

УДК 517.9, 519.6

Численный алгоритм расчета амплитуды волны цунами*

С.И. Кабанихин^{1,2}, О.И. Криворотко^{1,2}

¹Институт вычислительной математики и математической геофизики Сибирского отделения Российской академии наук, просп. Акад. М.А. Лаврентьева, 6, Новосибирск, 630090

²Новосибирский государственный университет, ул. Пирогова 2, Новосибирск, 630090
E-mails: ksi52@mail.ru (Кабанихин С.И.), krivorotko.olya@mail.ru (Криворотко О.И.)

Кабанихин С.И., Криворотко О.И. Численный алгоритм расчета амплитуды волны цунами // Сиб. журн. вычисл. математики / РАН. Сиб. отд-ние. — Новосибирск, 2016. — Т. 19, № 2. — С. 153–165.

Предложен численный алгоритм расчета амплитуды волнового фронта волны цунами, состоящий из нескольких этапов, первым из которых является решение соответствующего уравнения эйконала. Для решения уравнения эйконала использовались подход С.К. Годунова и метод бихарактеристик. Проведено качественное сравнение двух методов на модельных данных. На втором этапе введены новые переменные, связанные с решением уравнения эйконала. На третьем этапе, используя разложение фундаментального решения в новых переменных, получено уравнение меньшей размерности, которое описывает поведение амплитуды переднего фронта волны. Приведены результаты численных расчетов.

DOI: 10.15372/SJNM20160203

Ключевые слова: уравнения мелкой воды, амплитуда фронта, фундаментальное решение, уравнение эйконала, конечно-разностный метод.

Kabanikhin S.I., Krivorotko O.I. A numerical algorithm for computing tsunami wave amplitude // Siberian J. Num. Math. / Sib. Branch of Russ. Acad. of Sci. — Novosibirsk, 2016. — Vol. 19, № 2. — P. 153–165.

A numerical algorithm for computing tsunami wave front amplitude is proposed. The first step consists in solving an appropriate eikonal equation. The eikonal equation is solved by the Godunov approach and the bicharacteristic method. The qualitative comparison of the two above methods is described. Then a change in variables associated with the eikonal solution is introduced. At the last step, using the expansion of the fundamental solution of shallow water equations in the sum of singular and regular parts, we obtain the Cauchy problem for the wave amplitude. This approach allows one to reduce computer costs. The numerical results are presented.

Keywords: shallow water equations, tsunami amplitude, fundamental solution, eikonal equation, finite difference approach.

1. Введение

В открытом океане высота волны цунами редко превышает один метр, а длина волны (расстояние между гребнями) достигает сотен километров, что определяет размеры расчетной области. В работе предложен численный алгоритм, позволяющий вычислить амплитуду фронта волны, приходящей в заданную точку (x_0, y_0) , а также время прихода волны, решая задачу не во всей заданной области, а лишь на выделенной характеристической поверхности. Предложенный алгоритм основан на кинематическом подходе и аналитическом представлении фундаментального решения системы линейных уравнений мелкой воды.

*Работа поддержана Министерством образования и науки Российской Федерации и Российским фондом фундаментальных исследований (проекты № 15-01-09230 и № 16-31-00189).

Подход к построению теоретических решений в задаче цунами для модели с постоянной глубиной был предложен С.С. Войтом и Б.И. Себекиным в 1968 году [1], основанный на построении и изучении передаточных функций, представляющих собой отклик океана на определенное эталонное воздействие. В.М. Бабич [2] разработал пространственно-временной лучевой метод, являющийся фундаментальной физической теорией, с помощью которого было получено выражение для амплитуды переднего фронта волны цунами в случае “слабо меняющегося” дна с учетом каустик. В работе [3] предложен асимптотический метод определения амплитуды волнового фронта, основанный на применении обобщенной конструкции канонического оператора В.П. Маслова [4]. В работе Ан.Г. Марчука и Г.С. Васильева [5] разработан метод оценки высоты цунами для горизонтального и наклонного дна, основанный на кинематическом подходе. В работе В.С. Косых, Л.Б. Чубарова и соавторов [6] исследована методика расчета максимальных высот волн цунами при реальных данных. В случае произвольного дна в данной работе приведен алгоритм определения амплитуды переднего фронта волны, основанный на выявлении свойств фундаментального решения системы уравнений мелкой воды.

В пункте 2 сформулирована задача определения амплитуды переднего фронта волны цунами. В п. 3 приведены замена переменных и полученная задача Коши определения амплитуды переднего фронта волны. В п. 4 продемонстрированы методы решения возникающего в алгоритме уравнения эйконала, а именно подход С.К. Годунова и метод бихарактеристик. Приведены результаты численных расчетов сравнения двух подходов решения уравнения эйконала. В п. 5 приведены результаты численного определения амплитуды переднего фронта волны.

2. Постановка задачи

Одна из наиболее важных задач математического моделирования волн цунами является оценка высоты волны в то время, когда волна цунами подходит к береговой линии. Существуют, как минимум, два метода решения этой проблемы. А именно, формула Эри-Грина [7] в одномерном случае $S(x) = S(0) \sqrt[4]{H(0)/H(x)}$ и вычисление функции трех переменных $\eta(x, y, t)$, являющейся решением начально-краевой задачи для гиперболического уравнения, полученного из линейных уравнений мелкой воды [8]:

$$\begin{cases} \eta_{tt} = \operatorname{div}(gH(x, y)\operatorname{grad} \eta), & (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad t > 0; \\ \eta|_{t=0} = 0, \quad \eta_t|_{t=0} = h(y)\delta(x), & (x, y) \in \mathbb{R}^2. \end{cases} \quad (1)$$

Здесь $\eta(x, y, t)$ — отклонение водной поверхности от состояния покоя, $H(x, y) \geq H_0 > 0$ — функция, описывающая рельеф дна, $g = 9.8 \text{ м/с}^2$ — ускорение свободного падения, $h(y)\delta(x)$ — источник возмущения, $\delta(x)$ — дельта-функция Дирака и $h(y)$ — достаточно гладкая функция.

Основная проблема моделирования цунами — большие размеры вычислительной области. В следующем пункте будет предложен численный алгоритм, позволяющий находить амплитуду $S(x, y)$ переднего фронта волны, порожденной линейным источником, лишь на характеристической поверхности $t = z$. Здесь $z = \tau(x, y)$ — новая переменная, $\tau(x, y)$ — решение задачи Коши для уравнения эйконала.

