. Оценка размера пластической зоны та же, что и для плоского напряженного состояния (см., например, [13]):

$$\rho(\theta) = (K_{\mathrm{I}\infty}^0)^2((3/2)\sin^2\theta + 1 + \cos\theta)/(4\pi\sigma_m^2), \qquad K_{\mathrm{I}\infty}^0 = K_{\mathrm{I}\infty}^0(l_0), \tag{7}$$

где ρ — радиус-вектор; θ — полярный угол. Так как в вершине трещины $\theta = \pi/2$, то из соотношений (7) получим поперечник зоны предразрушения для плоского напряженного состояния

$$h = 2\rho(\pi/2) = 5(K_{\mathrm{I}\infty}^0)^2/(4\pi\sigma_m^2). \tag{8}$$

Критические раскрытия трещин $2v^*(-\Delta) = h_m$ для упругопластического и нелинейно-упругопластического материалов соответственно имеют вид

$$h_m = 5(K_{\mathrm{I}\infty}^0)^2(\varepsilon_m - \varepsilon_0)/(4\pi\sigma_m^2), \qquad h_m = 5(K_{\mathrm{I}\infty}^0)^2(\varepsilon_m - \varepsilon_0')/(4\pi\sigma_m^2). \tag{9}$$

Параметры КРТ h_m в соотношении (9) связаны со стандартными характеристиками диаграмм σ–ε материалов (рис. 1). Для внутренних трещин КРТ в упомянутых материалах определяются по формулам

$$h_m = 5(\sigma_\infty^*/\sigma_m)^2 l_0(\varepsilon_m - \varepsilon_0)/4, \qquad h_m = 5(\sigma_\infty^*/\sigma_m)^2 l_0(\varepsilon_m - \varepsilon_0')/4. \tag{9$'$}$$

Для упругопластического материала с ограничениями по деформативности при наличии пластичности $\varepsilon_m < \infty$, для упругого идеально пластического материала $\varepsilon_m = \infty$. Справедливо следующее соотношение: $\Delta^* \leqslant \Delta^{**}$. Запас пластичности материала, точнее, его деформативности позволяет определить, достигнет ли зона предразрушения критической длины Δ^{**}. Для упругопластического материала с ограничениями по деформативности при пластичности при $K_{\rm I}^* > 0$ длина зоны предразрушения Δ не может превышать критическую длину Δ^*. Для упругопластического материала с ограничениями по деформативности при пластичности, когда $K_{\rm I}^{**} = 0$, длина зоны предразрушения Δ совпадает с Δ^{**}. Для упругого идеально пластического материала при $K_{\rm I} = 0$ всегда имеем Δ^{**}, так как $\varepsilon_m = \infty$.

3.2. *Квазивязкий и вязкий типы разрушения* ($\Delta^* \approx l_0$, $\sigma_\infty^* = O(\sigma_m)$, $\Delta^{**} \approx l_0$, $\sigma_\infty^{**} = O(\sigma_m)$, $l_0 < \Delta^*$, $\sigma_\infty^* \approx \sigma_m$, $l_0 < \Delta^{**}$, $\sigma_\infty^{**} \approx \sigma_m$, но $\sigma_\infty^* < \sigma_m$, $\sigma_\infty^{**} < \sigma_m$). В случае вязкого типа разрушения соотношения (7), (8) использовать нельзя, так как они получены при ограничении $\sigma_\infty^* \ll \sigma_m$ или $\sigma_\infty^{**} \ll \sigma_m$; соотношения (7), (8) можно использовать в случае квазивязкого типа разрушения при $\sigma_\infty^* < \sigma_m$ или $\sigma_\infty^{**} < \sigma_m$.

