УДК 532.516

# ТЕЧЕНИЕ МИКРОПОЛЯРНЫХ И ВЯЗКОПЛАСТИЧЕСКИХ ЖИДКОСТЕЙ В ЯЧЕЙКЕ ХЕЛЕ-ШОУ

В. В. Шелухин, В. В. Неверов

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, 630090 Новосибирск, Россия
Новосибирский государственный университет, 630090 Новосибирск, Россия
E-mails: shelukhin@list.ru, NeverovVladim@gmail.com

Для течений в тонком слое получено обобщение закона Дарси, связывающего среднюю по поперечной координате скорость и градиент давления. С учетом микровращений и предельного напряжения сдвига выведен нелинейный закон Дарси с предельным градиентом. Показано, что микрополярность жидкости проявляется в увеличении кажущейся вязкости и предельного градиента давления. Получено обобщение закона Дарси на случай пвсевдопластических и дилатантных жидкостей Хершеля — Балкли.

Ключевые слова: микрополярная вязкопластическая жидкость, предельное напряжение сдвига, ячейка Хеле-Шоу, обобщенный закон Дарси.

**Введение.** Ряд природных сред и искусственных материалов (лавины, гранулированные жидкости, кровь, текущая в капиллярах, буровой раствор со шламом при бурении скважин и т. п.) характеризуются микрополярностью и вязкопластичностью. В работе [1] предложена математическая модель, учитывающая оба этих свойства. Под микрополярностью понимается наличие микровращений и микровращательной инерции (например, движение жидких кристаллов). В рамках теории жидкости Бингама вязкопластичность означает существование предельного напряжения сдвига: движение жидкости становится твердотельным, если сдвиговые напряжения не превышают некоторого предела.

Целью данной работы является исследование течения микрополярной вязкопластической жидкости в тонком слое. Подобная задача возникает, например, при заполнении трещины гидроразрыва пласта проппантом [2]. В классической теории вязкопластических жидкостей рассматривается только одно предельное напряжение сдвига $\tau_*$, так как локальные напряжения характеризуются только тензором напряжений Коши $T$. Однако, для того чтобы описать напряжения в микрополярной жидкости, необходимо дополнительно использовать тензор моментных напряжений $N$, поэтому в работе [1] введено предельное моментное напряжение $\tau_n$. Локальные деформации в микрополярной жидкости также характеризуются двумя тензорами скоростей деформаций, с помощью которых можно вычислить градиент поля скорости и градиент поля мгновенной угловой скорости. Оба тензора скоростей деформаций должны обращаться в нуль в “сильной” твердотельной зоне. В отличие от классической жидкости Бингама в микрополярной жидкости Бингама могут присутствовать и “слабые” твердотельные зоны, в которых равен нулю только второй тензор скоростей деформаций, т. е. градиент угловой скорости, но первый тензор скоростей деформаций может быть отличным от нуля. В [1] существование “слабой” твердотельной зоны показано численно, а в данной работе этот факт устанавливается аналитическими методами. Кроме того, в настоящей работе в предположении, что толщина слоя течения является малой, получен обобщенный закон Дарси, связывающий градиент давления и среднюю по толщине скорость течения. В отличие от закона, полученного в рамках теории смазки [2], обобщенный закон Дарси является нелинейным. Для жидкости Бингама и Хершеля — Балкли установлено наличие предельного градиента давления $p_l$: течение отсутствует, если модуль градиента давления не превышает величину $p_l$. Влияние микровращений проявляется в том, что с увеличением вращательной вязкости увеличиваются как эффективная вязкость, так и предельный градиент давления $p_l$.

Течения неньютоновских жидкостей в ячейке Хеле-Шоу имеют различные применения (литье под давлением [3], сенсорные дисплеи [4] и т. д.). Такие течения жидкостей со степенной вязкостью рассматривались во многих работах (см., например, [5]), но в них не учитывались предельное напряжение сдвига и микровращения.

