УДК 539.4
DOI: 10.15372/PMTF202215233

ИССЛЕДОВАНИЕ ПРОДОЛЬНОГО РАЗРУШЕНИЯ БАЛОК С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ НЕЛИНЕЙНОЙ ВЯЗКОУПРУГОЙ МОДЕЛИ, УЧИТЫВАЮЩЕЙ ЗАВИСИМОСТЬ СВОЙСТВ МАТЕРИАЛА ОТ ДЕФОРМАЦИИ

В. И. Ризов

Университет архитектуры, гражданского строительства и геодезии, София, Болгария
E-mail: v_rizov_fhe@uacg.bg

Исследуется продольное разрушение неоднородной консольной балочной конструкции на основе нелинейной вязкоупругой модели, учитывающей зависимость свойств материала от деформации. Вязкоупругий элемент представляет собой параллельно соединенные нелинейную пружину и нелинейный демпфер. Модуль упругости нелинейной пружины и коэффициент вязкости нелинейного демпфера зависят от деформации. Для подтверждения правильности вычисления скорости выделения энергии деформации используется закон сохранения энергии.

Ключевые слова: продольная трещина, вязкоупругая модель, балочная конструкция, неоднородность, нелинейная пружина, нелинейный демпфер

Введение. В последнее время в различных инженерных конструкциях широко используются неоднородные материалы, свойства которых непрерывно изменяются по объему (непрерывно-неоднородные материалы). Примером непрерывно-неоднородных материалов являются функционально-градиентные материалы [1–3], представляющие собой комбинацию двух или более материалов, которые непрерывно смешиваются в процессе производства. Функционально-градиентные материалы являются высокоэффективными неоднородными композитами, свойства которых распределены непрерывно по одному или нескольким пространственным направлениям [4–6]. Использование таких материалов позволяет контролировать микроструктуру, так чтобы она соответствовала требованиям, предъявляемым к конкретным инженерным конструкциям.

Одним из основных типов разрушения непрерывно-неоднородных (функционально-градиентных) материалов является продольное разрушение, поскольку такие материалы изготавливаются послойно [7]. Следовательно, изучение продольного разрушения представляет собой актуальную задачу [8–10]. Существенное влияние на характер продольного разрушения оказывают вязкоупругие свойства материала [11]. При анализе разрушения неоднородных материалов необходимо использовать нелинейные вязкоупругие модели.

В данной работе с использованием нелинейной вязкоупругой модели, учитывающей зависимость свойств материала от величины деформации, исследуется продольное разрушение неоднородной балочной конструкции из нелинейного вязкоупругого материала.

1. Теоретическая модель. Схема исследуемой балки приведена на рис. 1. Ширина, длина и толщина балки обозначены через b, l, h соответственно. В балке, защемленной

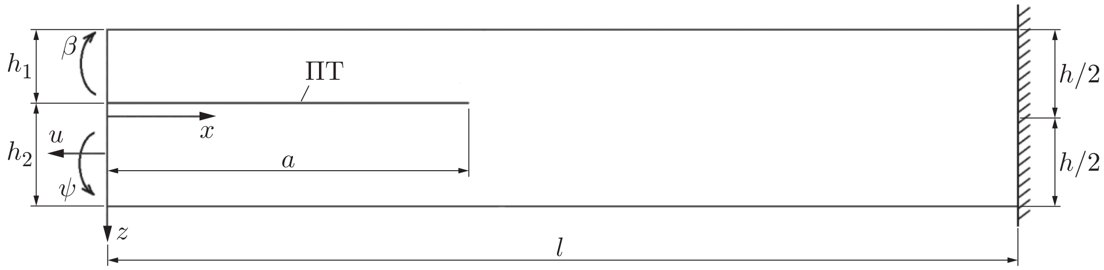

Рис. 1. Схема балки из нелинейного вязкоупругого материала при наличии в ней продольной трещины (ПТ)