3. Замена переменных

Задача Коши (1) может быть сведена к задаче на полуплоскости [9]:

$$\begin{cases} \eta_{tt} = \operatorname{div}(gH(x, y)\operatorname{grad} \eta), & x > 0, \quad y \in \mathbb{R}, \quad t \in \mathbb{R}, \\ \eta|_{t < 0} = 0, \quad \eta_x|_{x=0} = h(y)\delta(t), & y \in \mathbb{R}, \quad t \in \mathbb{R}. \end{cases} \quad (2)$$

Основная идея вычисления амплитуды движущейся волны цунами для задачи (2) состоит в замене переменных $z = \tau(x, y)$ [10]. Здесь $\tau(x, y)$ — решение задачи Коши для уравнения эйконала

$$\tau_x^2 + \tau_y^2 = (gH(x, y))^{-1}, \quad \tau(0, y) = 0, \quad x > 0, \quad y \in \mathbb{R}, \quad (3)$$

для однозначности решения которой полагаем $\tau_x(0, y) = (gH(x, y))^{-1/2}$. Здесь $\sqrt{gH(x, y)}$ — скорость распространения волн цунами в рамках теории мелкой воды в линейном приближении. Мы предполагаем, что отображения $z = \tau(x, y)$ и $x = x(z, y)$ являются взаимно обратными и однозначными функциями [11–13]. Более того, предполагается, что $z = \tau(x, y)$ и $x = x(z, y)$ — дважды непрерывно дифференцируемые функции. Это условие выполнено по крайней мере в некоторой окрестности точки $x \in (0, \varepsilon)$, поскольку якобиан отображения $J[z, y](0, y) = \tau_x(0, y) > 0$. Также потребуем выполнения условия $g\tau_y^2(x, y)H(x, y) < 1$ единственности решения задачи Коши (3).

Используем замену переменных $v(z, y, t) = \eta(x, y, t)$ и $b(z, y) = \sqrt{gH(x, y)}$ и перепишем задачу (2) в следующем виде:

$$\begin{cases} v_{tt} = v_{zz} + b^2 v_{yy} + A_1 v_{zy} + A_2 v_z + A_3 v_y, & z > 0, \quad y \in \mathbb{R}, \quad t \in \mathbb{R}, \\ v|_{t=0} = 0, \quad v_z|_{z=0} = g(y)\delta(t), & y \in \mathbb{R}, \quad t \in \mathbb{R}. \end{cases} \quad (4)$$

Здесь $A_1 = 2b^2\tau_y$, $A_2 = b^2(\tau_{xx} + \tau_{yy}) + 2(\frac{b_z}{b} + bb_y\tau_y)$, $A_3 = 2b(b_z\tau_y + b_y)$, $g(y) = h(y)(b^{-2}(0, y) - \tau_y^2(0, y))^{-1/2}$.

Особенность полученной задачи (4) состоит в том, что коэффициенты при вторых производных v_{tt} и v_{zz} равны единице, что позволяет представить решение задачи (4) в виде [14]:

$$v(z, y, t) = S(z, y)\theta(t - z) + \tilde{v}(z, y, t). \quad (5)$$

Здесь $\tilde{v}(z, y, t)$ — гладкая функция, $\theta(t - z)$ — тэта-функция Хевисайда. Такой подход был применен С.И. Кабанихиным при решении задачи акустики в 1988 году [10].

Подставляя выражение (5) в систему (4) и приравнявая коэффициенты перед $\delta(t - z)$, получим задачу Коши для амплитуды $S(z, y)$ переднего фронта волны цунами:

$$\begin{cases} 2S_z + A_1 S_y + A_2 S = 0, & z > 0, \quad y \in \mathbb{R}; \\ S(0, y) = g(y), & y \in \mathbb{R}. \end{cases} \quad (6)$$

Если все функции, входящие в задачу Коши (6), не зависят от переменной y (одномерный случай), то задача (6) имеет следующее решение [8]:

$$S(z) = S(0) \sqrt[4]{H(0)/H(z)}. \quad (7)$$

Выражение (7) для амплитуды $S(z)$ движущейся волны цунами согласуется с хорошо известной формулой Эри-Грина [7]: амплитуда волны цунами S возрастает, в то время как глубина H уменьшается. Возвращаясь к переменным (x, t) , получим представление решения $\eta(x, t) = v(z, t) = \sqrt{gH(0)} \sqrt[4]{H(0)/H(x)} \theta(t - \int_0^x (gH(\lambda))^{-1/2} d\lambda) + \tilde{v}(x, t)$, и, следовательно, выражение для определения амплитуды переднего фронта волны $S(x) = S(0) \sqrt[4]{H(0)/H(x)}$.

Замечание. Источник вида $h(y)\delta(t)$ в задаче (2) может быть представлен в виде ряда точечных источников, в силу чего решение задачи Коши для уравнения эйконала (3) сводится к решению уравнения эйконала с условием $\tau(x, y) = O(|x - x_0|)$ для каждого точечного источника (данный подход был предложен в работе [15]).

4. Численные алгоритмы решения задачи Коши для уравнения эйконала

Уравнение эйконала применяется во многих разделах геометрической оптики, акустики, электроники, механики при определении линий, вдоль которых распространяются волны различной физической природы.

Рассмотрим начальную задачу для уравнения эйконала:

$$\tau_x^2 + \tau_y^2 = c^{-2}(x, y), \quad \tau(x_0, y_0) = 0, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2. \quad (8)$$

Здесь $c(x, y) = \sqrt{gH(x, y)}$ — скорость распространения волн цунами в среде, $\tau(x, y)$ означает время, за которое возмущение из точки (x_0, y_0) достигнет точки (x, y) , (x_0, y_0) — координата точечного источника волн.

В данном пункте будут представлены два подхода численного решения задачи (8): метод бихарактеристик [14, 16] и подход С.К. Годунова [16–18].

4.1. Метод бихарактеристик

Опишем метод, наиболее часто использующийся при решении задачи Коши (8) для уравнения эйконала [14, 19–21].

