

УДК 539.3

## АНАЛИЗ ВЫПУЧИВАНИЯ ГИБКОГО СТЕРЖНЯ МЕТОДОМ БУБНОВА — ГАЛЕРКИНА

Н. С. Астапов

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, 630090 Новосибирск  
Новосибирский государственный университет, 630090 Новосибирск  
E-mail: nika@hydro.nsc.ru

При тестировании метода Бубнова — Галеркина на задаче о продольном изгибе однослойного упругого стержня выявлены причины ошибок, часто встречающихся в работах по устойчивости упругих систем. Получены уточненные формулы для максимального прогиба продольно сжатого шарнирно опертого трехслойного стержня.

Ключевые слова: метод Бубнова — Галеркина, гибкий стержень, продольный изгиб, формы выпучивания, максимальный прогиб.

**Введение.** Точная зависимость между нагрузкой  $P$ , продольно сжимающей гибкий упругий шарнирно опертый стержень длиной  $l$ , и прогибом  $f$  получена Эйлером в виде полного эллиптического интеграла первого рода [1. С. 441]

$$l = 2\sqrt{\frac{EI}{P}} \int_0^{\pi/2} \frac{d\psi}{\sqrt{1 - (f^2 P / (4EI)) \sin^2 \psi}}$$

и в виде ряда

$$l = \pi\sqrt{\frac{EI}{P}} \left\{ 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \frac{f^2 P}{4EI} + \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\right)^2 \left(\frac{f^2 P}{4EI}\right)^2 + \left(\frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}\right)^2 \left(\frac{f^2 P}{4EI}\right)^3 + \dots \right\}, \quad (1)$$

где  $EI$  — изгибная жесткость стержня. Равновесные закритические формы сжатых стержней впервые исследованы Лагранжем, а с применением таблиц эллиптических интегралов изучены в [2, 3]. Однако для практического использования приведенные в [2, 3] способы оказываются трудоемкими из-за необходимости вычисления величин, выраженных через эллиптические интегралы первого и второго рода. Этот факт является одной из причин поиска методов (решение линеаризованных дифференциальных уравнений, соответствующих исходным нелинейным уравнениям; аппроксимация эллиптических интегралов, выражающих точное решение, и др.) получения приближенных формул для прогибов и формы выпучивания стержня. Еще одной причиной обращения к задаче определения формы упругой линии является ее использование вследствие наличия точного решения в качестве тестовой задачи при построении эффективных приближенных решений.

**Способ Мизеса линеаризации дифференциального уравнения упругой линии.** В работе [4] предложен следующий способ вывода приближенных формул для прогибов стержня в зависимости от нагрузки. Представим дифференциальное уравнение упругой линии стержня в виде

$$\frac{d^2 y}{ds^2} + \frac{P}{EI} y \cos \theta = 0, \quad (2)$$

где  $\theta$  — угол между касательной и осью  $Ox$  (первоначально прямолинейной осью стержня);  $s$  — длина дуги упругой кривой. Принимая в первом приближении кривую прогиба в виде синусоиды

$$y = c \sin(\pi s/l) \quad (3)$$

и учитывая равенства  $\sin \theta = dy/ds = c\pi \cos(\pi s/l)/l$  и малость величины  $c$  относительно  $l$ , имеем

$$\cos \theta = \sqrt{1 - \left(\frac{c\pi}{l} \cos \frac{\pi s}{l}\right)^2} \approx 1 - \frac{\pi^2 c^2}{2l^2} \cos^2 \frac{\pi s}{l}. \quad (4)$$

Подставляя выражения (3), (4) в уравнение (2), находим

$$\frac{d^2 y}{ds^2} + \frac{P}{EI} y = \frac{\pi^2 c^3}{2l^2} \frac{P}{EI} \cos^2 \frac{\pi s}{l} \sin \frac{\pi s}{l}. \quad (5)$$

Заменяя в правой части (5) величину  $P/EI$  близкой к ней величиной  $\pi^2/l^2$  и проводя тригонометрические преобразования, получим

$$\frac{d^2 y}{ds^2} + \frac{P}{EI} y = \frac{\pi^4 c^3}{8l^4} \left( \sin \frac{\pi s}{l} + \sin \frac{3\pi s}{l} \right). \quad (6)$$