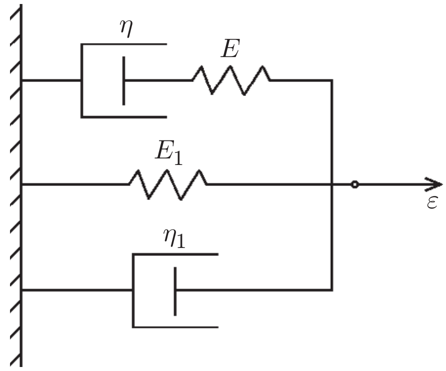

Рис. 2. Модель нелинейного вязкоупругого материала

на правом торце, имеется продольная трещина длиной a. Части балки, расположенные выше и ниже трещины, имели толщину, равную h_1 и h_2 соответственно. Часть балки, расположенная ниже трещины, нагружена осевой силой и изгибающим моментом. Осевое смещение u и угол поворота сечения ψ изменяются со временем t по законам

$$u = v_u t^4, \qquad \psi = v_\psi t^4, \tag{1}$$

где v_u, v_ψ — коэффициенты в зависимостях величин u и ψ от времени. Часть балки, расположенная выше трещины, нагружена изгибающим моментом. Изменение угла поворота β со временем описывается зависимостью

$$\beta = v_\beta t^4. \tag{2}$$

Балка изготовлена из нелинейного вязкоупругого материала, механическое поведение которого описывается моделью, показанной на рис. 2. Модель состоит из четырех компонентов. Линейная пружина с модулем упругости E последовательно соединена с линейным демпфером с коэффициентом вязкости η. Эти два элемента параллельно соединены с нелинейной пружиной с модулем упругости E_1 и нелинейным демпфером с коэффициентом вязкости η_1 (см. рис. 2).

Модуль упругости нелинейной пружины и вязкость нелинейного демпфера зависят от деформации:

$$E_1 = \frac{E_0}{1 + \lambda\varepsilon}, \qquad \eta_1 = \frac{\eta_0}{1 + \mu\varepsilon} \tag{3}$$

(E_0, η_0 — значения E_1, η_1 при $\varepsilon = 0$). Заметим, что в формулах (3) знаменатели должны быть больше нуля, поэтому используются абсолютные значения деформаций. Зависимость от времени полной деформации ε модели, представленной на рис. 2, принимается в виде

$$\varepsilon = v_\varepsilon t^4, \tag{4}$$

где v_ε — параметр.

Связь между напряжением σ, деформацией ε и временем t для модели, представленной на рис. 2, определяется следующим образом. Выводится зависимость напряжения и деформации от времени для последовательно соединенных линейной пружины и линейного демпфера. Для этого используются уравнения

$$\varepsilon_E + \varepsilon_\eta = \varepsilon, \quad \sigma_E = \varepsilon_E E, \quad \sigma_\eta = \dot{\varepsilon}_\eta \eta, \quad \sigma_E = \sigma_\eta, \tag{5}$$

где $\varepsilon_E, \varepsilon_\eta$ — деформация пружины и демпфера соответственно; $\dot{\varepsilon}_\eta$ — производная по времени от деформации ε_η. Напряжения в линейной пружине и линейном демпфере обозначены через σ_E и σ_η соответственно. Из (4), (5) следует

$$\dot{\varepsilon}_\eta + \theta_1 \varepsilon_\eta = \theta_2 t^4, \tag{6}$$

где $\theta_1 = E/\eta$; $\theta_2 = E v_\varepsilon/\eta$.

