УДК 539.3

Э. И. Григолюк, Г. М. Куликов

АНАЛИТИЧЕСКИЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ ЗАДАЧ ТЕОРИИ МНОГОСЛОЙНЫХ АНИЗОТРОПНЫХ ПЛАСТИН

В 1955 году Бергер [1], анализируя известное нелинейное решение для упругой однородной круговой пластины с заделанными кромками, высказал предположение, что второй инвариант тензора деформаций срединной поверхности не оказывает сколько-нибудь значительного влияния на величину прогиба и им допустимо пренебречь в выражении для энергии деформации пластины. Последующий вариационный вывод исходных соотношений задачи приводит к двум дифференциальным уравнениям, одно из которых является линейным относительно прогиба. Изящная форма уравнений, возможность применения к ним известных методов решения линейных краевых задач — все это привлекло внимание многих ученых, особенно зарубежных, о чем можно судить из обзора [2] (см. также [3—5]).

1. Построим уравнения типа Бергера многослойных анизотропных пластин и применим их для решения нелинейных задач статики. Рассмотрим многослойную анизотропную пластину постоянной толщины h. Поверхность приведения Σ отнесем к системе криволинейных координат α^i. Отметим, что в этом разделе все индексы за исключением $k = 1, 2, \ldots, N$ (N — число слоев) принимают значения 1, 2.

Перемещения и деформации в пластине определяем по формулам [3]

$$u_i^{(k)} = u_i + z\theta_i + g(z)\psi_i,\ \ u_3^{(k)} = w,\ \ \theta_i = -\nabla_i w,\ g(z) = \int\limits_0^z f_{(0)}(t)\,dt,$$

$$\varepsilon_{ij}^{(k)} = e_{ij} + z\varkappa_{ij} + g(z)\psi_{ij},\ \ \varepsilon_{i3}^{(k)} = f_{(0)}(z)\gamma_{i3},\ e_{ij} = (\nabla_i u_j + \nabla_j u_i + \nabla_i w\cdot\nabla_j w)/2,$$
$$\varkappa_{ij} = (\nabla_i\theta_j + \nabla_j\theta_i)/2,\ \psi_{ij} = (\nabla_i\psi_j + \nabla_j\psi_i)/2$$

($f_{(0)}(z)$ — априори заданная функция поперечной координаты z, характеризующая закон распределения поперечных сдвигов по толщине пакета).

Прежде чем приступить к выводу уравнений типа Бергера, обратим внимание на одно важное обстоятельство. Сам Бергер и подавляющее большинство его последователей, мало заботясь об обосновании гипотезы, исходят из принципа возможных перемещений, откуда выводят уравнения равновесия относительно перемещений. При этом не устанавливается соответствия между силовыми и кинематическими характеристиками пластины, что нередко приводило к неправильному пониманию особенностей работы конструкции и ошибкам при формулировании граничных условий. Указанных противоречий можно избежать, если воспользоваться смешанным вариационным принципом в форме [6]. Функционал J_7 из [6] представим в виде

$$(1.1)\qquad J_7 = \iint\limits_{\Sigma}\Big\{W - T^{\alpha\beta}\Big[e_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}(\nabla_\alpha u_\beta + \nabla_\beta u_\alpha + \nabla_\alpha w\cdot\nabla_\beta w)\Big] -$$
$$- M^{\alpha\beta}\Big[\varkappa_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}(\nabla_\alpha\theta_\beta + \nabla_\beta\theta_\alpha)\Big] - L^{\alpha\beta}\Big[\psi_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}(\nabla_\alpha\psi_\beta + \nabla_\beta\psi_\alpha)\Big] -$$
$$- Q_o^\alpha(\gamma_{\alpha3} - \psi_\alpha)\Big\}\sqrt{a}\,d\alpha^1 d\alpha^2 - \iint\limits_{\Sigma}\Big\{(p_+^\alpha - p_-^\alpha)u_\alpha + (\delta_{(N)}p_+^\alpha - \delta_{(0)}p_-^\alpha)\theta_\alpha +$$
$$+ [g(\delta_{(N)})p_+^\alpha - g(\delta_{(0)})p_-^\alpha]\psi_\alpha + (q_+ - q_-)w\Big\}\sqrt{a}\,d\alpha^1 d\alpha^2 -$$
$$- \oint\limits_{\Gamma}(T_{\nu\nu}^* u_\nu + T_{\nu t}^* u_t + M_{\nu\nu}^*\theta_\nu + M_{\nu t}^*\theta_t + L_{\nu\nu}^*\psi_\nu + L_{\nu t}^*\psi_t + Q_{\nu3}^* w)\,ds_t.$$