Найдем интеграл уравнения (6), удовлетворяющий граничным условиям  $y(0) = y(l) = 0$ :

$$y = c \sin(\pi s/l) + c_1 \sin(3\pi s/l)$$

( $c^2 = 8l^2(P/P_* - 1)/\pi^2$ ;  $P_* = EI(\pi/l)^2$  — критическая нагрузка Эйлера). С учетом приближенного равенства  $P/EI \approx (\pi/l)^2$  при  $P \approx P_*$   $c_1 \approx -(\pi/l)^2 c^3/64$ . Отметим, что в [5] такое же соотношение между коэффициентами  $c$  и  $c_1$  получено методом возмущений. Кроме того, в [4] Мизес указывает, что в точке  $s = l/2$  стержень имеет наибольший прогиб  $y_m = c - c_1$ , который с учетом малости коэффициента  $c_1$  по сравнению с коэффициентом  $c$  приближенно равен

$$y_m = c = \frac{\sqrt{8}l}{\pi} \sqrt{\frac{P}{P_*} - 1}. \quad (7)$$

**Об ошибках в работах по теории гибких стержней.** В работе [6. С. 561] коэффициент  $c_1$  приведен с неверным знаком:  $c_1 = c(P/P_* - 1)/8$ . В результате этой неточности в работах [7. С. 174; 8. С. 17; 9. С. 74; 10. С. 86; 11. С. 129] для наибольшего прогиба в зависимости от нагрузки получена ошибочная формула

$$f = \frac{2\sqrt{2}l}{\pi} \sqrt{\frac{P}{P_*} - 1} \left( 1 - \frac{1}{8} \left( \frac{P}{P_*} - 1 \right) \right), \quad (8)$$

однако из соотношений  $y_m = c - c_1$ ,  $cc_1 < 0$  и выражений для  $c$  и  $c_1$  следует

$$f = \frac{2\sqrt{2}l}{\pi} \sqrt{\frac{P}{P_*} - 1} \left( 1 + \frac{1}{8} \left( \frac{P}{P_*} - 1 \right) \right). \quad (9)$$

Следует отметить, что формула (9) является менее точной, чем формула (7), а необоснованная формула (8) точнее формулы (7).

В работе [12. С. 25] для коэффициента  $c_1$  ошибочно дано выражение  $c_1 = c\sqrt{P/P_* - 1}/8$ , хотя в [13. С. 66; 14. С. 636] приведено выражение  $c_1 = -c(P/P_* - 1)/8$  и утверждается, что формула (9) дает “хорошие результаты”.

Автор работы [1] показывает, что формула Мизеса (7) “уже содержится в более общем результате Эйлера”, в случае если в правой части (1) учитываются только первые два члена. Сохраняя в правой части (1) первые три члена, во втором приближении получим

$$\frac{f}{l} = \frac{2\sqrt{2}}{\pi} \sqrt{\frac{P}{P_*} - 1} \left( 1 - \frac{19}{16} \left( \frac{P}{P_*} - 1 \right) \right). \quad (10)$$

Далее, ссылаясь на работу [8] и критикуя формулу (8), автор работы [1. С. 443] приходит к заключению, что “приближенный вывод Мизеса, приводящий к правильной формуле первого приближения (7), оказывается недостаточным для получения формулы второго приближения” (10).

Сравнительный анализ аналогичных формул дан в [15], где для  $P/P_* \approx 1$  приводится менее точная, чем (10), формула

$$\frac{f}{l} = \frac{2\sqrt{2}}{\pi} \sqrt{\frac{P}{P_*} - 1} \left(1 - \frac{41}{64} \left(\frac{P}{P_*} - 1\right)\right),$$

полученная с помощью рядов в [2. С. 501]. “Устойчивость” формулы (7) проявилась и в работе [16. С. 245], где с использованием теории катастроф получено аналогичное, но неверное соотношение

$$P \approx P_*(1 + (3/8)(\pi f/l_1)^2),$$

предписывающее неустойчивое закритическое поведение стержня ( $l_1$  — расстояние между концами стержня). При выводе этого соотношения допущены следующие ошибки: 1) в выражении для полной потенциальной энергии стержня вместо  $l$  используется  $l_1$ ; 2) полагается, что величина  $l_1$  не зависит от прогиба стержня; 3) необоснованно отброшена часть членов одного порядка малости.