Решение дифференциального уравнения (6) записывается в виде

$$\varepsilon_\eta(t) = \omega_5(1 - \mathrm{e}^{-\theta_1 t}) + \omega_1 t^4 + \omega_2 t^3 + \omega_3 t + \omega_4, \tag{7}$$

где

$$\omega_1 = \frac{\theta_1}{\theta_2}, \quad \omega_2 = -4\,\frac{\theta_2}{\theta_1^2}, \quad \omega_3 = 12\,\frac{\theta_2}{\theta_1^3}, \quad \omega_4 = -24\,\frac{\theta_2}{\theta_1^4}, \quad \omega_5 = 24\,\frac{\theta_2}{\theta_1^5}.$$

Полное напряжение σ для модели, представленной на рис. 2, равно

$$\sigma = \sigma_E + \sigma_{E_1} + \sigma_{\eta_1}, \tag{8}$$

где

$$\sigma_E = E\varepsilon_E = E(\varepsilon - \varepsilon_\eta), \quad \sigma_{E_1} = E_1\varepsilon = \frac{E_0}{1 + \lambda\varepsilon}\,\varepsilon, \quad \sigma_{\eta_1} = \eta_1\dot{\varepsilon} = \frac{\eta_0}{1 + \mu\varepsilon}\,\dot{\varepsilon}. \tag{9}$$

Из (7), (9) следует

$$\sigma_E = E\varepsilon - E\,\frac{E\varepsilon}{\eta\theta_1}\Big(\frac{24}{\theta_1^4 t^4}\,(1 - \mathrm{e}^{-\theta_1 t}) + 1 - \frac{4}{\theta_1 t} + \frac{12}{\theta_1^2 t^2} - \frac{24}{\theta_1^3 t^3}\Big). \tag{10}$$

Из (8)–(10) определяется зависимость между напряжением, деформацией и временем:

$$\sigma(t) = E\varepsilon - E\,\frac{E\varepsilon}{\eta\theta_1}\Big(\frac{24}{\theta_1^4 t^4}\,(1 - \mathrm{e}^{-\theta_1 t}) + 1 - \frac{4}{\theta_1 t} + \frac{12}{\theta_1^2 t^2} - \frac{24}{\theta_1^3 t^3}\Big) + \frac{E_0}{1 + \lambda\varepsilon}\,\varepsilon + \frac{4\eta_0}{(1 + \mu\varepsilon)t}\,\varepsilon. \tag{11}$$

Изменение по толщине балки механических свойств ее материала описывается соотношениями

$$E = E_{up} + \frac{E_{lw} - E_{up}}{h^f}\Big(\frac{h}{2} + z\Big)^f, \qquad \eta = \eta_{up} + \frac{\eta_{lw} - \eta_{up}}{h^g}\Big(\frac{h}{2} + z\Big)^g,$$

$$E_0 = E_{0up} + \frac{E_{0lw} - E_{0up}}{h^p}\Big(\frac{h}{2} + z\Big)^p, \qquad \eta_0 = \eta_{0up}\,\frac{\eta_{0lw} - \eta_{0up}}{h^q}\Big(\frac{h}{2} + z\Big)^q,$$

где $-h/2 \leqslant z \leqslant h/2$ — координата вдоль вертикальной оси балки; E_{up}, η_{up}, E_{0up}, η_{0up} — значения E, η, E_0, η_0 на верхней лицевой поверхности балки; E_{lw}, η_{lw}, E_{0lw}, η_{0lw} — значения E, η, E_0, η_0 на нижней лицевой поверхности балки; f, g, p, q — параметры.

Целью данной работы является определение скорости выделения энергии деформации

$$G = \frac{1}{b}\,\frac{dU^*}{da}$$

(U^* — дополнительная энергия деформации балки). Скорость выделения энергии деформации вычисляется по формуле

$$G = \int\limits_{-h_1/2}^{h_1/2} u^*_{01}\,dz_1 + \int\limits_{-h_2/2}^{h_2/2} u^*_{02}\,dz_2 - \int\limits_{-h/2}^{h/2} u^*_{03}\,dz_3, \tag{12}$$

где u^*_{01}, u^*_{02}, u^*_{03} — плотности дополнительной энергии деформации в частях балки, расположенных выше и ниже трещины, и в неразрушенной части балки соответственно; z_1, z_2, z_3 — координаты по толщине балки в этих частях балки соответственно.