Введем в рассмотрение функцию $r(x, y) = 1/c(x, y)$ и вектор $\mathbf{p} = (p_1, p_2) = (\tau_x, \tau_y)$. Дифференцируя уравнение эйконала $|\mathbf{p}|^2 = r^2(x, y)$ по x и y , получим

$$\mathbf{p}\mathbf{p}_x = rr_x, \quad \mathbf{p}\mathbf{p}_y = rr_y. \quad (9)$$

Из определения вектора \mathbf{p} следует, что $(p_1)_y = (p_2)_x$ и, значит, (9) можно привести к виду

$$\mathbf{p}\nabla p_1 = rr_x, \quad \mathbf{p}\nabla p_2 = rr_y. \quad (10)$$

Разделим (10) на $r^2(x, y)$ и перепишем вдоль кривых $\frac{dx}{dt} = p_1 r^{-2}(x, y)$, $\frac{dy}{dt} = p_2 r^{-2}(x, y)$. Запишем сначала $\frac{dp_1}{dt}$ вдоль кривой $\frac{dx}{dt} = p_1 r^{-2}(x, y)$:

$$\frac{dp_1}{dt} = \frac{\partial p_1}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial p_1}{\partial y} \frac{dy}{dt} = \frac{\partial p_1}{\partial x} \frac{p_1}{r^2} + \frac{\partial p_1}{\partial y} \frac{p_2}{r^2} = \frac{\mathbf{p}\nabla p_1}{r^2} = \frac{r_x}{r}.$$

Аналогично вдоль кривой $\frac{dy}{dt} = p_2 r^{-2}(x, y)$ записывается $\frac{dp_2}{dt}$. В результате, получим

$$\frac{dp_1}{dt} = \frac{r_x}{r}, \quad \frac{dp_2}{dt} = \frac{r_y}{r}.$$

Вдоль этих же кривых $\tau(x, y)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{d\tau}{dt} = \frac{\partial \tau}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial \tau}{\partial y} \frac{dy}{dt} = r^{-2}(x, y) |\mathbf{p}|^2 = 1.$$

Если выбрать параметр t так, чтобы $\tau = 0$ при $t = 0$, то тогда $t = \tau$ и параметр t будет равен времени прохождения сигнала от $\mathbf{x}_0 = (x_0, y_0)$ до $\mathbf{x} = (x, y)$. Введем произвольный единичный вектор ν^0 и решим задачу Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \frac{dx}{d\tau} = p_1 r^{-2}(x, y), & \frac{dy}{d\tau} = p_2 r^{-2}(x, y); \\ \frac{dp_1}{d\tau} = \frac{r_x(x, y)}{r(x, y)}, & \frac{dp_2}{d\tau} = \frac{r_y(x, y)}{r(x, y)}; \\ \mathbf{x} |_{\tau=0} = \mathbf{x}_0, & \mathbf{p} |_{\tau=0} = \mathbf{p}_0 \equiv r(x_0, y_0) \nu^0. \end{cases} \quad (11)$$

Уравнения (11) называются *уравнениями Эйлера* [19].

Пусть $\nu^0 = (\sin \phi, \cos \phi)$. В результате мы найдем x, y, p_1 и p_2 как функции от τ, ϕ и параметра \mathbf{x}_0 :

$$x = f_1(\tau, \phi, \mathbf{x}_0), \quad y = f_2(\tau, \phi, \mathbf{x}_0), \quad p_1 = f_3(\tau, \phi, \mathbf{x}_0), \quad p_2 = f_4(\tau, \phi, \mathbf{x}_0).$$

Первые два равенства при фиксированной \mathbf{x}_0 определяют в пространстве переменных x, y, t двухпараметрическое семейство бихарактеристик. В пространстве \mathbb{R}^2 они определяют геодезические линии $\Gamma(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0)$. Проекцию бихарактеристики на пространство (x, y) называют лучом. Первые два равенства задают луч параметрически. Для однозначного задания луча, соединяющего пару точек $(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0)$, необходимо выполнение условия регулярности семейства геодезических в области, ограниченной характеристическим коноидом $t = \tau(x, y)$ (вопрос единственности решения уравнения эйконала подробно изучен в работе [14]).

Лемма 1 [14]. Пусть D — открытая область пространства \mathbb{R}^2 с гладкой границей, $c(x, y) \in C^k(D)$, $k \geq 2$, $c(x, y) \geq c_0(x, y) > 0$ при $(x, y) \in D$. Тогда для любой точки $(x_0, y_0) \in D$ и любого единичного вектора ν^0 решение задачи (11) существует и единственно для всех τ , при которых точка $(f_1(\tau, \phi, \mathbf{x}_0), f_2(\tau, \phi, \mathbf{x}_0)) \in D$, а функции $f_1, f_2, f_3, f_4, f_{1\tau\tau}, f_{2\tau\tau}, f_{3\tau}, f_{4\tau}$ непрерывны по совокупности аргументов вместе с производными до порядка $k - 1$.

4.2. Подход С.К. Годунова

Рассмотрим алгоритм, основанный на методе С.К. Годунова и предложенный в работе [18].

Решение уравнения эйконала для задачи (8) находится как установившееся решение нестационарного уравнения

$$\tau_t + \tau_x \tau_x + \tau_y \tau_y = c^{-2}(x, y) \quad (12)$$

с граничным условием в точечном источнике $\tau(x_0, y_0) = 0$. На внешних границах рассматриваемой области $\Omega := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in (0, L_x), y \in (0, L_y)\}$ задаются условия отсутствия отражения [16, 22].

Если первые сомножители в левых частях произведений в (12) обозначить через $U = \tau_x, V = \tau_y$ и интерпретировать U и V как компоненты скорости, то получим уравнение, близкое к уравнению конвективного переноса

$$\tau_t + U \tau_x + V \tau_y = c^{-2}(x, y). \quad (13)$$

Пусть N_x и N_y — количество точек разбиения промежутков $(0, L_x)$ и $(0, L_y)$ соответственно. Для численного решения уравнения (13) используем противопоточную схему второго порядка точности, предложенную в работе [18], которая является вариантом схемы Годунова [17] для данного уравнения. В соответствии с этой численной схемой в каждой расчетной точке равномерной сетки $\omega_h := \{(x_i, y_j) \in \Omega \mid x_i = ih_x, y_j = jh_y, i =$

$\overline{0, N_x - 1}, j = \overline{0, N_y - 1}$, $h_x = L_x / (N_x - 1)$, $h_y = L_y / (N_y - 1)$, вычисляются аппроксимации частных пространственных производных и соответствующих компонент “скорости” с использованием специально ограниченных вторых разделенных разностей:

$$\begin{aligned}\tau(x_{i-1j}, x_{ij}, x_{i+1j}) &= \frac{\tau_{i+1j} - 2\tau_{ij} + \tau_{i-1j}}{h_x^2}, \\ \tau(x_{i-2j}, x_{i-1j}, x_{ij}) &= \frac{\tau_{ij} - 2\tau_{i-1j} + \tau_{i-2j}}{h_x^2}, \\ \tau(x_{ij}, x_{i+1j}, x_{i+2j}) &= \frac{\tau_{i+2j} - 2\tau_{i+1j} + \tau_{ij}}{h_x^2}, \\ \tau_x^+ &= \frac{\tau_{i+1j} - \tau_{ij}}{h_x} - \frac{1}{2}h_x \min\text{mod}(\tau(x_{i-1j}, x_{ij}, x_{i+1j}), \tau(x_{ij}, x_{i+1j}, x_{i+2j})), \\ \tau_x^- &= \frac{\tau_{ij} - \tau_{i-1j}}{h_x} + \frac{1}{2}h_x \min\text{mod}(\tau(x_{i-2j}, x_{i-1j}, x_{ij}), \tau(x_{i-1j}, x_{ij}, x_{i+1j})), \\ U_{i+1j} &= \tau_x^+, \quad U_{ij} = \tau_x^-, \quad V_{ij+1} = \tau_y^+, \quad V_{ij} = \tau_y^-.\end{aligned}$$