Теория микрополярных жидкостей для сплошной среды Коссера [6] изложена в [7]. Существует несколько подходов к описанию жидкости Бингама. В отличие от пионерской работы [8] в данной работе используется метод, развитый в [9–13].

**Определяющие уравнения.** Подобно твердому телу частица среды Коссера имеет шесть степеней свободы. Каждой материальной точке с лагранжевыми координатами $(t, \boldsymbol{\xi})$ соответствуют вектор эйлеровых координат $\boldsymbol{x}(t, \boldsymbol{\xi})$ и тройка взаимно ортогональных векторов-директоров $\boldsymbol{d}_i(t, \boldsymbol{\xi})$, $i = 1, 2, 3$. Ориентация директоров определяется ортогональным тензором $Q(t, \boldsymbol{\xi})$, а их скорость вращения характеризуется тензором $\Omega(t, \boldsymbol{x}) = Q_t Q^*$. Тензор $\Omega$ является антисимметричным и определяет локальное вращение с угловой скоростью

$$\boldsymbol{w} = (1/2)\, \boldsymbol{e}_i \times \Omega\langle \boldsymbol{e}_i \rangle = (1/2)\, \epsilon : \Omega,$$

где $\{\boldsymbol{e}_i\}_1^3$ — ортонормированный базис; $\epsilon$ — тензор Леви-Чивиты третьего ранга; $\boldsymbol{e}_i \times \boldsymbol{e}_j = \epsilon_{sij} \boldsymbol{e}_s$; $(\epsilon : \Omega)_i \equiv \epsilon_{ijk} \Omega_{jk}$.

Для матриц $A$ и $B$ размерности $3 \times 3$ скалярное произведение $A : B$ определяется формулой $A : B = A_{ij} B_{ij}$, а матрица $A^*$ в ортонормированном базисе совпадает с транспонированной. Пусть $\boldsymbol{v}(t, \boldsymbol{x})$ — поле скорости, которое в переменных Лагранжа совпадает с производной $\boldsymbol{x}_t(t, \boldsymbol{\xi})$. Тогда тензоры $B = \partial \boldsymbol{v}/\partial \boldsymbol{x} - \Omega$, $A = \partial \boldsymbol{w}/\partial \boldsymbol{x}$ являются тензорами скоростей деформаций, $A_{ij} = \partial \omega_i/\partial x_j$. Отметим, что тензоры $B$ и $A$ объективны по отношению к трансляциям и поворотам [7].

Законы сохранения масс и импульса имеют вид

$$\dot{\rho} + \rho \operatorname{div} \boldsymbol{v} = 0, \qquad \rho \dot{\boldsymbol{v}} - \operatorname{div} T = \rho \boldsymbol{f},$$

где $(\operatorname{div} T)_i = \partial T_{ij}/\partial x_j$; $\rho$ — массовая плотность; $\boldsymbol{f}$ — плотность массовых сил; точка означает материальную производную. В уравнении момента импульса

$$\rho \dot{\boldsymbol{s}} - \operatorname{div} N = \epsilon : T^* + \rho \boldsymbol{l}$$

величина $\boldsymbol{s}$ есть плотность момента импульса, $\boldsymbol{l}$ — плотность пар внешних сил. Следует отметить, что тензор напряжений Коши $T$ не является симметричным. В общем случае $\boldsymbol{s} = \Theta \boldsymbol{w}$, где $\Theta$ — симметричный тензор микроинерции, удовлетворяющий уравнению $\dot{\Theta} - \Omega\Theta + \Theta\Omega = 0$.

В отсутствие внешних источников тепла изменение полной энергии $E$ описывается уравнением

$$\rho \dot{E} = \operatorname{div}\,(T^* \boldsymbol{v} + N^* \boldsymbol{w} - \boldsymbol{q}) + \rho \boldsymbol{f} \cdot \boldsymbol{v} + \rho \boldsymbol{l} \cdot \boldsymbol{w},$$

где $E = e + \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{v}/2 + \boldsymbol{s} \cdot \boldsymbol{w}/2$; $e$ — удельная внутренняя энергия; $\boldsymbol{q}$ — приток тепла, задаваемый законом Фурье. В общем случае $e = e(\eta, \rho, \Theta)$, где $\eta$ — удельная энтропия.