Плотность дополнительной энергии деформации в части балки, расположенной выше трещины, вычисляется по формуле

$$u^*_{01} = \sigma\varepsilon - \int\limits_0^{\varepsilon} \sigma\,d\varepsilon, \tag{13}$$

где напряжение σ определено в (11). Плотность дополнительной энергии деформации в части балки, расположенной ниже трещины, и в неразрушенной части балки вычисляется по формуле (13) после замены в ней напряжения σ на σ_δ и σ_ζ — напряжения в части балки, расположенной ниже трещины, и в неразрушенной части балки соответственно, которые вычисляются по формуле (11) после замены в ней деформации ε на деформации ε_δ и ε_ζ соответственно. Распределение деформации ε по толщине части балки, расположенной выше трещины, определяется по формуле

$$\varepsilon = \varkappa_1(z_1 - z_{1n}), \tag{14}$$

где $\varkappa_1$, z_{1n} — кривизна и координата нейтральной оси. Деформации ε_δ в части балки, расположенной ниже трещины, и ε_ζ в неразрушенной части балки находятся путем замены $\varkappa_1$ в (14) на $\varkappa_2$ и $\varkappa_3$, а также z_{1n} на z_{2n} и z_{3n}.

Кривизны $\varkappa_1$, $\varkappa_2$, $\varkappa_3$ и координаты нейтральных осей z_{1n}, z_{2n}, z_{3n} определяются с использованием шести уравнений. Первое уравнение представляет собой условие равенства нулю осевой силы в части балки, расположенной выше трещины:

$$b\int\limits_{-h_1/2}^{h_1/2} \sigma\,dz_1 = 0, \tag{15}$$

второе и третье уравнения — условия равновесия для осевых сил и изгибающих моментов, действующих в частях балки, расположенных выше и ниже трещины, и в неразрушенной части балки:

$$\begin{gathered} b\int\limits_{-h_2/2}^{h_2/2} \sigma_\delta\,dz_2 = b\int\limits_{-h/2}^{h/2} \sigma_\zeta\,dz_3, \\ b\int\limits_{-h_1/2}^{h_1/2} \sigma\Big(z_1 - \frac{h}{2} + \frac{h_1}{2}\Big)\,dz_1 + b\int\limits_{-h_2/2}^{h_2/2} \sigma_\delta\Big(z_2 + \frac{h}{2} - \frac{h_2}{2}\Big)\,dz_2 = b\int\limits_{-h/2}^{h/2} \sigma_\zeta z_3\,dz_3, \end{gathered} \tag{16}$$

четвертое, пятое и шестое уравнения — уравнения для вычисления величин β, ψ, u с использованием интегралов Максвелла — Мора:

$$\begin{gathered}\beta = \varkappa_1 a + \varkappa_2(l-a), \qquad \psi = \varkappa_2 a + \varkappa_3(l-a),\\ u = -\varkappa_2 z_{2n} a + \varkappa_3(h/2 - h_2/2 - z_{3n})(l-a).\end{gathered} \tag{17}$$

Из уравнений (15)–(17) с использованием пакета MatLab определяются величины $\varkappa_1$, $\varkappa_2$, $\varkappa_3$, z_{1n}, z_{2n}, z_{3n}.

Наконец, скорость выделения энергии деформации рассчитывается путем подстановки плотностей дополнительной энергии деформации в (12) (для вычисления интегралов используется пакет MatLab).

Для подтверждения правильности определения величины скорости выделения энергии деформации по формуле (12) проверялся закон сохранения энергии.

Справедливо равенство

$$G = \frac{1}{b}\Big(M_1\,\frac{\partial\beta}{\partial a} + M_2\,\frac{\partial\psi}{\partial a} + F\,\frac{\partial u}{\partial a} - \frac{\partial U}{\partial a}\Big), \tag{18}$$

где M_1, M_2, F — изгибающие моменты в частях балки, расположенных выше и ниже трещины, и осевое усилие в части балки, расположенной ниже трещины, соответственно; U — энергия деформации в балке. Равенство значений скорости выделения энергии деформации, вычисленных по формулам (18) и (12), свидетельствует о правильности вычислений.