В учебнике [17. С. 356] для исследования малоизогнутых равновесных состояний стержня предложено следующее приближенное решение. В дифференциальном уравнении упругой линии стержня

$$\frac{d^2y}{ds^2} / \sqrt{1 - \left(\frac{dy}{ds}\right)^2} + \frac{P}{EI} y = 0 \quad (11)$$

выполним замену  $1/\sqrt{1 - (dy/ds)^2} = 1 + (dy/ds)^2/2 + 3(dy/ds)^4/8 + \dots \approx 1 + (dy/ds)^2/2$ . В результате получим

$$\frac{d^2y}{ds^2} \left(1 + \frac{1}{2} \left(\frac{dy}{ds}\right)^2\right) + \frac{P}{EI} y = 0.$$

Полагая, что при малых отклонениях форма оси стержня описывается одной полуволной синусоиды (3), и заменяя величину  $(dy/ds)^2/2$  ее средним значением на отрезке  $[0, l]$ , имеем

$$\frac{d^2y}{ds^2} \left(1 + \left(\frac{c\pi}{2l}\right)^2\right) + \frac{P}{EI} y = 0.$$

Отсюда с учетом равенства (3) находим  $P/P_* \approx 1 + c^2\pi^2/(4l^2)$ , следовательно,  $c/l \approx 2\sqrt{P/P_* - 1}/\pi$ . В результате получаем зависимость наибольшего прогиба стержня от нагрузки более грубую, чем формула (7).

С использованием способа Мизеса можно уточнить формулу (7), если, выполнив замену корня, от уравнения (11) перейти к приближенному уравнению

$$\frac{d^2y}{ds^2} \left(1 + \frac{1}{2} \left(\frac{dy}{ds}\right)^2 + \frac{3}{8} \left(\frac{dy}{ds}\right)^4\right) + \frac{P}{EI} y = 0. \quad (12)$$

Подставляя в (12) выражение (3) и проводя тригонометрические преобразования, получим

$$\begin{aligned} -\left(\frac{\pi}{l}\right)^2 \left[ \left(1 + \frac{1}{8} \left(\frac{c\pi}{l}\right)^2 + \frac{3}{64} \left(\frac{c\pi}{l}\right)^4\right) c \sin \frac{\pi s}{l} + \left(\frac{1}{8} \left(\frac{c\pi}{l}\right)^2 + \frac{9}{128} \left(\frac{c\pi}{l}\right)^4\right) c \sin \frac{3\pi s}{l} + \right. \\ \left. + \frac{3}{128} \left(\frac{c\pi}{l}\right)^4 c \sin \frac{5\pi s}{l} \right] + \frac{P}{EI} c \sin \frac{\pi s}{l} = 0. \end{aligned}$$

Формула прогиба	$f/l$							
	$\lambda = 1,002$	$\lambda = 1,020$	$\lambda = 1,100$	$\lambda = 1,200$	$\lambda = 1,300$	$\lambda = 1,400$	$\lambda = 1,500$	$\lambda = 2,000$
(7)	0,040 263	0,127 32	0,2847	0,403	0,493	—	—	—
(8)	0,040 253	0,127 01	0,2811	0,393	0,475	—	—	—
(10)	0,040 168	0,124 30	0,2509	0,307	0,317	0,299	0,259	—
(13)	0,040 144	0,123 86	0,2555	0,338	0,393	0,436	0,472	—
(16)	0,040 183	0,124 83	0,2588	0,336	0,379	0,407	0,424	0,450
(20)	0,040 168	0,124 37	0,2545	0,325	0,364	0,387	0,401	0,418
Точное решение	0,040 168	0,124 37	0,2543	0,324	0,361	0,382	0,394	0,398

Далее, приравнивая к нулю коэффициент при  $\sin(\pi s/l)$ , имеем

$$\frac{3}{64} \left( \frac{c\pi}{l} \right)^4 + \frac{1}{8} \left( \frac{c\pi}{l} \right)^2 - (\lambda - 1) = 0,$$

где  $\lambda = P/P_*$ . Отсюда находим более точную, чем (7) и (8), формулу

$$\frac{f}{l} = \frac{c}{l} = \frac{2}{\pi\sqrt{3}} \sqrt{\sqrt{1 + 12(\lambda - 1)} - 1}, \quad (13)$$

которая, как показано в таблице, при  $\lambda \geq 1,1$  является и более точной, чем формула (10).