Здесь p_+^i, p_-^i, q_+, q_- — поверхностные нагрузки; $\delta_{(0)}, \delta_{(N)}$ — расстояния от поверхности Σ до внешних поверхностей Σ_-, Σ_+; T^{ij}, Q^i_o, M^{ij}, L^{ij} — удельные усилия и моменты, определяемые по формулам [3]; $T^*_{\nu\nu}, \ldots$ $\ldots, L^*_{\nu t}$, $u_\nu, \ldots$, ψ_t — физические составляющие соответствующих тензоров и векторов в системе координат s_t, s_ν, связанной с граничным контуром Γ; a — дискриминант метрического тензора поверхности Σ; W — удельная энергия деформации пластины:

(1.2) $$W = (1/2)\, A^{\alpha\beta\gamma\omega} e_{\alpha\beta} e_{\gamma\omega} + B^{\alpha\beta\gamma\omega} e_{\alpha\beta} \varkappa_{\gamma\omega} + D^{\alpha\beta\gamma\omega} e_{\alpha\beta} \psi_{\gamma\omega} +$$
$$+ (1/2)\, C^{\alpha\beta\gamma\omega} \varkappa_{\alpha\beta} \varkappa_{\gamma\omega} + F^{\alpha\beta\gamma\omega} \varkappa_{\alpha\beta} \psi_{\gamma\omega} + (1/2)\, G^{\alpha\beta\gamma\omega} \psi_{\alpha\beta} \psi_{\gamma\omega} + (1/2)\, P^{\alpha\beta} \gamma_{\alpha 3} \gamma_{\beta 3},$$

$$A^{\alpha\beta\gamma\omega} = \sum_{k=1}^{N} \int\limits_{\delta_{(k-1)}}^{\delta_{(k)}} b_{(k)}^{\alpha\beta\gamma\omega} dz, \quad B^{\alpha\beta\gamma\omega} = \sum_{k=1}^{N} \int\limits_{\delta_{(k-1)}}^{\delta_{(k)}} b_{(k)}^{\alpha\beta\gamma\omega} z\, dz,$$

$$C^{\alpha\beta\gamma\omega} = \sum_{k=1}^{N} \int\limits_{\delta_{(k-1)}}^{\delta_{(k)}} b_{(k)}^{\alpha\beta\gamma\omega} z^2 dz, \quad D^{\alpha\beta\gamma\omega} = \sum_{k=1}^{N} \int\limits_{\delta_{(k-1)}}^{\delta_{(k)}} b_{(k)}^{\alpha\beta\gamma\omega} g(z)\, dz,$$

$$F^{\alpha\beta\gamma\omega} = \sum_{k=1}^{N} \int\limits_{\delta_{(k-1)}}^{\delta_{(k)}} b_{(k)}^{\alpha\beta\gamma\omega} z g(z)\, dz, \quad G^{\alpha\beta\gamma\omega} = \sum_{k=1}^{N} \int\limits_{\delta_{(k-1)}}^{\delta_{(k)}} b_{(k)}^{\alpha\beta\gamma\omega} g^2(z)\, dz,$$

$$P^{\alpha\beta} = \sum_{k=1}^{N} \int\limits_{\delta_{(k-1)}}^{\delta_{(k)}} b_{(k)}^{\alpha 3\beta 3} f^2_{(0)}(z)\, dz$$

($b_{(k)}^{\alpha\beta\gamma\omega}$ — тангенциальные жесткости k-го слоя).

Введем обобщенные деформации $\overset{\circ}{e}_{ij}$ и отвечающие им обобщенные перемещения u°_i:

(1.3) $$e_{ij} = \overset{\circ}{e}_{ij} - z^{\circ}_1 \varkappa_{ij} - z^{\circ}_2 \psi_{ij}, \quad u_i = u^{\circ}_i - z^{\circ}_1 \theta_i - z^{\circ}_2 \psi_i \quad (z^{\circ}_i = \mathrm{const}).$$

Отнесем далее удельные моменты к некоторой поверхности, отстоящей от исходной на расстоянии z°_1, а обобщенные удельные моменты приведем к поверхности, отстоящей от исходной на расстоянии z°_2:

(1.4) $$M^{ij}_o = M^{ij} - z^{\circ}_1 T^{ij}, \quad L^{ij}_o = L^{ij} - z^{\circ}_2 T^{ij}.$$

Аналогичные преобразования следует провести и с контурными моментами $M^*_{\nu\nu}$, $M^*_{\nu t}$, $L^*_{\nu\nu}$, $L^*_{\nu t}$.