Аналогично можно исследовать продольное разрушение в балке с использованием других (отличных от (1), (2)) законов изменения во времени осевого смещения и угла.

2. Параметрическое исследование задачи. Скорость выделения энергии деформации вычислялась для балки со следующими значениями параметров: $b = 0{,}015$ м, $h = 0{,}020$ м, $l = 0{,}400$ м, $v_\beta = 0{,}05 \cdot 10^{-9}$ рад/с^4, $v_u = 0{,}002 \cdot 10^{-10}$ м/с^4, $v_\psi = 0{,}03 \cdot 10^{-10}$ рад/с^4, $\lambda = 3$, $\mu = 4$. Верхняя лицевая поверхность балки изготовлена из алюминия, поэтому значения модуля упругости линейной пружины и вязкость линейного демпфера для верхней лицевой поверхности приняты равными $E_{up} = 70$ ГПа и $\eta_{up} = 1{,}1$ МПа $\cdot$ с соответственно. Автором настоящей работы не найдены значения параметров в законе деформирования нелинейной пружины и нелинейного демпфера. Поэтому предполагается, что величины E_0, η_0 на верхней лицевой поверхности балки имеют значения $E_{0up} = 50$ ГПа, $\eta_{0up} = 0{,}8$ МПа $\cdot$ с соответственно. Значения величин E, η, E_0, η_0 для нижней лицевой поверхности балки выбирались таким образом, чтобы отношения E_{lw}/E_{up}, η_{lw}/η_{up}, E_{0lw}/E_{0up}, η_{0lw}/η_{0up} изменялись в диапазоне $0{,}5 \div 2{,}0$ с шагом 0,5. Значения параметров f, g, p, q находятся в интервале от нуля до единицы. В данной работе принято, что $f = g = p = q = 0{,}8$.

На рис. 3 приведена зависимость скорости выделения энергии деформации от времени при различных значениях отношения E_{lw}/E_{up}. Видно, что скорость выделения энергии деформации уменьшается с увеличением отношения E_{lw}/E_{up}. Это обусловлено увеличением жесткости балки.

На рис. 4 представлена зависимость скорости выделения энергии деформации от отношения η_{lw}/η_{up} при различных значениях величины v_β. Из рис. 4 следует, что скорость выделения энергии деформации уменьшается с увеличением отношения η_{lw}/η_{up} и увеличивается с увеличением параметра v_β.

На рис. 5 показана зависимость скорости выделения энергии деформации от отношения E_{0lw}/E_{0up} при различных значениях параметра v_u. Скорость выделения энергии деформации уменьшается с увеличением отношения E_{0lw}/E_{0up} и увеличивается с увеличением параметра v_u.

На рис. 6 приведена зависимость скорости выделения энергии деформации от отношения η_{0lw}/η_{0up} при различных значениях параметра v_ψ. Видно, что при увеличении параметра v_ψ скорость выделения энергии деформации увеличивается.