Величины τ_y^+ и τ_y^- вычисляются аналогичным образом, как τ_x^+ и τ_x^- ,

$$\min\text{mod}(a, b) = \begin{cases} 0, & ab < 0, \\ a, & |a| \leq |b|, \\ b, & |b| < |a|. \end{cases}$$

Согласно принципу противопоточности, аппроксимация пространственных производных отбирается по знаку скорости и ее абсолютной величине по следующему алгоритму [18]:

1. Если $U_{ij} \geq 0$, $U_{ij} \geq -U_{i+1j}$, то $m_{ij} = 1$ и $m_{ij} = 0$ в противном случае;
2. Если $U_{i+1j} \leq 0$, $U_{i+1j} \leq -U_{ij}$, то $m_{i+1j} = 1$ и $m_{i+1j} = 0$ в противном случае;
3. Если $m_{ij} + m_{i+1j} = 2$, то $m_{i+1j} = 1$ и $m_{ij} = 0$.

Аппроксимации производных и компонента x вектора “скорости переноса” записываются следующим образом:

$$(\hat{\tau}_x)_{ij}^k = m_{ij}\tau_x^- + m_{i+1j}\tau_x^+, \quad \tilde{U}_{ij} = m_{ij}U_{ij} + m_{i+1j}U_{i+1j}.$$

Аналогично вычисляются аппроксимации производных по y и соответствующей компоненты скорости \tilde{V} . Граничные условия на внешней границе аппроксимируют со вторым порядком условие отсутствия отражения:

$$\begin{aligned}\tau_{ij}^{k+1} &= \tau_{ij}^k - \Delta t \left(\tilde{U}_{ij} (\hat{\tau}_x)_{ij}^k + \tilde{V}_{ij} (\hat{\tau}_y)_{ij}^k - c_{ij}^{-2} \right), \quad i = \overline{2, N_x - 3}, \quad j = \overline{2, N_y - 3}, \\ \tau_{i_0 j_0}^k &= 0, \\ \tau_{ij}^k &= \tau_{i+3j}^k - 3\tau_{i+2j}^k + 3\tau_{i+1j}^k, & i = 0, 1, \quad j = \overline{0, N_y - 1}, \\ \tau_{ij}^k &= \tau_{i-3j}^k - 3\tau_{i-2j}^k + 3\tau_{i-1j}^k, & i = N_x - 2, N_x - 1, \quad j = \overline{0, N_y - 1}, \\ \tau_{ij}^k &= \tau_{ij+3}^k - 3\tau_{ij+2}^k + 3\tau_{ij+1}^k, & i = \overline{0, N_x - 1}, \quad j = 0, 1, \\ \tau_{ij}^k &= \tau_{ij-3}^k - 3\tau_{ij-2}^k + 3\tau_{ij-1}^k, & i = \overline{0, N_x - 1}, \quad j = N_y - 2, N_y - 1.\end{aligned}$$

Здесь k — номер расчетного слоя по времени, (i_0, j_0) — номер точечного источника (x_0, y_0) на расчетной сетке ω_h .

4.3. Сравнение метода бихарактеристик и подхода С.К. Годунова

В качестве разностного метода решения задачи Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений (11) был использован метод Рунге-Кутты четвертого порядка аппроксимации. Для этого рассмотрим $t \in (0, T)$ и построим разбиение области $(0, T)$: $t_n = nh_t$, $n = 0, 1, \dots, N_t$, $h_t = t/N_t$ — шаг сетки по переменной t , $N_t + 1$ — количество узлов равномерной сетки по переменной t . Введем обозначения $(x_n, y_n) = (x(t_n), y(t_n))$. Тогда решение уравнения эйконала $\tau(x_n, y_n)$ вычисляется следующим образом:

$$\tau(x_n, y_n) = \int_0^{x_n} \frac{\partial \tau(x, y_n)}{\partial x} dx.$$

Проведем сравнение метода бихарактеристик с подходом С.К. Годунова на нескольких модельных примерах.

Пример 1. Расчет времени прихода первых волн от точечного источника в изотропной среде, расположенного в центре квадратной области размера $L_x = L_y = 2$ при $c(x, y) = 1$. Область покрывалась сеткой $N_x = N_y = 101$.

Результаты, полученные при помощи подхода С.К. Годунова второго порядка точности и метода бихарактеристик показаны на рис. 1.

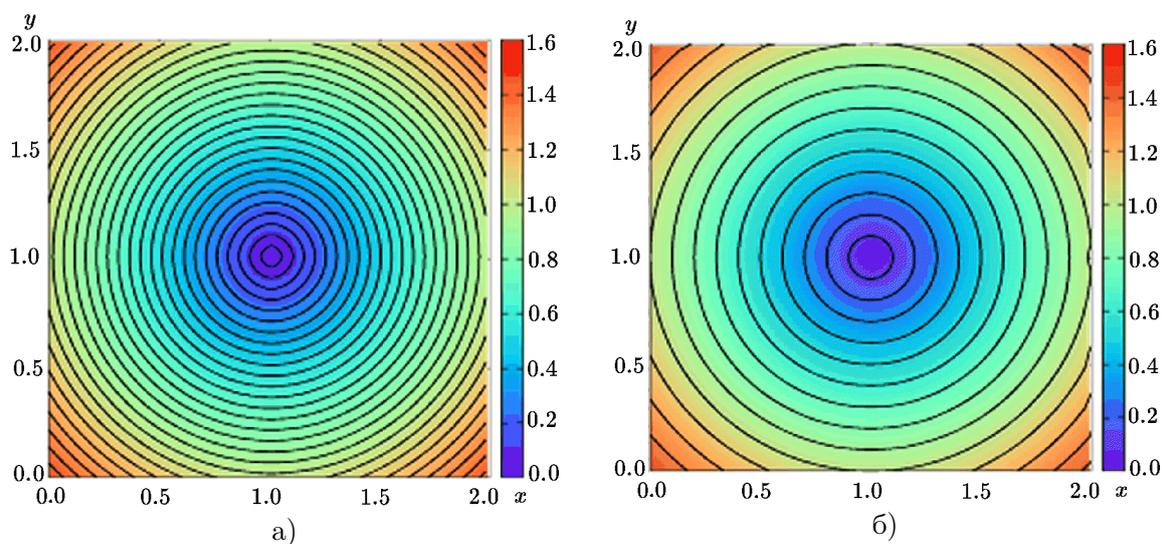


Рис. 1. Времена прихода первых волн от точечного источника при $c(x, y) = 1$, полученные: а) подходом С.К. Годунова, б) методом бихарактеристик

Отметим, что полученные численные решения уравнения эйконала близки к явному точному решению $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 1$. Схема С.К. Годунова имеет второй порядок точности [18], а метод Рунге-Кутты имеет четвертый порядок точности.