Подставив обобщенные деформации и перемещения из (1.3) в (1.1) и учитывая (1.2), (1.4), получим

(1.5) $$J_7 = \iint\limits_{\Sigma} \Big\{ W - T^{\alpha\beta} \Big[\overset{\circ}{e}_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} (\nabla_\alpha u^{\circ}_\beta + \nabla_\beta u^{\circ}_\alpha + \nabla_\alpha w \cdot \nabla_\beta w) \Big] -$$
$$- M^{\alpha\beta}_o \Big[\varkappa_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} (\nabla_\alpha \theta_\beta + \nabla_\beta \theta_\alpha) \Big] - L^{\alpha\beta}_o \Big[\psi_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} (\nabla_\alpha \psi_\beta + \nabla_\beta \psi_\alpha) \Big] -$$
$$- Q^{\alpha}_o (\gamma_{\alpha 3} - \psi_\alpha) - (p^\alpha_+ - p^\alpha_-)\, u^{\circ}_\alpha - \big[(\delta_{(N)} - z^{\circ}_1)\, p^\alpha_+ - (\delta_{(0)} - z^{\circ}_1)\, p^\alpha_- \big]\, \theta_\alpha -$$
$$- \big[(g(\delta_{(N)}) - z^{\circ}_2)\, p^\alpha_+ - (g(\delta_{(0)}) - z^{\circ}_2)\, p^\alpha_- \big]\, \psi_\alpha - (q_+ - q_-)\, w \Big\} \sqrt{a}\, d\alpha^1 d\alpha^2 -$$
$$- \oint\limits_{\Gamma} (T^*_{\nu\nu} u^{\circ}_\nu + T^*_{\nu t} u^{\circ}_t + M^{\circ *}_{\nu\nu} \theta_\nu + M^{\circ *}_{\nu t} \theta_t + L^{\circ *}_{\nu\nu} \psi_\nu + L^{\circ *}_{\nu t} \psi_t + Q^*_{\nu 3} w)\, ds_t;$$

(1.6) $$W = \frac{1}{2} A^{\alpha\beta\gamma\omega} \overset{\circ}{e}_{\alpha\beta} \overset{\circ}{e}_{\gamma\omega} + B^{\alpha\beta\gamma\omega}_o \overset{\circ}{e}_{\alpha\beta} \varkappa_{\gamma\omega} + D^{\alpha\beta\gamma\omega}_o \overset{\circ}{e}_{\alpha\beta} \psi_{\gamma\omega} +$$
$$+ \frac{1}{2} (C^{\alpha\beta\gamma\omega}_o - z^{\circ}_1 B^{\alpha\beta\gamma\omega}_o)\, \varkappa_{\alpha\beta} \varkappa_{\gamma\omega} + (F^{\alpha\beta\gamma\omega}_o - z^{\circ}_1 D^{\alpha\beta\gamma\omega}_o)\, \varkappa_{\alpha\beta} \psi_{\gamma\omega} +$$
$$+ \frac{1}{2} (G^{\alpha\beta\gamma\omega}_o - z^{\circ}_2 D^{\alpha\beta\gamma\omega}_o)\, \psi_{\alpha\beta} \psi_{\gamma\omega} + \frac{1}{2} P^{\alpha\beta} \gamma_{\alpha 3} \gamma_{\beta 3},$$