В таблице для нагрузки  $\lambda = P/P_*$ ,  $1,002 \leq \lambda \leq 2,000$  приведены значения максимального прогиба стержня  $f$ , отнесенного к его длине  $l$ , вычисленные по формулам, номера которых указаны в левом столбце. В нижней строке таблицы приведены значения относительного прогиба стержня  $f/l$ , вычисленные с указанной точностью с помощью полного эллиптического интеграла первого рода. Прочерки в таблице соответствуют значениям  $f/l$ , не имеющим физического смысла, например  $f/l < 0$  или  $f/l > 0,5$ .

Используя разложение корней, из (13) можно вывести ряд более грубых (как показывают расчеты) формул:

$$\begin{aligned} \frac{2}{\pi\sqrt{3}} \sqrt{\sqrt{1 + 12(\lambda - 1)} - 1} &\approx \frac{2\sqrt{2}}{\pi} \sqrt{\frac{6(\lambda - 1) - (12(\lambda - 1))^2/8}{6}} = \\ &= \frac{2\sqrt{2}}{\pi} \sqrt{\lambda - 1} \sqrt{4 - 3\lambda} \approx \frac{2\sqrt{2}}{\pi} \sqrt{\lambda - 1} \left( 1 - \frac{24}{16} (\lambda - 1) \right). \end{aligned}$$

**Применение метода Бубнова — Галеркина.** Для вывода формулы (7) Мизес использовал, по сути, метод Бубнова — Галеркина. Однако, уточняя с помощью выражения  $y_m = c - c_1$  формулу (7), необходимо вычислить коэффициент  $c_1$  и, удерживая в ряду члены такого же порядка малости, уточнить коэффициент  $c$ . Действительно, в дифференциальном уравнении (2) упругой линии стержня

$$\frac{d^2 y}{ds^2} + \frac{P}{EI} y \sqrt{1 - \left( \frac{dy}{ds} \right)^2} = 0$$

заменяем корень разложением в ряд

$$\sqrt{1 - \left( \frac{dy}{ds} \right)^2} = 1 - \frac{1}{2} \left( \frac{dy}{ds} \right)^2 - \frac{1}{8} \left( \frac{dy}{ds} \right)^4 - \dots$$

и перенесем нелинейные члены в его правую часть. Получаем

$$\frac{d^2 y}{ds^2} + \frac{P}{EI} y = \frac{P}{EI} y \left( \frac{1}{2} \left( \frac{dy}{ds} \right)^2 + \frac{1}{8} \left( \frac{dy}{ds} \right)^4 + \dots \right). \quad (14)$$

Подставляя в (14) выражение (3) и учитывая в правой части лишь первые два нелинейных члена, имеем

$$\left(-\left(\frac{\pi}{l}\right)^2 + \frac{P}{EI}\right)c \sin \frac{\pi s}{l} = \frac{P}{EI}c \left[ \left(\frac{1}{8}\left(\frac{c\pi}{l}\right)^2 + \frac{1}{64}\left(\frac{c\pi}{l}\right)^4\right) \sin \frac{\pi s}{l} + \left(\frac{1}{8}\left(\frac{c\pi}{l}\right)^2 + \frac{3}{128}\left(\frac{c\pi}{l}\right)^4\right) \sin \frac{3\pi s}{l} + \frac{1}{128}\left(\frac{c\pi}{l}\right)^4 \sin \frac{5\pi s}{l} \right]. \quad (15)$$

Приравнявая в (15) коэффициенты при  $\sin(\pi s/l)$ , для определения зависимости прогиба от нагрузки получаем

$$-\left(\frac{\pi}{l}\right)^2 + \frac{P}{EI} = \frac{P}{EI} \left( \frac{1}{8}\left(\frac{c\pi}{l}\right)^2 + \frac{1}{64}\left(\frac{c\pi}{l}\right)^4 \right),$$

или  $z^2 + z = p = (\lambda - 1)/\lambda$ , где  $z = (c\pi/l)^2/8$ ;  $\lambda = P/P_* \geq 1$ . Отсюда находим  $z = (-1 + \sqrt{1 + 4p})/2 \approx (-1 + 1 + 4p/2 - (4p)^2/8)/2 = p(1 - p)$ . Следовательно,

$$\frac{f}{l} = \frac{c}{l} = \frac{\sqrt{8p(1-p)}}{\pi} = \frac{2\sqrt{2}}{\pi\lambda} \sqrt{\lambda - 1}. \quad (16)$$

Заметим, что в [18] формула (16) получена иным путем (с помощью квадратичной паде-аппроксимации точного решения) и отличается от (7) лишь множителем  $\lambda$  в знаменателе.