Вводя давление $p = \rho^2\,\partial e/\partial\rho$ и температуру $\theta = \partial e/\partial\eta$, уравнение изменения энтропии можно записать в виде

$$\theta\rho\dot{\eta} + \operatorname{div}\boldsymbol{q} = R,$$

где $R$ — производство энтропии:

$$\theta R = S : B^d + (p+m)\operatorname{tr} B + N : A - \frac{\boldsymbol{q}\cdot\nabla\theta}{\theta}.$$

Здесь $3m = \operatorname{tr} T$; $T = S + mI$; $B^d = B - 3^{-1}(\operatorname{tr} B)I$. Ниже рассматривается случай несжимаемой жидкости, для которой $\operatorname{tr} B = 0$, поэтому необходимое условие неотрицательности производства энтропии сводится к неравенству $S : B + N : A \geqslant 0$.

В работе [1] определяющие уравнения, совместные с указанным неравенством, сформулированы следующим образом. Пусть $B_s$, $B_a$ — симметричная и антисимметричная части тензора $B$. Введем обозначения

$$B_0 \equiv B_s + \varepsilon B_a, \quad \varepsilon = \frac{\mu_2}{2\mu_1}, \quad A_0 = A_s^d + \frac{\varkappa_2}{\varkappa_1}\,A_a + \frac{\varkappa_3}{\varkappa_1}\,(\operatorname{tr} A)I.$$

С помощью субдифференциалов определяющие уравнения микрополярной вязкопластической жидкости Бингама записываются в виде

$$S \in \partial V(B_0), \qquad N \in \partial V_n(A_0), \tag{1}$$

где

$$V = \mu_1|B_0|^2 + \tau_*|B_0|, \qquad V_n = (\varkappa_1/2)|A_0|^2 + \tau_n|A_0|.$$

По определению включение $S \in \partial V(B_0)$ означает $S : (X - B_0) \leqslant V(X) - V(B_0)$ для любой матрицы $X$ размерности $3\times 3$.

Из (1) следует эквивалентная формулировка

$$S = \begin{cases} 2\mu_1 B_s + \mu_2 B_a + \tau_* B_0/|B_0|, & B_0(t,\boldsymbol{x}) \ne 0, \\ S_p(t,\boldsymbol{x}), & B_0(t,\boldsymbol{x}) = 0, \end{cases}$$

$$N = \begin{cases} \varkappa_1 A_s^d + \varkappa_2 A_a + \varkappa_3(\operatorname{tr} A)I + \tau_n A_0/|A_0|, & A_0(t,\boldsymbol{x}) \ne 0, \\ N_p(t,\boldsymbol{x}), & A_0(t,\boldsymbol{x}) = 0. \end{cases}$$

Тензоры $S_p$ и $N_p$ удовлетворяют условиям $|S_p| \leqslant \tau_*$, $|N_p| \leqslant \tau_n$, где $|S|^2 \equiv S : S$. Заметим, что при $\mu_2 = 0$ приведенная выше модель сводится к классической модели жидкости Бингама, так как $B_s = D$, $2D_{ij} = \partial v_i/\partial x_j + \partial v_j/\partial x_i$. Приведенные определяющие уравнения нетрудно обобщить на случай жидкости Хершеля — Балкли, в которой вязкость $\mu_1$ не является постоянной, а зависит от тензора $D$.