Пример 2. Расчет времени прихода первых волн в глубокой воде, ограниченной прямоугольной областью размера $L_x = 70$ км, $L_y = 100$ км. Область покрывалась сеткой $N_x = 450$, $N_y = 300$. Рассматривался одномерный рельеф дна (см. рис. 4а), т. е.

$$H(x, y) = H(x) = 1500 \sin \frac{2\pi x}{L_x} + x \frac{H_{\max} - H_{\min}}{L_x} + H_{\min}.$$

Здесь $H_{\max} = 6$ км, $H_{\min} = 5$ м — наибольшая и наименьшая средняя глубина океана соответственно.

Для расчета времени прихода первых волн от линии источников методом бихарактеристик источник вида $h(y)\delta(x)$ в задаче (2) представляется в виде ряда точечных источников, для каждого из которых отдельно решается задача (8). После решения системы (11) для n -го точечного источника получаем массивы координат $(x_n[i][j], y_n[i][j])$ и значений $\tau_n[i][j]$ линий уровня, $n = 1, \dots, N_p$, N_p — количество точек разбиения линии источников. Здесь $i = 0, \dots, 359$ обозначает градус угла, под которым выпускается направляющий луч p_0 (см. систему (11)), $j = 0, \dots, N_t$ — текущий номер по времени (или, что тоже самое, номер линии уровня $\tau(x, y)$). Итоговые линии уровня $\tau[i][j]$ для линии источников получаем после построения огибающей при фиксированном j для всех i и n . На рис. 2 приведены расчеты времени прихода первых волн от линии источников от точки (35, 30) до точки (35, 70) для метода бихарактеристик и подхода С.К. Годунова соответственно. Время расчетов ограничивалось $T = 10$ минутами. В случае метода бихарактеристик источник разбивался на $N_p = 60$ точечных источников, $N_t = 30$. При реализации схемы С.К. Годунова количество точек разбиения по времени $N_t = 18000$ для соблюдения условия Куранта устойчивости разностной схемы, а также достижения условия установления.

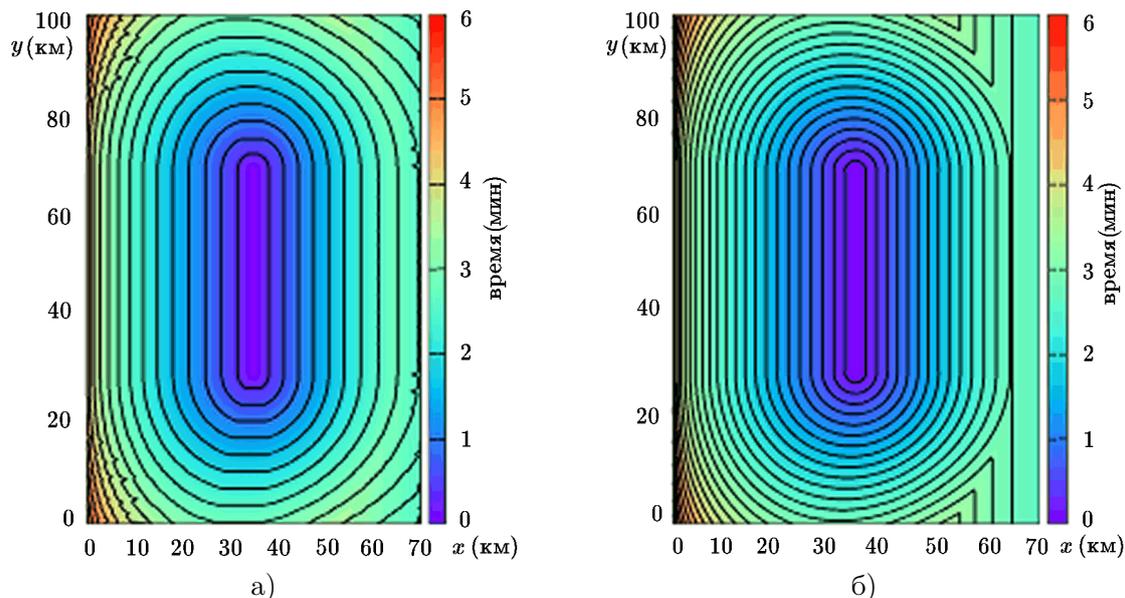


Рис. 2. Расчет времени прихода первых волн от линии источников: а) методом бихарактеристик; б) подходом С.К. Годунова — в случае дна, меняющегося в одном направлении. Размеры расчетной области указаны в километрах

Отметим, что вычислительное время на персональном компьютере составило 27.5 минут для метода Годунова и 28.5 секунд для метода бихарактеристик. Вычисления проводились на процессоре Intel(R) Core(TM) i7-2600 CPU 3.4 GHz.

В случае рельефа дна с волнорезом (см. рис. 5а) расчеты времени прихода первых волн от линии источников для методов бихарактеристик и Годунова приведены на рис. 3.

Таким образом, среди двух методов для дальнейших расчетов амплитуды переднего фронта волны цунами был выбран метод бихарактеристик в силу достаточной точности и оптимального времени расчетов на персональном компьютере.