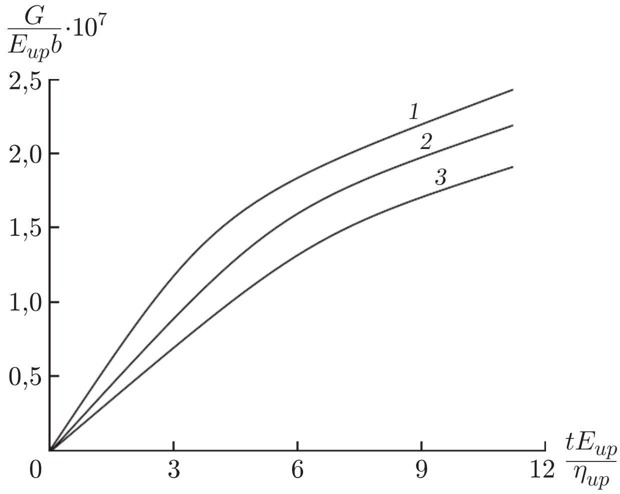

Рис. 3

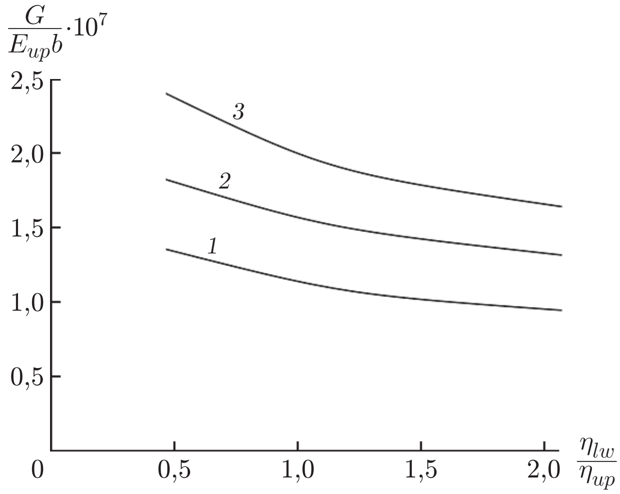

Рис. 4

Рис. 3. Зависимость скорости выделения энергии деформации от времени:
1 — $E_{lw}/E_{up} = 0{,}5$, *2* — $E_{lw}/E_{up} = 1{,}0$, *3* — $E_{lw}/E_{up} = 2{,}0$

Рис. 4. Зависимость скорости выделения энергии деформации от отношения η_{lw}/η_{up}:
1 — $v_\beta = 0{,}02 \cdot 10^{-9}$ рад/с^4, *2* — $v_\beta = 0{,}03 \cdot 10^{-9}$ рад/с^4, *3* — $v_\beta = 0{,}04 \cdot 10^{-9}$ рад/с^4

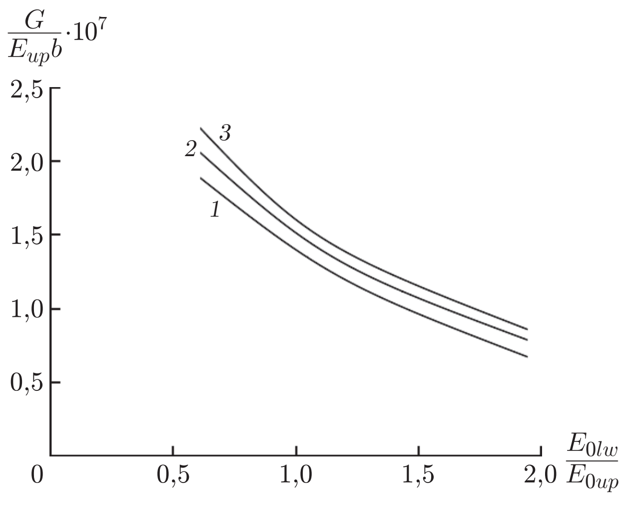

Рис. 5

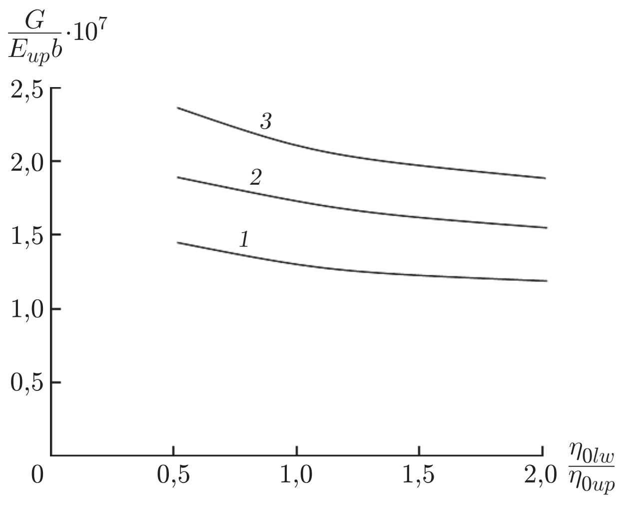

Рис. 6

Рис. 5. Зависимость скорости выделения энергии деформации от отношения E_{0lw}/E_{0up}:
1 — $v_u = 0{,}0006 \cdot 10^{-10}$ м/с^4, *2* — $v_u = 0{,}0012 \cdot 10^{-10}$ м/с^4, *3* — $v_u = 0{,}0020 \cdot 10^{-10}$ м/с^4