Итак, считая, что стержень принимает форму одной полуволны синусоиды (3), и пренебрегая коэффициентом  $c_1$ , получаем более точную, чем (7), (8), формулу (16), которая при  $\lambda \geq 1,2$  (см. таблицу) также точнее формул (10), (13). Причем формула (16) оказалась более точной, чем формула (13), несмотря на то что в представлении корня в исходном дифференциальном уравнении и в представлении обратной величины корня в уравнении (11) использовалось одинаковое количество членов ряда. Главная причина такого различия заключается в следующем. Так как при  $z \neq 0$

$$(1 + z^2/2 + 3z^4/8)(1 - z^2/2 - z^4/8) = 1 - z^6/4 - 3z^8/64 < 1,$$

то при  $0 < |z| < 1$  имеем  $(1 + z^2/2 + 3z^4/8) < 1/(1 - z^2/2 - z^4/8)$ . Следовательно,

$$0 < \frac{1}{\sqrt{1 - z^2}} - \frac{1}{1 - z^2/2 - z^4/8} < \frac{1}{\sqrt{1 - z^2}} - (1 + z^2/2 + 3z^4/8),$$

$$\sqrt{1 - z^2} - \frac{1}{1 + z^2/2 + 3z^4/8} < \sqrt{1 - z^2} - (1 - z^2/2 - z^4/8) < 0.$$

Поэтому и в числителе, и в знаменателе корень  $\sqrt{1 - z^2}$  целесообразно заменять выражением  $1 - z^2/2 - z^4/8$ , а не выражением  $1/(1 + z^2/2 + 3z^4/8)$ . В рассматриваемом случае можно предположить, что соотношение

$$\frac{d^2y}{ds^2} + \frac{P}{EI}y = \frac{P}{EI}y \left( \frac{1}{2}\left(\frac{dy}{ds}\right)^2 + \frac{1}{8}\left(\frac{dy}{ds}\right)^4 \right) \quad (17)$$

более точно, чем уравнение (12), приближает исходное уравнение (11).

Для того чтобы уточнить формулу (16), будем полагать, что стержень принимает форму, описываемую линейной комбинацией двух синусоид с последовательными нечетными числами полуволн:

$$y = c \sin(\pi s/l) + d \sin(3\pi s/l). \quad (18)$$

Дифференциальный оператор  $(\cdot)((\cdot)'^2/2 + (\cdot)^4/8)$  преобразует (18) в выражение

$$y\left(\frac{y'^2}{2} + \frac{y^4}{8}\right) = \left(\frac{\pi^2}{8l^2}(c^2 - 5cd + 18d^2) + \frac{\pi^4}{128l^4}(2c^4 - 9c^3d + 108c^2d^2 - 270cd^3 + 486d^4)\right)c \sin \frac{\pi s}{l} + \\ + \left(\frac{\pi^2}{8l^2}(c^3 + 2c^2d + 9d^3) + \frac{3\pi^4}{128l^4}(2c^5 + 2c^4d + 22c^3d^2 + 36c^2d^3 + 54d^5)\right) \sin \frac{3\pi s}{l},$$

в котором отброшена линейная комбинация синусоид с числом полуволн более трех. Таким образом, подставляя в (17) выражение (18) и приравнявая коэффициенты при  $\sin(\pi s/l)$  и  $\sin(3\pi s/l)$ , для определения коэффициентов  $c$  и  $d$  по данной нагрузке  $P$  получим систему нелинейных алгебраических уравнений. Обозначая  $a = \pi c/l$ ,  $b = \pi d/l$  и  $\lambda = P/P_*$ , для определения  $a$  и  $b$  через  $\lambda$  имеем следующую систему уравнений:

$$\frac{\lambda - 1}{\lambda} = \frac{a^2 - 5ab + 18b^2}{8} + \frac{2a^4 - 9a^3b + 108a^2b^2 - 270ab^3 + 486b^4}{128}, \\ \frac{\lambda - 9}{\lambda} b = \frac{a^3 + 2a^2b + 9b^3}{8} + 3 \frac{a^5 + 2a^4b + 22a^3b^2 + 36a^2b^3 + 54b^5}{128}.$$

Исключая из второго уравнения  $\lambda$  и отбрасывая члены более высокого порядка малости, получим

$$a^4/8 + 18b^2 - 5ab + a^2 - 8p = 0, \\ a^3 - 7a^2b + 45ab^2 - 153b^3 + 64b = 0, \quad (19)$$