4. Упругий идеально пластический материал ($\varepsilon_m = \infty$). Исследуем поведение упругого идеально пластического материала в окрестности вершины трещины. Из условия обращения в нуль суммарного КИНа $K_{\rm I}^{**}$ внутренней трещины получим уравнение для критической длины зоны предразрушения Δ^{**} (суммарный КИН не может быть отрицательным, так как при $K_{\rm I} < 0$ берега трещины налагаются друг на друга, что легко проверить [18])

$$\begin{gathered} K_{\rm I}^{**} = K_{{\rm I}\infty}^{**} + K_{{\rm I}\Delta}^{**} = 0, \qquad K_{{\rm I}\infty}^{**} = \sigma_\infty^{**}\sqrt{\pi l^{**}}, \qquad l^{**} = l_0 + \Delta^{**}, \\ K_{{\rm I}\Delta}^{**} = -(2\sigma_m\sqrt{l^{**}}/\sqrt{\pi})\arccos{(1-\Delta^{**}/l^{**})} = -\sigma_m\sqrt{\pi l^{**}}\,[1-(2/\pi)\arcsin{(1-\Delta^{**}/l^{**})}]. \end{gathered} \tag{10}$$

Критическое раскрытие исходной трещины в вершине δ_m можно представить в виде [13]

$$\delta_m = (8\sigma_m l_0/(\pi E))\ln{(\sec{(\pi\sigma_\infty^{**}/(2\sigma_m))})}, \qquad n = k = 1, \quad \eta_1 = 1. \tag{11}$$

Замечание. Классический достаточный критерий прочности (5) переформулирован так, что позволяет описать разрушение структурированных тел. Однако формальные выкладки совпадают с классическими результатами, если $n = k = 1$ и $\eta = 1$.

Данный случай рассматривается ниже.

Очевидно, что критическую длину зоны предразрушения Δ^{**} перед исходной трещиной l_0 (или в случае фиктивной трещины l^{**}) можно представить в виде (см. (10))

$$\Delta^{**}/l_0 = \sec{(\pi\sigma_\infty^*/(2\sigma_m))} - 1, \qquad \Delta^{**}/l^{**} = 1 - \cos{(\pi\sigma_\infty^*/(2\sigma_m))}. \tag{12}$$

4.1. *Квазихрупкий тип разрушения* ($\Delta^{**} \ll l_0$, $\sigma_\infty^* \ll \sigma_m$). В условиях квазихрупкого приближения после соответствующих преобразований в соотношениях (12) получим критическую длину зоны предразрушения Δ^{**} для исходной l_0 или фиктивной l^{**} трещин, если удержать первые члены разложений ($\sigma_\infty/\sigma_m \ll 1$):

$$\Delta^{**}/l_0 = (\pi^2/8)(\sigma_\infty^{**}/\sigma_m)^2, \qquad \Delta^{**}/l^{**} = (\pi^2/8)(\sigma_\infty^{**}/\sigma_m)^2, \tag{13}$$

и величину раскрытия исходной трещины в вершине δ_m, если ограничиться первым членом разложения в (11) (см. [13]):

$$\delta_m = \pi l_0(\sigma_\infty^{**}/E)(\sigma_\infty^{**}/\sigma_m). \tag{14}$$

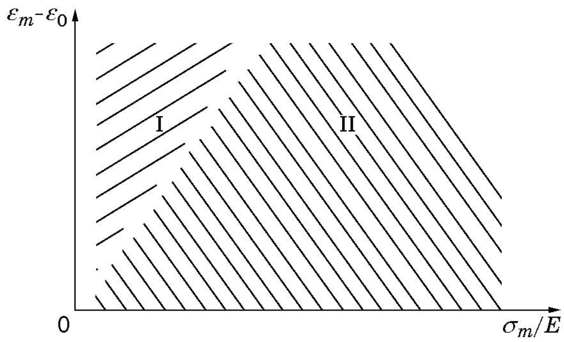

Рис. 2

Следует отметить, что протяженность зоны предразрушения Δ^{**} в (13) почти совпадает с протяженностью зоны пластичности, а формула (14) для величины раскрытия исходной трещины в вершине δ_m часто используется в экспериментальной механике разрушения [13].