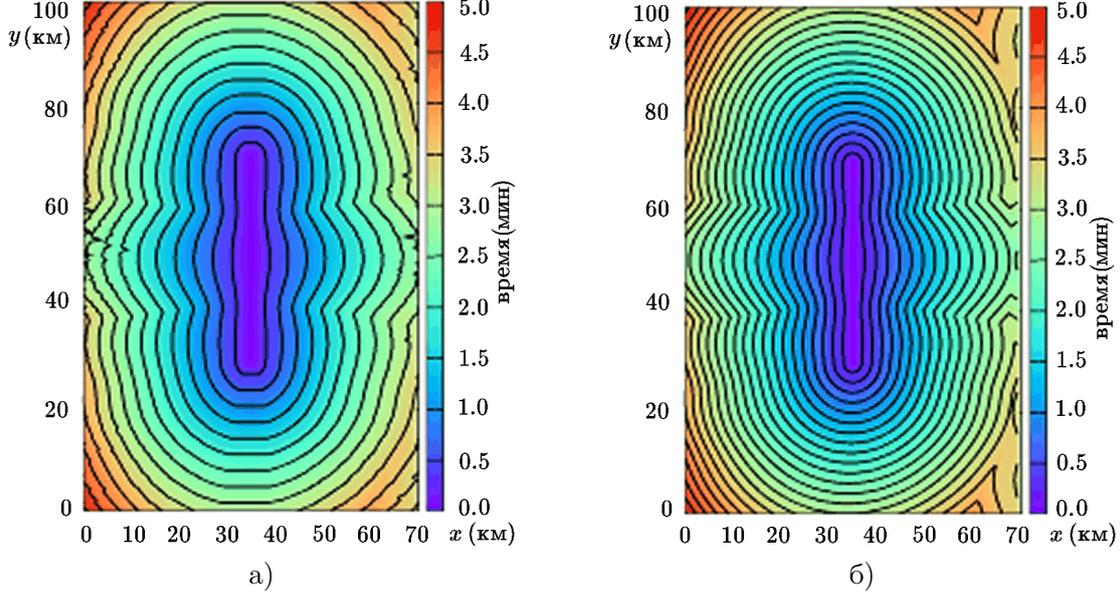


Рис. 3. Расчет времени прихода первых волн от линии источников: а) методом бихарактеристик; б) подходом С.К. Годунова — в случае дна с волнорезом. Размеры расчетной области указаны в километрах

5. Результаты численных расчетов амплитуды фронта волны

В данном пункте численно решим задачу Коши (6) определения амплитуды переднего фронта волны цунами.

После введения замены $z = \tau(x, y)$ из области Ω мы переходим в область $\Omega_z := (0, L_z) \times (0, L_y)$, где $L_z = \max_{x,y \in \Omega} |\tau|$. Применяя интерполяцию полученных значений z в узлы равномерной сетки $\omega_{zy} := \{(z_i, y_j) \mid z_i = ih_z, y_j = jh_y, i = \overline{0, N_x - 1}, j = \overline{0, N_y - 1}\}$, $h_x = h_z = L_z/(N_x - 1)$, и используя явную конечно-разностную схему второго порядка аппроксимации, получим разностный аналог начально-краевой задачи (6):

$$\begin{cases} S_{i+1,j} = S_{i-1,j} - \frac{h_z}{h_y} b_{i,j}^2 (\tau_y)_{i,j} (S_{i,j+1} - S_{i,j-1}) - a_{i,j} S_{i,j}, & i = \overline{1, N_z - 2}, \quad j = \overline{1, N_y - 2}; \\ S_{0,j} = h_j \left(b_{0,j}^{-2} - (\tau_y^2)_{0,j} \right)^{-1/2}, & j = \overline{0, N_y - 1}; \\ S_{i,0} = S_{i,N_y} = 0, & i = \overline{0, N_z - 1}. \end{cases} \quad (14)$$

Здесь $S_{i,j} = S(z_i, y_j)$, $b_{i,j} = b(z_i, y_j)$,

$$a_{i,j} = h_z b_{i,j}^2 \left((\tau_{xx}^2)_{i,j} + (\tau_{yy}^2)_{i,j} \right) + \frac{b_{i+1,j} - b_{i-1,j}}{b_{i,j}} + \frac{h_z}{h_y} b_{i,j} (\tau_y)_{i,j} (b_{i,j+1} - b_{i,j-1}).$$

В численных расчетах предполагалась непрерывность первой производной разностных функций $S_{i,j}$ и $b_{i,j}$ по переменной x на границе $x = 0$. Таким образом, производная в точке $x = 0$ слева $(S_{0,j} - S_{-1,j})/h_z$ и производная в точке $x = 0$ справа $(S_{1,j} - S_{0,j})/h_z$, $j = \overline{0, N_y - 1}$, расчетной сетки ω_{zy} равны. Получившееся соотношение $S_{-1,j} = 2S_{0,j} - S_{1,j}$ подставляем в разностную схему (14) при $i = 0$ и получаем значение функции $S_{1,j}$ в точке $(1, j)$ расчетной сетки ω_{zy} :

$$S_{1,j} = S_{0,j} - \frac{1}{2} \frac{h_z}{h_y} b_{0,j}^2 (\tau_y)_{0,j} (S_{0,j+1} - S_{0,j-1}) - \frac{1}{2} a_{0,j} S_{0,j}, \quad j = \overline{0, N_y - 1}.$$

Для двух рельефов дна была численно решена задача (6) определения амплитуды переднего фронта волны, порожденной линейным источником $h(y)\delta(x)$. Функция источника $h(y)$ задавалась формулой

$$h(y) = \text{Ampl} \begin{cases} \frac{1}{2} \left(1 + \cos \frac{\pi(y - y_1 - \varepsilon)}{\varepsilon} \right), & y \in (y_1, y_1 + \varepsilon); \\ 1, & y \in [y_1 + \varepsilon, y_2 - \varepsilon]; \\ \frac{1}{2} \left(1 + \cos \frac{\pi(y - y_2 + \varepsilon)}{\varepsilon} \right), & y \in (y_2 - \varepsilon, y_2). \end{cases}$$

Здесь $\text{Ampl} = 1$ м — начальная амплитуда возмущения, $y_1 = 30$ км и $y_2 = 70$ км — промежуток, в котором сосредоточена функция линейного источника, $\varepsilon = (y_2 - y_1)/6$.

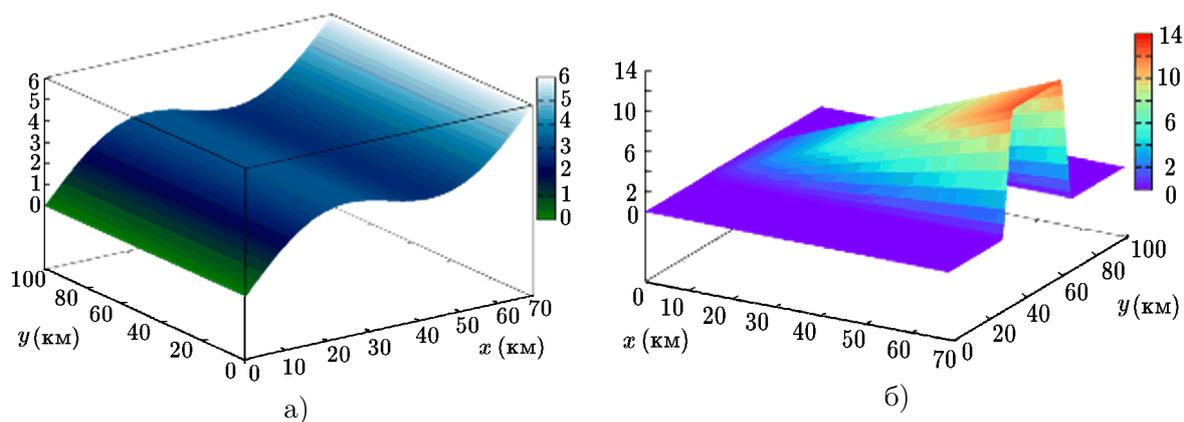


Рис. 4. Результаты численных расчетов: а) рельеф дна $H(x, y)$ (размеры указаны в километрах); б) амплитуда переднего фронта волны $S(x, y)$ (значения амплитуды указаны в метрах)

Уравнение эйконала было решено методом бихарактеристик. Результаты численных расчетов амплитуды переднего фронта волна $S(x, y)$ приведены на рис. 4 и 5.