где  $p = (\lambda - 1)/\lambda$ . Подставляя в первое уравнение системы (19) приближенное выражение  $b \approx -a^3/64$ , следующее из второго уравнения, получим соотношение  $a^4/8 + 18(a^3/64)^2 + 5a^4/64 + a^2 - 8p = 0$ , из которого в свою очередь следует приближенное уравнение  $13a^4 + 64(a^2 - 8p) = 0$ . Отсюда имеем  $a^2 = (-32 + 32\sqrt{1 + 13p/2})/13 \approx 8p - 13p^2$ ,  $a \approx 2\sqrt{2p}(1 - 13p/16)$  и, следовательно,

$$a - b \approx a(1 + a^2/64) \approx 2\sqrt{2p}(1 - 13p/16)(1 + p/8) \approx 2\sqrt{2p}(1 - 11p/16),$$

т. е. наибольший относительный прогиб стержня приближенно равен

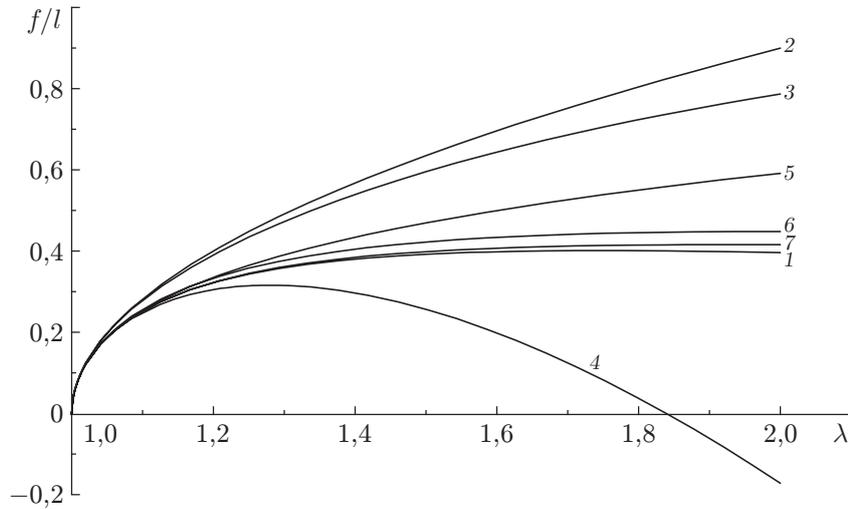
$$\frac{f}{l} = \frac{c - d}{l} = \frac{2\sqrt{2}}{\pi} \sqrt{\frac{\lambda - 1}{\lambda}} \left(1 - \frac{11}{16} \frac{\lambda - 1}{\lambda}\right). \quad (20)$$

Расчеты показывают (см. таблицу), что в диапазоне  $1 \leq \lambda \leq 2$  формула (20) оказывается наиболее точной среди приведенных приближенных формул. Наибольшая относительная погрешность формулы (20) имеет место при  $\lambda = 2$  и не превышает 5 %, что вполне допустимо с инженерной точки зрения. При нагрузке  $\lambda \approx 1,75$  прогиб стержня достигает максимума  $f_{\max} \approx 0,403$ , при  $\lambda \approx 2,18$  стержень образует петлю. Однако следует отметить, что в отличие от формулы (20) формула (16) качественно лучше описывает зависимость нагрузки от прогиба. Действительно, вычисляя прогиб по формуле (16), получим  $f/l \rightarrow 0$  при  $\lambda \rightarrow \infty$ , что в отличие от зависимости  $f/l \rightarrow 5\sqrt{2}/(8\pi) \neq 0$  при  $\lambda \rightarrow \infty$  для формулы (20) соответствует механическому содержанию задачи.

На рисунке показаны точная зависимость относительного прогиба середины стержня  $f/l$  от нагрузки  $\lambda$  (кривая 1) и зависимости, построенные по приближенным формулам.