Сравним величины δ_m и h_m, характеризующие величины раскрытия исходных трещин в достаточных критериях (5) и (4). При $K_{\rm I}^* \to 0$ имеем $\delta_m \approx h_m$; воспользовавшись первым соотношением в (9′) и соотношением (14), окончательно получим приближенное равенство

$$\varepsilon_m - \varepsilon_0 \approx 4\pi\sigma_m/(5E), \qquad (15)$$

разделяющее области применимости этих критериев для внутренних трещин. На рис. 2 в соответствии с (15) приведены области применимости достаточных критериев квазихрупкой прочности (4), (5) для внутренних трещин. Эти области определяются соотношением между "теоретической" прочностью, модулем упругости и деформативностью пластического материала. На рис. 2 область I соответствует классическому критерию квазихрупкой прочности (5), область II — критерию квазихрупкой прочности (4), ось $\varepsilon_m - \varepsilon_0 = 0$ — критерию хрупкой прочности (3). Только некоторые реальные материалы соответствуют области I (например, золото, некоторые пластмассы), большинство металлических конструкционных материалов соответствует области II, а почти все керамики соответствуют части области II, примыкающей к оси $\varepsilon_m - \varepsilon_0 = 0$.

4.2. *Квазивязкий тип разрушения* ($\Delta^{**} \approx l_0$, $\sigma_\infty^{**} = O(\sigma_m)$, но $\sigma_\infty^{**} < \sigma_m$). Получим аналитические выражения для критической длины зоны предразрушения Δ^{**} и величину раскрытия исходной трещины в вершине δ_m. Удерживая два члена в разложениях для (11), (12), имеем

$$\frac{\Delta^{**}}{l_0} = \frac{\pi^2}{8}\Big(\frac{\sigma_\infty^{**}}{\sigma_m}\Big)^2\Big[1 + \frac{5\pi^2}{48}\Big(\frac{\sigma_\infty^{**}}{\sigma_m}\Big)^2\Big], \qquad \frac{\Delta^{**}}{l^{**}} = \frac{\pi^2}{8}\Big(\frac{\sigma_\infty^{**}}{\sigma_m}\Big)^2\Big[1 - \frac{\pi^2}{48}\Big(\frac{\sigma_\infty^{**}}{\sigma_m}\Big)^2\Big],$$
$$\delta_m = \pi l_0(\sigma_\infty^{**}/E)(\sigma_\infty^{**}/\sigma_m)[1 + (\pi^2/24)(\sigma_\infty^{**}/\sigma_m)^2]. \qquad (16)$$

Очевидно, что вторые слагаемые в квадратных скобках в (16) выполняют роль поправок к основной части решения. Так же как в п. **3**, сравним величины δ_m и h_m. Тогда для внутренних трещин получим

$$\varepsilon_m - \varepsilon_0 \approx (4\pi/5)(\sigma_m/E)[1 + (\pi^2/24)(\sigma_\infty^{**}/\sigma_m)^2]. \qquad (17)$$

Последний член в правой части соотношения (17) зависит от отношения $\sigma_\infty^{**}/\sigma_m$. Области применимости достаточных критериев (4), (5) для квазивязкого типа разрушения (см. соотношения (15), (17) и рис. 2) смещаются мало по сравнению с областями для квазихрупкого типа разрушения.

5. Упругопластический материал с ограничениями по деформативности ($\varepsilon_m < \infty$). Если упругопластический материал имеет ограничение по деформативности, то уравнение для определения критической длины зоны предразрушения Δ^* получится из последнего соотношения достаточного критерия (4), причем суммарный КИН K_{I} внутренней трещины отличен от нуля ($K_{\mathrm{I}} > 0$) [18]:

$$K_{\mathrm{I}} = K_{\mathrm{I}\infty} + K_{\mathrm{I}\Delta}, \qquad K_{\mathrm{I}\infty} = \sigma_\infty\sqrt{\pi l}, \qquad l = l_0 + \Delta,$$
$$K_{\mathrm{I}\Delta} = -(2\eta\sigma_m\sqrt{l}/\sqrt{\pi})\arccos(1-\Delta/l) = -\eta\sigma_m\sqrt{\pi l}[1-(2/\pi)\arcsin(1-\Delta/l)]. \tag{18}$$

Очевидно (см. (18)), что суммарный и критический суммарный КИНы K_{I} и K_{I}^* сложным образом зависят от длины и критической длины зон предразрушения Δ и Δ^*: $K_{\mathrm{I}} = K_{\mathrm{I}}(\Delta)$, $K_{\mathrm{I}}^* = K_{\mathrm{I}}^*(\Delta^*)$.