где $B_o^{\alpha\beta\gamma\omega}$, $C_o^{\alpha\beta\gamma\omega}$, $D_o^{\alpha\beta\gamma\omega}$, $F_o^{\alpha\beta\gamma\omega}$, $G_o^{\alpha\beta\gamma\omega}$ — приведенные жесткости пластины:

$$B_o^{\alpha\beta\gamma\omega} = B^{\alpha\beta\gamma\omega} - z_1^o A^{\alpha\beta\gamma\omega}, \quad C_o^{\alpha\beta\gamma\omega} = C^{\alpha\beta\gamma\omega} - z_1^o B^{\alpha\beta\gamma\omega}, \quad D_o^{\alpha\beta\gamma\omega} = D^{\alpha\beta\gamma\omega} -$$
$$- z_2^o A^{\alpha\beta\gamma\omega}, \quad F_o^{\alpha\beta\gamma\omega} = F^{\alpha\beta\gamma\omega} - z_2^o D^{\alpha\beta\gamma\omega}, \quad G_o^{\alpha\beta\gamma\omega} = G^{\alpha\beta\gamma\omega} - z_2^o D^{\alpha\beta\gamma\omega}.$$

Присутствие в выражении для удельной энергии деформации пластины (1.6) второго и третьего слагаемых существенно ограничивает область применения гипотезы Бергера в теории многослойных анизотропных пластин, так как при этом моменты и обобщенные моменты зависят от удлинений и сдвигов поверхности приведения, а в формулах для тангенциальных усилий присутствуют члены, учитывающие влияние параметров изменения кривизн и поперечных сдвигов.

Упростим формулу (1.6), положив равными нулю коэффициенты в перекрестных слагаемых:

$$B_o^{\alpha\beta\gamma\omega} = 0, \quad D_o^{\alpha\beta\gamma\omega} = 0. \tag{1.7}$$

Равенства (1.7) можно трактовать как условия приведения расчета слоистой пластины к однородной, они впервые получены в [7] для биметаллических конструкций. Нетрудно убедиться, что в общем случае многослойной анизотропной пластины условия приведения (1.7) тождественно удовлетворяются лишь для симметрично собранного пакета слоев. Для трансверсально изотропных пластин (1.7) выполняются и для несимметричных пакетов, когда коэффициенты Пуассона слоев равны. Тогда, вводя приведенный коэффициент Пуассона, получим формулы для параметров z_i^o из (1.3), (1.4): $z_1^o = hc_{13}/2$, $z_2^o = hc_{12}/2$, где c_{12}, c_{13} — безразмерные жесткостные параметры [3].

Воспользуемся гипотезой Бергера, приближенно представив (1.6) в виде

$$W \simeq \frac{1}{2} I_1^2 + \frac{1}{2} C_o^{\alpha\beta\gamma\omega}\varkappa_{\alpha\beta}\varkappa_{\gamma\omega} + F_o^{\alpha\beta\gamma\omega}\varkappa_{\alpha\beta}\psi_{\gamma\omega} + \frac{1}{2} G_o^{\alpha\beta\gamma\omega}\psi_{\alpha\beta}\psi_{\gamma\omega} + \frac{1}{2} P^{\alpha\beta}\gamma_{\alpha 3}\gamma_{\beta 3}. \tag{1.8}$$

Величина

$$I_1 = U^{\alpha\beta} e_{\alpha\beta}^o \tag{1.9}$$

соответствует первому инварианту тензора деформаций срединной плоскости изотропной пластины и для однородных ортотропных пластин введена, например, в [8]. Здесь $U^{\alpha\beta}$ — контравариантные компоненты симметричного тензора второго ранга: $U^{11} = \sqrt{A^{1111}}$, $U^{22} = \sqrt{A^{2222}}$, $U^{12} = \sqrt{2A^{1112}} + \sqrt{2A^{2212}}$.

Найдем вариацию функционала J_7 из (1.5) с учетом (1.8), (1.9), допустив к варьированию u_i^o, ψ_i, w, e_{ij}^o, $\varkappa_{ij}$, ψ_{ij}, γ_{i3}, T^{ij}, M_o^{ij}, L_o^{ij}, Q_o^i:

$$\delta J_7 = \iint\limits_{\Sigma} \{ -(T^{\alpha\beta} - U^{\alpha\beta} I_1)\,\delta e_{\alpha\beta}^o - (M_o^{\alpha\beta} - C_o^{\alpha\beta\gamma\omega}\varkappa_{\gamma\omega} - F_o^{\alpha\beta\gamma\omega}\psi_{\gamma\omega})\,\delta\varkappa_{\alpha\beta} -$$
$$- (L_o^{\alpha\beta} - F_o^{\alpha\beta\gamma\omega}\varkappa_{\gamma\omega} - G_o^{\alpha\beta\gamma\omega}\psi_{\gamma\omega})\,\delta\psi_{\alpha\beta} - (Q_o^{\alpha} - P^{\alpha\beta}\gamma_{\beta 3})\,\delta\gamma_{\alpha 3} -$$
$$- \left[e_{\alpha\beta}^o - \frac{1}{2}(\nabla_\alpha u_\beta^o + \nabla_\beta u_\alpha^o + \nabla_\alpha w \cdot \nabla_\beta w)\right]\delta T^{\alpha\beta} - \left[\varkappa_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}(\nabla_\alpha \theta_\beta + \nabla_\beta \theta_\alpha)\right]\delta M_o^{\alpha\beta} -$$
$$- \left[\psi_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}(\nabla_\alpha \psi_\beta + \nabla_\beta \psi_\alpha)\right]\delta L_o^{\alpha\beta} - (\gamma_{\alpha 3} - \psi_\alpha)\,\delta Q_o^\alpha - (\nabla_\alpha T^{\alpha\beta} + p_+^\beta - p_-^\beta)\,\delta u_\beta^o -$$
$$- [\nabla_\beta \nabla_\alpha M_o^{\alpha\beta} - \nabla_\beta (T^{\alpha\beta}\theta_\alpha) + (\delta_{(N)} - z_1^o)\nabla_\alpha p_+^\alpha - (\delta_{(0)} - z_1^o)\nabla_\alpha p_-^\alpha + q_+ - q_-]\,\delta w -$$
$$- [\nabla_\alpha L_o^{\alpha\beta} - Q_o^\beta + (g(\delta_{(N)}) - z_2^o)\,p_+^\beta - (g(\delta_{(0)}) - z_2^o)\,p_-^\beta]\,\delta\psi_\beta \} \sqrt{a}\, d\alpha^1 d\alpha^2 +$$
$$+ \oint\limits_{\Gamma} \{ (T_{\nu\nu} - T_{\nu\nu}^*)\,\delta u_\nu^o + (T_{\nu t} - T_{\nu t}^*)\,\delta u_t^o + (M_{\nu\nu}^o - M_{\nu\nu}^{o*})\,\delta\theta_\nu +$$

$$+\left(L^{\circ}_{\nu\nu}-L^{\circ *}_{\nu\nu}\right)\delta\psi_\nu+\left(L^{\circ}_{\nu t}-L^{\circ *}_{\nu t}\right)\delta\psi_t+\left[\frac{\partial M^{\circ}_{\nu t}}{\partial s_t}+\nu_\beta\nabla_\alpha M^{\alpha\beta}_{\circ}-T_{\nu\nu}\theta_\nu-T_{\nu t}\theta_t+\right.$$

$$\left.+\left(\delta_{(N)}-z^{\circ}_1\right)p^{+}_{\nu}-\left(\delta_{(0)}-z^{\circ}_1\right)p^{-}_{\nu}-\frac{\partial M^{\circ *}_{\nu t}}{\partial s_t}-Q^{*}_{\nu 3}\right]\delta w\Big\}\,ds_t.$$

Подставляя полученную формулу для δJ_7 в вариационное уравнение $\delta J_7=0$, приходим к деформационным выражениям

$$e^{\circ}_{ij}=\frac{1}{2}\left(\nabla_i u^{\circ}_j+\nabla_j u^{\circ}_i+\nabla_i w\cdot\nabla_j w\right),\quad \gamma_{i3}=\psi_i,\quad \varkappa_{ij}=\frac{1}{2}\left(\nabla_i\theta_j+\nabla_j\theta_i\right),$$

$$\psi_{ij}=\frac{1}{2}\left(\nabla_i\psi_j+\nabla_j\psi_i\right);$$

соотношениям упругости

$$T^{ij}=U^{ij}I_1,\quad M^{ij}_{\circ}=C^{ij\alpha\beta}_{\circ}\varkappa_{\alpha\beta}+F^{ij\alpha\beta}_{\circ}\psi_{\alpha\beta},\quad Q^{i}_{\circ}=P^{i\alpha}\gamma_{\alpha 3},$$
$$L^{ij}_{\circ}=F^{ij\alpha\beta}_{\circ}\varkappa_{\alpha\beta}+G^{ij\alpha\beta}_{\circ}\psi_{\alpha\beta}; \tag{1.10}$$