**Выпучивание трехслойного стержня.** Нелинейное дифференциальное уравнение равновесия упругой линии продольно сжатого шарнирно опертого трехслойного стержня запишем в виде [19. С. 47]

$$\left(1 - ht \frac{d^2}{ds^2}\right) \frac{d^2}{ds^2} \left(\frac{d^2 y}{ds^2} / \sqrt{1 - \left(\frac{dy}{ds}\right)^2}\right) + \frac{N}{D} \left(1 - h \frac{d^2}{ds^2}\right) \frac{d^2 y}{ds^2} = 0, \quad (21)$$



Зависимость относительного прогиба стержня  $f/l$  от нагрузки  $\lambda$ :

1 — точное решение; 2–7 — решения, полученные по приближенным формулам (2 — формула (7); 3 — формула (8); 4 — формула (10); 5 — формула (13); 6 — формула (16); 7 — формула (20))

где  $N$  — параметр нагрузки;  $y(s)$  — прогиб стержня; параметры  $D$  (минимальная изгибная жесткость стержня),  $h$  и  $t$  полностью характеризуют структуру трехслойного стержня при сопротивлении изгибу [19. С. 21]. Заметим, что в случае если толщина слоя с наполнителем равна нулю (для однослойного стержня),  $h = 0$  и уравнение (21) совпадает с дважды продифференцированным уравнением (11). Разлагая в (21) обратную величину корня в ряд и учитывая первые три члена этого ряда, получим

$$\left(1 - ht \frac{d^2}{ds^2}\right) \frac{d^2}{ds^2} \left\{ \frac{d^2 y}{ds^2} \left[ 1 + \frac{1}{2} \left(\frac{dy}{ds}\right)^2 + \frac{3}{8} \left(\frac{dy}{ds}\right)^4 \right] \right\} + \frac{N}{D} \left(1 - h \frac{d^2}{ds^2}\right) \frac{d^2 y}{ds^2} = 0. \quad (22)$$

Подставляя в (22) выражение (3), проводя тригонометрические преобразования и приравнявая к нулю коэффициент при  $\sin(\pi s/l)$ , имеем

$$3k^3(1 + kht)c^4 + 8k^2(1 + kht)c^2 + 64k(1 + kht) - 64(1 + kh)N/D = 0,$$

или

$$3k^2c^4 + 8kc^2 - 64(\lambda - 1) = 0,$$

где  $k = (\pi/l)^2$ ;  $\lambda = N/N_*$ ;  $N_* = Dk(1 + kht)/(1 + kh)$  — эйлерова критическая сила [19]. Окончательно для максимального относительного прогиба  $f/l$  получаем, по сути, формулу для однородных стержней (13)

$$\frac{f}{l} = \frac{c}{l} = \frac{2}{\pi\sqrt{3}} \sqrt{\sqrt{1 + 12(\lambda - 1)} - 1},$$

уточняющую формулу (1.219) из работы [19. С. 48]. Однако в данной формуле эйлерова нагрузка  $N_*$  зависит от параметров, характеризующих сдвиг наполнителя и структуру стержня.

В предположении, что форма оси стержня описывается линейной комбинацией двух синусов (18) с последовательными нечетными числами полуволен, для определения ко-

эффицентов  $c$  и  $d$  по данной нагрузке  $N$  имеем следующую систему двух нелинейных алгебраических уравнений:

$$\begin{aligned} 3a^4 + 8a^2 + 24ab - 64(\lambda - 1) &= 0, \\ 9a^5 + 16a^3 + 288a^2b + 1152b - 128b\lambda \frac{(1 + kht)(1 + 9kh)}{(1 + kh)(1 + 9kht)} &= 0. \end{aligned} \quad (23)$$

Здесь  $a = \pi c/l$ ;  $b = \pi d/l$ ;  $\lambda = N/N_*$ ;  $N_* = Dk(1 + kht)/(1 + kh)$ ;  $k = (\pi/l)^2$ . Полагая, что во втором уравнении системы (23) дробь приближенно равна 1,  $\lambda \approx 1$ , и отбрасывая члены более высокого по сравнению с  $a^3$  порядка малости, имеем приближенное уравнение  $16a^3 + 1152b - 128b = 0$ . Отсюда находим выражение  $b \approx -a^3/64$ , подставляя которое в первое уравнение системы (23), получаем  $21a^4 + 64a^2 - 512(\lambda - 1) = 0$ . Таким образом,

$$\begin{aligned} a^2 &= \frac{16\sqrt{2}}{21} (\sqrt{21\lambda - 19} - \sqrt{2}) \approx \\ &\approx \frac{16\sqrt{2}}{21} \sqrt{2} \left( \frac{21}{4} (\lambda - 1) - \frac{21^2}{32} (\lambda - 1)^2 \right) = 8(\lambda - 1) - 21(\lambda - 1)^2. \end{aligned}$$