После необходимых преобразований в соотношениях критерия (4) получается два нелинейных уравнения, связывающих критические параметры K_{I}^*, Δ^*, σ_∞^*, h_m:

$$\frac{K_{\mathrm{I}}^*}{\sigma_\infty^*\sqrt{r_1}} = \sqrt{\frac{\pi}{2}n}\Big(\frac{\sigma_m}{\sigma_\infty^*}\frac{k}{n} - 1\Big), \qquad \Delta^* = 2\pi\Big(\frac{G}{æ+1}\frac{h_m}{K_{\mathrm{I}}^*}\Big)^2. \tag{19}$$

Окончательно можно получить уравнение для определения критической длины зоны предразрушения Δ^*, если во второе уравнение (19) подставить выражение (18) для критического суммарного КИНа K_{I}^*:

$$\Big\{\frac{\sigma_\infty^*}{\sigma_m} - \eta\Big[1 - \frac{2}{\pi}\arcsin\Big(1-\frac{\Delta^*}{l^*}\Big)\Big]\Big\}\sqrt{\frac{\Delta^*}{l^*}} = \frac{\sqrt{2}}{æ+1}\frac{G}{\sigma_m}\frac{h_m}{l^*}. \tag{20}$$

Критическая длина зоны предразрушения Δ^* удовлетворяет естественным ограничениям $0 < \Delta^*/l^* < 1$ при $l_0 > 0$, $l^* = l_0 + \Delta^*$. Других ограничений на критическую длину зоны предразрушения Δ^* в соотношениях (19), (20) не налагалось. Следует отметить, что в соотношениях (19), (20) используются только стандартные жесткостные, прочностные характеристики, а также линейный размер r_1, характеризующий размер зерна макроструктуры, и параметр поврежденности η, связанный с пластическим разрыхлением материала.

5.1. *Квазихрупкий тип разрушения* ($\Delta^* \ll l_0$, $\sigma_\infty^* \ll \sigma_m$). Определим критическую длину зоны предразрушения Δ^* при квазихрупком типе разрушения. Если $\Delta^* \ll l_0$, то $\Delta^* \ll l^*$, следовательно, последнее соотношение в (20) можно существенно упростить, учитывая, что $\arcsin(1-\Delta^*/l^*) \simeq \pi/2 - \sqrt{2\Delta^*/l^*}$. Окончательно для параметра $\sqrt{\Delta^*/l^*}$ имеем квадратное уравнение

$$\Big(\sqrt{\frac{\Delta^*}{l^*}}\Big)^2 - \frac{\pi}{2\sqrt{2}}\frac{\sigma_\infty^*}{\eta\sigma_m}\sqrt{\frac{\Delta^*}{l^*}} + \frac{\pi}{2(æ+1)}\frac{G}{\eta\sigma_m}\frac{h_m}{l^*} \simeq 0.$$

Пренебрегая величинами высшего порядка малости по сравнению с единицей, для наименьшего корня квадратного уравнения получим явное выражение

$$\sqrt{\frac{\Delta^*}{l^*}} \simeq \frac{\sqrt{2}}{æ+1}\frac{G}{\sigma_\infty^*}\frac{h_m}{l^*}.$$

Из последнего соотношения следует, что относительная величина зоны предразрушения $\sqrt{\Delta^*/l^*}$ связана линейно с критическим раскрытием трещины h_m.