Рис. 6. Зависимость скорости выделения энергии деформации от отношения η_{0lw}/η_{0up}:
1 — $v_\psi = 0{,}01 \cdot 10^{-10}$ рад/с^4, *2* — $v_\psi = 0{,}02 \cdot 10^{-10}$ рад/с^4, *3* — $v_\psi = 0{,}03 \cdot 10^{-10}$ рад/с^4

Заключение. Исследовано продольное разрушение нелинейной вязкоупругой балки, механическое поведение которой описывается с использованием нелинейной вязкоупругой модели с четырьмя элементами (две пружины и два демпфера). Предполагается, что модуль упругости нелинейной пружины и коэффициент вязкости нелинейного демпфера зависят от величины деформации. Свойства материала балки являются функциями поперечной координаты z.

Полученное соотношение между напряжением, деформацией и временем используется при определении скорости выделения энергии деформации при наличии в балке продольной трещины. Проведено параметрическое исследование скорости выделения энергии деформации. Определена скорость выделения энергии деформации при различных значениях параметров определяющего соотношения.

Из результатов проведенного исследования следует, что вязкоупругие модели, свойства которых зависят от величины деформации, можно использовать для изучения продольного разрушения инженерных конструкций, изготовленных из нелинейного вязкоупругого материала, свойства которого непрерывно изменяются по пространственной координате.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Markworth A. J., Ramesh K. S., Parks W. P. (Jr.)** Review: modeling studies applied to functionally graded materials // J. Materials Sci. 1995. V. 303. P. 2183–2193.
2. **Butcher R. J., Rousseau C. E., Tippur H. V.** A functionally graded particulate composite: Measurements and failure analysis // Acta Materialia. 1999. V. 47. P. 259–268.
3. **Gasik M. M.** Functionally graded materials: bulk processing techniques // Intern. J. Materials Product Technol. 2010. V. 39. P. 20–29.
4. **Nemat-Allal M. M., Ata M. H., Bayoumi M. R., Khair-Eldeen W.** Powder metallurgical fabrication and microstructural investigations of Aluminum/Steel functionally graded material // Materials Sci. Appl. 2011. V. 2. P. 1708–1718.
5. **Uslu Uysal M.** Buckling behaviors of functionally graded polymeric thin-walled hemispherical shells // Steel Composite Structures. 2016. V. 21. P. 849–862.
6. **Zhang Y., Sun M., Zhang D.** Designing functionally graded materials with superior load-bearing properties // Acta Biomaterialia. 2012. V. 8. P. 1101–1108.
7. **Bohidar S. K., Sharma R., Mishra P. R.** Functionally graded materials: A critical review // Intern. J. Res. 2014. V. 1. P. 289–301.
8. **Hutchinson J. W., Suo Z.** Mixed mode cracking in layered materials // Adv. Appl. Mech. 1991. V. 29. P. 63–191.
9. **Dolgov N. A.** Analytical methods to determine the stress state in the substrate — coating system under mechanical loads // Strength Materials. 2016. V. 48. P. 658–667.
10. **Rizov V. I.** Delamination study of multilayered inhomogeneous beams with a smoothly changing heights // J. Appl. Mech. Tech. Phys. 2021. V. 62, N 1. P. 49–56.
11. **Rizov V. I.** Analysis of two lengthwise cracks in a viscoelastic inhomogeneous beam structure // Engng Trans. 2020. V. 68. P. 397–415.

Поступила в редакцию 28/XI 2022 г.,
после доработки — 17/I 2023 г.
Принята к публикации 27/II 2023 г.