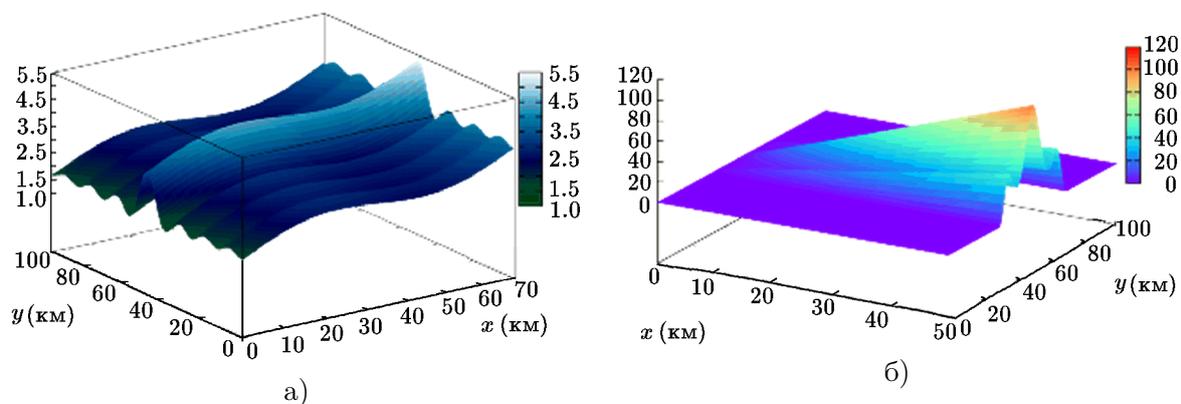


Рис. 5. Результаты численных расчетов: а) рельеф дна $H(x, y)$ с волнорезом (размеры указаны в километрах); б) амплитуда переднего фронта волны $S(x, y)$ (значения амплитуды указаны в метрах)

Отметим, что при уменьшении функции $H(x, y)$, описывающей рельеф дна, амплитуда переднего фронта волны $S(x, y)$, порожденной линейным источником, увеличивается, что подтверждается экспериментально. Более того, в случае рельефа дна с волнорезом (рис. 5а) амплитуда переднего фронта волны растет на гребне волнореза больше, чем около него (рис. 5б).

6. Заключение

В случае источника вида $q(x, y) = h(y)q_1(x)$, $x \in (l_1, l_2)$, амплитуда переднего фронта волны $S_q(x, y)$ связана с амплитудой фронта волны $S(x, y)$ для линейного источника следующим образом:

$$S_q(x, y) = \int_{l_1}^{l_2} S(\xi, y)q_1(\xi) d\xi.$$

Изложенный алгоритм распространения амплитуды может быть использован при решении обратной задачи восстановления источника по информации при $t = T$ об амплитуде волнового фронта, порожденного этим источником. В этом случае можно решать задачу Коши (6), но вместо условия $S(0, y) = g(y)$ задавать условие $S(T, y) = f(y)$. В результате будет получена функция $S(0, y) = g(y)$, которая при переходе к координатам (x, y) описывает источник.

Литература

1. **Войт С.С., Себекин Б.И.** Некоторые гидродинамические модели неустановившихся волновых движений типа волн цунами // Морские гидрофизические исследования. — Севастополь: МГИ АН УССР, 1968. — № 1. — С. 137–145.
2. **Бабич В.М., Булдырев В.С., Молотков И.А.** Пространственно-временной лучевой метод: линейные и нелинейные волны. — Л.: Изд-во Ленинградского университета, 1985.
3. **Dobrokhotov S.Yu., Nekrasov R.V., Tirozzi B.** Asymptotic solutions of the linear shallow-water equations with localized initial data // J. of Engineering Mathematics. — 2011. — Vol. 69. — P. 225–242.
4. **Маслов В.П.** Теория возмущений и асимптотические методы. — М.: Изд-во Московского университета, 1965.
5. **Marchuk An.G., Vasiliev G.S.** The fast method for a rough tsunami amplitude estimation // Bull. Novosibirsk Comp. Center. Ser. Math. Model. in Geoph. — Novosibirsk, 2014. — Vol. 17. — P. 21–34.
6. **Косых В.С., Чубаров Л.Б., Гусяков В.К., Камаев Д.А., Григорьева В.М., Бейзель С.А.** Методика расчета максимальных высот волн цунами в защищаемых пунктах побережья Дальнего востока Российской Федерации // Результаты испытания новых и усовершенствованных технологий, моделей и методов гидрометеорологических прогнозов. — 2013. — Т. 40. — С. 115–134.
7. **Airy G.** Tides and Waves // Encyclopedia Metropolitana. — 1845. — Vol. 5. — P. 241–396.
8. **Kabanikhin S.I., Krivorot'ko O.I.** A numerical method for determining the amplitude of a wave edge in shallow water approximation // Applied and Computational Mathematics. — 2013. — Vol. 12, № 1. — P. 91–96.
9. **Владимиров В.С.** Уравнения математической физики. — М.: Наука, 1981.