Приближенные алгебраические уравнения, связывающие критические параметры σ_∞^*, l^*, Δ^*, h_m с теоретической прочностью зернистого материала σ_m, размером зерна r_1 и параметрами n, k, η, характеризующими интервал осреднения, поврежденности исходного материала и пластически деформированного материала, удобно записать в одном из следующих видов:

$$\frac{2l^*}{r_1} \simeq \Big(\frac{\sigma_m}{\sigma^*_\infty} - \frac{n}{k}\Big)^2 \frac{k^2}{n}\Big(1 - \frac{2\sqrt{2}}{\pi}\,\eta\,\frac{\sigma_m}{\sigma^*_\infty}\sqrt{\frac{\Delta^*}{l^*}}\Big)^{-2}, \quad \sqrt{\frac{\Delta^*}{l^*}} \simeq \frac{\sqrt{2}}{\text{æ}+1}\,\frac{G}{\sigma^*_\infty}\,\frac{h_m}{l^*},$$
$$\frac{\sigma^*_\infty}{\sigma_m} \simeq \Big[\frac{\sqrt{n}}{k}\sqrt{\frac{2l^*}{r_1}}\Big(1 - \frac{2\sqrt{2}}{\pi}\,\eta\,\frac{\sigma_m}{\sigma^*_\infty}\sqrt{\frac{\Delta^*}{l^*}}\Big) + \frac{n}{k}\Big]^{-1}. \qquad (21)$$

Кривые разрушения для упругопластического материала с ограничениями по деформативности (21) переходят в кривые разрушения для хрупкого материала, когда длина зоны предразрушения стремится к нулю: $\Delta^* \to 0$.

5.2. *Квазивязкий тип разрушения* ($\Delta^* \approx l_0$, $\sigma^*_\infty = O(\sigma_m)$, но $\sigma^*_\infty < \sigma_m$). При изучении зоны предразрушения для квазивязкого типа разрушения нельзя использовать упрощения п. 5.1, поэтому приходится численно решать уравнение (20) при естественных ограничениях $0 < \Delta^*/l^* < 1$, когда заданы исходные параметры этого уравнения. Полученный корень Δ^*/l^* используется для отыскания критического КИНа $K^*_{\rm I}$. Трансцендентное уравнение, связывающее критические параметры σ^*_∞, l^*, Δ^*, h_m с теоретической прочностью зернистого материала σ_m, размером зерна r_1 и параметрами n, k, η, имеет вид (см. первое уравнение в (19))

$$\sqrt{\frac{2l^*}{r_1}}\Big\{1 - \sqrt{2}\eta\,\frac{\sigma_m}{\sigma^*_\infty}\Big[1 - \frac{2}{\pi}\arcsin\Big(1 - \frac{\Delta^*}{l^*}\Big)\Big]\Big\} = \frac{k}{\sqrt{n}}\Big(\frac{\sigma_m}{\sigma^*_\infty} - \frac{n}{k}\Big). \qquad (22)$$

Структура трансцендентного уравнения (22) подобна структуре уравнений (21), поэтому при отыскании корней уравнения (22) методом последовательных приближений в качестве нулевого приближения целесообразно выбирать корень уравнений (21).

6. Обсуждение. В рамках модели Леонова — Панасюка — Дагдейла построены кривые разрушения для упругопластических материалов без ограничений по деформативности. При построении этих кривых использовалась информация о трещине со связями между берегами в окрестности вершины для изотропных материалов (см. также [19]). Предлагаемый обобщенный достаточный критерий (4)–(6) восполняет возникший пробел при переходе от описания разрушения хрупких тел со структурой (см. критерий (3)) к описанию упругопластических тел с ограниченной деформативностью. Достаточный критерий (4) для упругопластического материала со структурой с ограничениями по деформативности является двухпараметрическим критерием. В уравнения (21), (22) входят два параметра материала (кроме параметра структуры r_1): теоретическая прочность (предел текучести) σ_m и критическое раскрытие трещины h_m. Предлагаемый подход не противоречит идеям Гриффитса: по необходимому критерию (3) для хрупких тел со структурой получен критический КИН $K^*_{\rm I}|_{\Delta^*=0}$ (см. первое соотношение в (21)).

Критическое раскрытие трещины h_m определяется через предельное относительное удлинение материала ε_m. При $\varepsilon_m \to \varepsilon_0$ предельный переход соответствует хрупкому материалу, при $\varepsilon_m \to \infty$ — упругому идеально пластическому (классическое решение).