уравнениям равновесия

$$\nabla_\alpha T^{\alpha i}=p^{i}_{-}-p^{i}_{+},\quad \nabla_\beta\nabla_\alpha M^{\alpha\beta}_{\circ}-\nabla_\beta\left(T^{\alpha\beta}\theta_\alpha\right)=q_{-}-q_{+}+$$
$$+\left(\delta_{(0)}-z^{\circ}_1\right)\nabla_\alpha p^{\alpha}_{-}-\left(\delta_{(N)}-z^{\circ}_1\right)\nabla_\alpha p^{\alpha}_{+},\quad \nabla_\alpha L^{\alpha i}_{\circ}-Q^{i}_{\circ}=\left[g\left(\delta_{(0)}-z^{\circ}_2\right)\right]p^{i}_{-}-$$
$$-\left[g\left(\delta_{(N)}\right)-z^{\circ}_2\right]p^{i}_{+}; \tag{1.11}$$

естественным граничным условиям

$$\left(T_{\nu\nu}-T^{*}_{\nu\nu}\right)\delta u^{\circ}_{\nu}=0,\quad \left(T_{\nu t}-T^{*}_{\nu t}\right)\delta u^{\circ}_t=0,\quad \left(M^{\circ}_{\nu\nu}-M^{\circ *}_{\nu\nu}\right)\delta\theta_\nu=0,$$
$$\left(L^{\circ}_{\nu\nu}-L^{\circ *}_{\nu\nu}\right)\delta\psi_\nu=0,\quad \left(L^{\circ}_{\nu t}-L^{\circ *}_{\nu t}\right)\delta\psi_t=0,\quad \left[\frac{\partial M^{\circ}_{\nu t}}{\partial s_t}+\nu_\beta\nabla_\alpha M^{\alpha\beta}_{\circ}-T_{\nu\nu}\theta_\nu-\right.$$
$$\left.-T_{\nu t}\theta_t+\left(\delta_{(N)}-z^{\circ}_1\right)p^{+}_{\nu}-\left(\delta_{(0)}-z^{\circ}_1\right)p^{-}_{\nu}-\frac{\partial M^{\circ *}_{\nu t}}{\partial s_t}-Q^{*}_{\nu 3}\right]\delta w=0. \tag{1.12}$$

Если в (1.11), (1.12) и (1.3), (1.4) положим $z^{\circ}_i=0$, то получим уравнения равновесия и граничные условия теории многослойных пластин на основе обобщенной гипотезы Тимошенко [3]. И это не случайно. Дело в том, что тангенциальные усилия T^{ij} из (1.10) соответствуют принятой гипотезе Бергера, заменяя традиционные усилия в многослойной пластине. Отметим также, что (1.10) и (1.11) по форме записи совпадают с соотношениями и уравнениями теории трехслойных анизотропных пластин типа Бергера [9].

2. Предложенная методика исследования геометрически нелинейных задач особенно проста и эффективна для многослойных трансверсально изотропных пластин и вносит большую физическую наглядность по сравнению с общепринятым подходом Бергера. Для прямоугольных трансверсально изотропных пластин уравнения равновесия (1.11) можно записать в виде

$$T_{1i,1}+T_{2i,2}=0,\quad L^{\circ}_{1i,1}+L^{\circ}_{2i,2}=Q_{oi},$$
$$M^{\circ}_{11,11}+2M^{\circ}_{12,12}+M^{\circ}_{22,22}+T_{11}w_{,11}+2T_{12}w_{,12}+T_{22}w_{,22}=-q. \tag{2.1}$$

Начиная с этого момента полагаем, что плоскость приведения пластины отнесена к декартовой системе координат α_1, α_2, а T_{ij}, M°_{ij}, L°_{ij}, Q_{oi} обозначают физические составляющие соответствующих тензоров. Уравнения равновесия (2.1) по форме записи совпадают с уравнениями равновесия трехслойных трансверсально изотропных пластин [10]. Аналогичный результат имеет место и для граничных условий, поэтому их здесь не приводим.