10. **Кабанихин С.И.** Линейная регуляризация многомерных обратных задач для гиперболических уравнений. — Новосибирск, 1988. — (Препринт / АН СССР. Сиб.отд-ние. Институт математики; Т. 27).
11. **Петрашень Г.И.** Распространение волновых полей сигнального типа в упругих сейсмических средах. — СПб.: Изд-во Санкт-Петербургского университета, 2000.
12. **Арнольд В.И.** Особенности каустик и волновых фронтов. — М.: ФАЗИС, 1996.
13. **Зельдович Б.Я., Пилипецкий Н.Ф., Шкунов В.В.** Обращение волнового фронта. — М.: Наука, 1985.
14. **Романов В.Г.** Обратные задачи математической физики. — М.: Наука, 1984.
15. **Bezhaev A.Yu., Lavrentiev-jr M.M., Marchuk An.G., Titov V.V.** Determination of tsunami sources using deep ocean wave records // Bull. Novosibirsk Comp. Center. Ser. Math. Model. in Geoph. — Novosibirsk, 2006. — Vol. 11. — P. 53–62.
16. **Кабанихин С.И., Криворотько О.И.** Численное решение уравнения эйконала // Сибирские электронные математические известия. Труды IV международной молодежной школы-конференции “Теория и численные методы решения обратных и некорректных задач”. Часть I. — 2013. — Т. 10. — С. С28–С34.
17. **Годунов С.К.** Разностный метод численного расчета разрывных решений уравнений гидродинамики // Математический сборник. — 1959. — Т. 47, № 3. — С. 271–306.
18. **Иванов Д.И., Иванов И.Э., Крюков И.А.** Алгоритмы приближенного решения некоторых задач прикладной геометрии, основанные на уравнении типа Гамильтона–Якоби // Журн. вычисл. матем. и мат. физики. — 2005. — Т. 45, № 8. — С. 1345–1358.
19. **Эльсгольц Л.Э.** Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. — М.: Наука, 1969.
20. **Романов В.Г.** Устойчивость в обратных задачах. — М.: Научный мир, 2005.
21. **Кабанихин С.И.** Обратные и некорректные задачи. — Новосибирск: Сибирское научное изд-во, 2009.
22. **Хакимзянов Г.С., Шокин Ю.И., Барахнин В.Б., Шокина Н.Ю.** Численное моделирование течений жидкости с поверхностными волнами. — Новосибирск: Изд-во СО РАН, 2001.

Поступила в редакцию 17 сентября 2015 г.

Литература в транслитерации

1. **Voyt S.S., Sebekin B.I.** Nekotorye gidrodinamicheskie modeli neustanovivshihsvya volnovykh dvizheniy tipa voln tsunami // Morskije gidrofizicheskie issledovaniya. — Sevastopol': MGI AN USSR, 1968. — № 1. — S. 137–145.
2. **Babich V.M., Buldyrev V.S., Molotkov I.A.** Prostranstvenno-vremennoy luchevoj metod: lineynye i nelineynye volny. — L.: Izd-vo Leningradskogo universiteta, 1985.
3. **Dobrokhotoy S.Yu., Nekrasov R.V., Tirozzi B.** Asymptotic solutions of the linear shallow-water equations with localized initial data // J. of Engineering Mathematics. — 2011. — Vol. 69. — P. 225–242.
4. **Maslov V.P.** Teoriya vozmushcheniy i asimptoticheskie metody. — М.: Izd-vo Moskovskogo universiteta, 1965.
5. **Marchuk An.G., Vasiliev G.S.** The fast method for a rough tsunami amplitude estimation // Bull. Novosibirsk Comp. Center. Ser. Math. Model. in Geoph. — Novosibirsk, 2014. — Vol. 17. — P. 21–34.

6. **Kosyh V.S., Chubarov L.B., Gusakov V.K., Kamaev D.A., Grigor'eva V.M., Beyzel' S.A.** Metodika rascheta maksimal'nyh vysot voln tsunami v zashchishchaemyh punktah poberezh'ya Dal'nego vostoka Rossiyskoy federatsii // Rezul'taty ispytaniya novyh i usovershenstvovannyh tekhnologiy, modeley i metodov gidrometeorologicheskikh prognozov. — 2013. — T. 40. — S. 115–134.
7. **Airy G.** Tides and Waves // Encyclopedia Metropolitana. — 1845. — Vol. 5. — P. 241–396.
8. **Kabanikhin S.I., Krivorot'ko O.I.** A numerical method for determining the amplitude of a wave edge in shallow water approximation // Applied and Computational Mathematics. — 2013. — Vol. 12, № 1. — P. 91–96.
9. **Vladimirov V.S.** Uravneniya matematicheskoy fiziki. — M.: Nauka, 1981.
10. **Kabanikhin S.I.** Lineynaya regularizatsiya mnogomernykh obratnykh zadach dlya giperbolicheskikh uravneniy. — Novosibirsk, 1988. — (Preprint / AN SSSR. Sib.otd-nie. Institut matematiki; T. 27).
11. **Petrashen' G.I.** Rasprostraneniye volnovykh poley signal'nogo tipa v uprugih seysmicheskikh sredah. — SPb.: Izd-vo Sankt-Peterburgskogo universiteta, 2000.
12. **Arnol'd V.I.** Osobennosti kaustik i volnovykh frontov. — M.: FAZIS, 1996.
13. **Zel'dovich B.Ya., Pilipetskiy N.F., Shkunov V.V.** Obrashcheniye volnovogo fronta. — M.: Nauka, 1985.
14. **Romanov V.G.** Obratnye zadachi matematicheskoy fiziki. — M.: Nauka, 1984.
15. **Bezhaev A.Yu., Lavrentiev-jr M.M., Marchuk An.G., Titov V.V.** Determination of tsunami sources using deep ocean wave records // Bull. Novosibirsk Comp. Center. Ser. Math. Model. in Geoph. — Novosibirsk, 2006. — Vol. 11. — P. 53–62.
16. **Kabanikhin S.I., Krivorot'ko O.I.** Chislennoe resheniye uravneniya eykonala // Sibirskie elektronnyye matematicheskie izvestiya. Trudy IV mezhdunarodnoy molodezhnoy shkoly-konferentsii “Teoriya i chislennyye metody resheniya obratnykh i nekorrektnykh zadach”. Chast' I. — 2013. — T. 10. — S. S28–S34.
17. **Godunov S.K.** Raznostnyy metod chislennogo rascheta razryvnykh resheniy uravneniy gidrodinamiki // Matematicheskiy sbornik. — 1959. — T. 47, № 3. — S. 271–306.
18. **Ivanov D.I., Ivanov I.E., Kryukov I.A.** Algoritmy priblizhennogo resheniya nekotorykh zadach prikladnoy geometrii, osnovannyye na uravnenii tipa Gamil'tona–Yakobi // Zhurn. vychisl. matem. i mat. fiziki. — 2005. — T. 45, № 8. — S. 1345–1358.
19. **El'sgol'ts L.E.** Differentsial'nyye uravneniya i variatsionnoe ischisleniye. — M.: Nauka, 1969.
20. **Romanov V.G.** Ustoychivost' v obratnykh zadachah. — M.: Nauchnyy mir, 2005.
21. **Kabanikhin S.I.** Obratnye i nekorrektnyye zadachi. — Novosibirsk: Sibirskoe nauchnoe izd-vo, 2009.
22. **Khakimzyanov G.S., Shokin Yu.I., Barahnin V.B., Shokina N.Yu.** Chislennoe modelirovaniye techeniy zhidkosti s poverhnostnyimi volnami. — Novosibirsk: Izd-vo SO RAN, 2001.