В этом случае для максимального относительного прогиба стержня имеем

$$\begin{aligned} \frac{f}{l} &= \frac{c - d}{l} = \frac{a - b}{\pi} \approx \frac{a(1 + a^2/64)}{\pi} \approx \\ &\approx \frac{2\sqrt{2}\sqrt{\lambda - 1}}{\pi} \sqrt{1 - \frac{21}{8}(\lambda - 1)} \left( 1 + \frac{1}{8}(\lambda - 1) \right) \approx \frac{2\sqrt{2}\sqrt{\lambda - 1}}{\pi} \left( 1 - \frac{19}{16}(\lambda - 1) \right). \end{aligned}$$

Итак, учитывая все члены одного порядка малости, в случае максимального прогиба трехслойного стержня можно получить формулу для однородных стержней (10). Заметим, что для однослойного стержня ( $h = 0$ ) все предыдущие расчеты существенно упрощаются, в частности, во втором уравнении системы (23) дробь точно равна единице.

**Заключение.** Использование метода Бубнова — Галеркина при решении нелинейных дифференциальных уравнений приводит к значительным затруднениям, так как возникает необходимость решения системы нелинейных алгебраических уравнений. Однако на примере описания закритического поведения сжатого гибкого стержня показано, что при удачном выборе координатных функций для представления решения и корректном упрощении нелинейной алгебраической системы уравнений с учетом всех величин одного порядка малости использование метода Бубнова — Галеркина позволяет получить формулы более точные, чем формулы, получаемые с помощью других методов. Таким образом выведены уточненные выражения для максимального прогиба трехслойного стержня.

## ЛИТЕРАТУРА

1. **Николай Е. Л.** О работах Эйлера по теории продольного изгиба // Труды по механике. М.: Гостехтеоретиздат, 1955.
2. **Крылов А. Н.** О формах равновесия сжатых стоек при продольном изгибе // Избр. тр. М.: Изд-во АН СССР, 1958.
3. **Попов Е. П.** Теория и расчет гибких упругих стержней. М.: Наука, 1986.
4. **Mises R.** Ausbiegung eines auf Knicken beanspruchten Stabes // Z. angew Math. Mech. 1924. Bd 4. S. 435–436.
5. **Астапов Н. С.** Закритическое поведение стержня // Динамика сплошной среды: Сб. науч. тр. / АН СССР. Сиб. отд-ние. Ин-т гидродинамики. 1989. Вып. 92. С. 14–21.

6. Тимошенко С. П. Проблемы упругой устойчивости // Устойчивость стержней, пластин и оболочек: Избр. тр. / Под ред. Э. И. Григолюка. М.: Наука, 1971.
7. Тимошенко С. П. Сопротивление материалов. Л.; М.: Гостехтеоретиздат, 1932. Ч. 2.
8. Тимошенко С. П. Вопросы устойчивости упругих систем. Л.: Кубуч, 1935.
9. Тимошенко С. П. Устойчивость упругих систем. М.; Л.: ОГИЗ, 1946.
10. Тимошенко С. П. Устойчивость упругих систем. 2-е изд. М.: Гостехтеоретиздат, 1955.
11. Тимошенко С. П. Сопротивление материалов. М.: Наука, 1965. Т. 2.
12. Динник А. Н. Избранные труды. Киев: Изд-во АН УССР, 1956. Т. 3.
13. Динник А. Н. Продольный изгиб. М.; Л.: ГОНТИ, 1939.
14. Справочник по технической механике / Под ред. А. Н. Динника. М.: ОГИЗ: Гостехтеоретиздат, 1949.
15. Астапов Н. С. Приближенные формулы для прогибов сжатых гибких стержней // ПМТФ. 1996. Т. 37, № 4. С. 135–138.
16. Гилмор Р. Прикладная теория катастроф. М.: Мир, 1984. Кн. 1.
17. Терегулов И. Г. Сопротивление материалов и основы теории упругости и пластичности: Учеб. для студентов вузов. М.: Высш. шк., 1984.
18. Астапов И. С., Астапов Н. С., Васильева Е. Л. Квадратичная аппроксимация больших перемещений гибкого сжатого стержня // Изв. РАН. Механика твердого тела. 2003. № 1. С. 164–171.
19. Григолюк Э. И. Устойчивость и колебания трехслойных оболочек / Э. И. Григолюк, П. П. Чулков. М.: Машиностроение, 1973.

*Поступила в редакцию 14/XII 2005 г.,  
в окончательном варианте — 29/I 2007 г.*

---