Уравнения (2.1) можно преобразовать, если воспользоваться методикой, описанной в [3]. В итоге получим дифференциальные уравнения относительно функции перемещений χ, функции сдвига φ

$$(2.2)\qquad \left(1-\frac{\theta h^2}{\beta}\Delta\right)\Delta\Delta\chi-\alpha^2\left(1-\frac{h^2}{\beta}\Delta\right)\Delta\chi=\frac{q}{D};$$

$$(2.3)\qquad \frac{1-\nu}{2}\frac{h^2}{\beta}\Delta\varphi=\varphi,\quad D=\frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}\eta_3$$

и интегро-дифференциальное уравнение для определения константы Бергера α^2

$$(2.4)\qquad \frac{abh^2\eta_5}{6}\alpha^2=\int_0^b\int_0^a[(w_{,1})^2+(w_{,2})^2]\,d\alpha_1\,d\alpha_2,\quad w=\left(1-\frac{h^2}{\beta}\Delta\right)\chi,$$

где ν — приведенный коэффициент Пуассона; E — осредненный модуль упругости; θ, β, η_3 — безразмерные жесткостные параметры [3]; a, b — размеры прямоугольной пластины.

Достоинством дифференциальных уравнений (2.2), (2.3) является то, что они линейны и не связаны друг с другом. Кроме того, (2.3) имеет решение типа краевого эффекта. Это позволяет при исследовании некоторых частных задач приближенно полагать $\varphi=0$ и, таким образом, понижать общий порядок системы дифференциальных уравнений (2.2), (2.3) с восьми до шести. По форме записи (2.2)—(2.4) совпадают с уравнениями, построенными в [10] для трехслойных пластин с жестким трансверсально изотропным заполнителем. Этот результат имеет большое практическое значение, ибо показывает, что в идейном плане расчет многослойных пластин ничем не отличается от расчета трехслойных. Поэтому результаты, полученные для трехслойных пластин конечного прогиба, например, в [10], могут быть непосредственно использованы в проектном расчете многослойных пластин.

Так, для случая цилиндрического изгиба шарнирно опертой пластины, подверженной действию равномерной нагрузки q, решение задачи может быть записано в форме [10]

$$(2.5)\qquad \chi=\frac{q}{\alpha^2D}\left[\frac{\theta_2^2\operatorname{ch}\theta_1(a/2-\alpha_1)}{\theta_1^2(\theta_2^2-\theta_1^2)\operatorname{ch}(\theta_1a/2)}+\frac{\theta_1^2\operatorname{ch}\theta_2(a/2-\alpha_1)}{\theta_2^2(\theta_1^2-\theta_2^2)\operatorname{ch}(\theta_2a/2)}+\frac{1}{2}\alpha_1(a-\alpha_1)-\right.$$
$$\left.-\frac{1}{\theta_1^2}-\frac{1}{\theta_2^2}\right],\quad \theta_{1,2}=\left\{\frac{1+\alpha^2h^2/\beta\mp[(1+\alpha^2h^2/\beta)^2-4\theta\alpha^2h^2/\beta]^{1/2}}{2\theta h^2/\beta}\right\}^{1/2}.$$

Принимая в (2.5) параметр сдвига $\beta=\infty$, приходим к оригинальному решению И. Г. Бубнова [11], впервые полученному для однородной изотропной пластины в 1902 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Berger H. M.** A new approach to the analysis of large deflections of plates // J. Appl. Mech.— 1955.— V. 22, N 4.
2. **Григолюк Э. И., Куликов Г. М.** Об упрощенном методе решения нелинейных задач теории упругих пластин и оболочек // Некоторые прикладные задачи теории пластин и оболочек.— М.: Изд-во МГУ, 1981.
3. **Григолюк Э. И., Куликов Г. М.** Многослойные армированные оболочки.— М.: Машиностроение, 1988.
4. **Корнев В. М.** Об упрощенной модели нелинейной теории оболочек // Динамика сплошной среды/ ИГ СО АН СССР.— 1981.— Вып. 49.
5. **Андрианов И. В., Холод Е. Г.** О некоторых точных решениях в теории гибких пластин // ПМТФ.— 1988.— № 2.
6. **Терегулов И. Г.** Изгиб и устойчивость тонких пластин и оболочек при ползучести.— М.: Наука, 1969.
7. **Григолюк Э. И.** О выборе исходной поверхности в теории неоднородных оболочек // Изв. АН СССР. ОТН.— 1956.— № 8.
8. **Sathyamoorthy M., Pandalai K. A.** Nonlinear vibration of elastic skew plates exhibiting rectilinear orthotropy // J. Franklin Inst.— 1973.— V. 296, N 5.