В обобщенном достаточном критерии (4)–(6) использовались параметр структуры материала r_1, теоретическая прочность (предел текучести) структурированного материала σ_m и предельное относительное удлинение материала ε_m. Параметр структуры материала r_1 определяется стандартными методами металлофизики. Теоретическую прочность на растяжение σ_m целесообразно определять при трехточечном изгибе образцов, поперечное сечение которых имеет размеры от $20r_1$ до $50r_1$. При этом требуется тщательная подготовка поверхности образцов, чтобы свести к минимуму разбросы экспериментальных данных. Предельное относительное удлинение материала ε_m получается при построении стандартной диаграммы σ–ε.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Панасюк В. В., Андрейкив А. Е., Ковчик С. Е.** Определение вязкости разрушения $K_{\mathrm{I}c}$ конструкционных материалов через их механические характеристики и параметр структуры // Физ.-хим. механика материалов. 1977. Т. 13, № 2. С. 120–122.
2. **Ковчик С. Е., Морозов Е. М.** Характеристики кратковременной трещиностойкости материалов и методы их определения. Киев: Наук. думка, 1988. (Механика разрушения и прочность материалов; Т. 3).
3. **Панасюк В. В., Андрейкив А. Е., Партон В. З.** Основы механики разрушения материалов. Киев: Наук. думка, 1988. (Механика разрушения и прочность материалов; Т. 1).
4. **Нейбер Г.** Концентрация напряжений. М.; Л.: Гостехтеоретиздат, 1947.
5. **Новожилов В. В.** О необходимом и достаточном критерии хрупкой прочности // Прикл. математика и механика. 1969. Т. 33, вып. 2. С. 212–222.
6. **Корнев В. М.** Иерархия критериев прочности структурированных хрупких сред. Сателлитное зарождение микротрещин // ПМТФ. 2000. Т. 41, № 2. С. 177–187.
7. **Корнев В. М.** Многомасштабные критерии сдвиговой прочности блочных хрупких сред. Сателлитное зарождение микропор // Физ.-техн. пробл. разраб. полез. ископаемых. 2000. Т. 40, № 5. С. 7–16.
8. **Корнев В. М., Кургузов В. Д.** Достаточный дискретно-интегральный критерий прочности при отрыве // ПМТФ. 2001. Т. 42, № 2. С. 161–170.
9. **Корнев В. М., Адищев В. В.** Достаточные критерии роста макротрещин нормального отрыва в среде регулярной структуры // Изв. вузов. Стр-во. 1999. № 12. С. 9–14.
10. **Корнев В. М.** Необходимые и достаточные критерии разрушения композита с хрупким связующим. 1. Слабое армирование // ПМТФ. 2002. Т. 43, № 3. С. 152–160.
11. **Леонов М. Я., Панасюк В. В.** Развитие мельчайших трещин в твердом теле // Прикл. механика. 1959. Т. 5, № 4. С. 391–401.
12. **Dugdale D. S.** Yielding of steel sheets cotaining slits // J. Mech. Phys. Solids. 1960. V. 8. P. 100–104.
13. **Керштейн И. М., Клюшников В. Д., Ломакин Е. В., Шестериков С. А.** Основы экспериментальной механики разрушения. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1989.
14. **Шмитт-Томас К. Г.** Металловедение для машиностроения. М.: Металлургия, 1995.
15. **Рыбин В. В.** Большие пластические деформации и разрушение металллов. М.: Металлургия, 1986.
16. **Бичем К. Д.** Микропроцессы разрушения // Разрушение: В 7 т. Т. 1. Микроскопические и макроскопические основы механики разрушения. М.: Мир, 1973. С. 265–375.
17. **Черных К. Ф.** Нелинейная сингулярная упругость: В 2 ч. СПб.: Изд-во С.-Петерб. ун-та, 1999. Ч. 2. Приложения.
18. **Саврук М. П.** Коэффициенты интенсивности напряжений в телах с трещинами. Киев: Наук. думка, 1988. (Механика разрушения и прочность материалов; Т. 2).
19. **Гольдштейн Р. В., Перельмутер М. Н.** Трещина на границе соединения материалов со связями между берегами // Изв. РАН. Механика твердого тела. 2001. № 1. С. 94–112.

Поступила в редакцию 24/I 2002 г.