9. **Григолюк Э. И., Куликов Г. М.** Приближенный анализ анизотропных трехслойных пластин конечного прогиба // Механика композит. материалов.— 1980.— № 1.
10. **Григолюк Э. И., Куликов Г. М.** Приближенный анализ нелинейных трансверсально-изотропных трехслойных пластин // Механика композит. материалов.— 1980.— № 2.
11. **Бубнов И. Г.** Напряжения в обшивке судов от давления воды // Труды по теории пластин.— М.: ГИТТЛ, 1953.

г. Москва, г. Тамбов *Поступила 13/I 1989 г.*

УДК 539.2

С. В. Мелешко

ДВОЙНЫЕ ВОЛНЫ В ИДЕАЛЬНОМ ЖЕСТКОПЛАСТИЧЕСКОМ ТЕЛЕ ПРИ ПЛОСКОЙ ДЕФОРМАЦИИ

Одним из методов получения точных решений систем дифференциальных уравнений с частными производными является метод вырожденного годографа. Широкое применение решений с вырожденным годографом в газовой динамике [1] позволяет надеяться на успешное приложение этого метода в теории пластичности. Суть метода состоит в понижении размерности независимых переменных путем наложения конечных связей между зависимыми переменными. Решения, получаемые таким способом, с точки зрения групповой классификации частично инвариантные [2]. В теории пластичности из решений с вырожденным годографом использовались простые волны систем с двумя независимыми переменными [3, 4]. Когда число независимых переменных больше двух, известны отдельные примеры построения простых [5] и двойных [6] волн в теории пластичности. В [6] сделана попытка подойти к решениям с вырожденным годографом с точки зрения обобщения бегущих волн и инвариантов Римана, когда число независимых переменных больше двух. Это привело к ограничительному условию на существование решения вида двойной волны (в смысле [6]). В данной работе дана полная классификация двойных волн с функциональным произволом уравнений движения идеального жесткопластического тела при плоской деформации

$$\rho\frac{\partial v_i}{\partial t}=\frac{\partial \sigma_{i\alpha}}{\partial x_\alpha},\quad \frac{\partial v_\alpha}{\partial x_\alpha}=0\quad (i=1,2), \tag{0.1}$$

$$\frac{\sigma_{11}-\sigma_{22}}{2\sigma_{12}}=\frac{\partial v_1/\partial x_1-\partial v_2/\partial x_2}{\partial v_1/\partial x_2+\partial v_2/\partial x_1},\quad (\sigma_{11}-\sigma_{22})^2+4\sigma_{12}^2=4k^2.$$

Здесь приняты обычные обозначения. По повторяющимся греческим индексам происходит суммирование от 1 до 2. Без ограничения общности можно считать $\rho = 1$.

После подстановки в уравнения (0.1) соотношений $\sigma_{11} = \sigma - k\sin 2\theta$, $\sigma_{22} = \sigma + k\sin 2\theta$, $\sigma_{12} = k\cos 2\theta$ получается система четырех дифференциальных уравнений относительно $\sigma(t, x_1, x_2)$, $\theta(t, x_1, x_2)$, $v_i(t, x_1, x_2)$ $(i = 1, 2)$:

$$\partial v_1/\partial t = \partial\sigma/\partial x_1 - 2k(\cos 2\theta\partial\theta/\partial x_1 + \sin 2\theta\partial\theta/\partial x_2), \tag{0.2}$$

$$\partial v_2/\partial t = \partial\sigma/\partial x_2 - 2k(\sin 2\theta\partial\theta/\partial x_1 - \cos 2\theta\partial\theta/\partial x_2),$$

$$\partial v_\alpha/\partial x_\alpha = 0,\ \partial v_2/\partial x_1 + \partial v_1/\partial x_2 - 2\,\mathrm{ctg}\, 2\theta\partial v_2/\partial x_2 = 0.$$

Из дальнейшего рассмотрения исключается тривиальный случай $\theta = \mathrm{const}$.

1. Пусть в двойной волне скорости v_1 и v_2 функционально независимы. Тогда в качестве параметров двойной волны можно взять переменные v_1 и v_2, т. е. положить

$$\sigma = \sigma(v_1, v_2),\ \theta = \theta(v_1, v_2). \tag{1.1}$$

После подстановки (1.1) в (0.2) получается переопределенная система четырех дифференциальных уравнений на две функции v_1, v_2 $(x \equiv x_1,\ x_2 \equiv y)$

$$\mathbf{v}_t + G_1\mathbf{v}_y = 0,\ \mathbf{v}_x + G_2\mathbf{v}_y = 0, \tag{1.2}$$