**Течение в отсутствие градиента давления.** В предположении, что градиент давления отсутствует, рассмотрим одномерное течение микрополярной жидкости Бингама вдоль оси $x_1 = x$ между двумя параллельными плоскостями, расстояние между которыми равно $2H$. В данном случае причинами возникновения течения являются граничные микровращения и движение граничных плоскостей. В случае, когда ось $x_2 = y$ направлена перпендикулярно граничным плоскостям, искомые характеристики течения определяются соотношениями

$$\boldsymbol{v} = (v(y), 0, 0)^{\mathrm{т}}, \qquad \boldsymbol{w} = (0, 0, w(y))^{\mathrm{т}},$$

$$S_{12} = S_{12}(y), \qquad S_{21} = S_{21}(y), \qquad N_{32} = N_{32}(y), \qquad N_{23} = N_{23}(y),$$

остальные компоненты тензоров $S$ и $N$ равны нулю. Введем следующие обозначения:

$$\gamma = \frac{\varkappa_1 + \varkappa_2}{2}, \qquad \tau_{n1} = \frac{\tau_n(\varkappa_1 + \varkappa_2)}{2(\varkappa_1^2 + \varkappa_2^2)}.$$

Как показано в работе [1], в слое $-H < y < H$ течение описывается уравнениями

$$0 = \partial_y S_{12}, \qquad 0 = \partial_y N_{32} + S_{21} - S_{12}; \tag{2}$$

$$\begin{gathered} S_{12} = 2\mu_1\Big(\frac{\partial_y v}{2} + \varepsilon\Big(\frac{\partial_y v}{2} + w\Big)\Big) + \frac{\tau_*}{b}\Big(\frac{\partial_y v}{2} + \varepsilon\Big(\frac{\partial_y v}{2} + w\Big)\Big), \qquad b \neq 0, \\ S_{21} = 2\mu_1\Big(\frac{\partial_y v}{2} - \varepsilon\Big(\frac{\partial_y v}{2} + w\Big)\Big) + \frac{\tau_*}{b}\Big(\frac{\partial_y v}{2} - \varepsilon\Big(\frac{\partial_y v}{2} + w\Big)\Big), \qquad b \neq 0; \\ N_{32} = \gamma\partial_y w + \tau_{n1}\operatorname{sign}\partial_y w, \qquad \partial_y w \neq 0; \\ S_{12}^2 + S_{21}^2 \leqslant \tau_*^2, \qquad N_{32}^2 \leqslant \tau_{n1}^2, \qquad b = 0, \end{gathered} \tag{3}$$

где

$$\varepsilon = \frac{\mu_2}{2\mu_1}, \qquad \frac{b^2}{2} = \Big(\frac{\partial_y v}{2}\Big)^2 + \varepsilon^2\Big(\frac{\partial_y v}{2} + w\Big)^2.$$

Рассмотрим краевые условия

$$v\big|_{y=\pm H} = 0, \qquad w\big|_{y=\pm H} = \pm w_1 \qquad (w_1 > 0). \tag{4}$$

Условия (4) позволяют искать решение, для которого функция $v(y)$ является четной, а $w(y)$ — нечетной. В данном случае $b(y)\big|_{y=0} = 0$, поэтому естественно предположить, что в течении имеется некоторая "сильная" твердотельная зона $|y| < h$ $(h < H)$, в которой $w(y) = 0$, $v(y) = \text{const}$.

Из уравнений (2) следует, что $S_{12} = \text{const}$. В то же время вследствие симметрии течения силы сопротивления, действующие на жидкий объем $|y| < h$, в точках $y = h$ и $y = -h$ должны быть равны: $S_{12}(-h) = -S_{12}(h)$. Поэтому $S_{12} = 0\ \forall x$. Отсюда, в частности, следует

$$\partial_y v = -\frac{2\varepsilon w}{1 + \varepsilon}; \tag{5}$$

$$S_{21} = -\frac{4\mu_1\varepsilon w}{1 + \varepsilon} - \tau_*\operatorname{sign} w, \quad N_{32} = \gamma\partial_y w + \tau_{n1}\operatorname{sign}\partial_y w, \quad \partial_y w \neq 0. \tag{6}$$

В жидкой зоне $h < y < H$ выполняются равенства

$$S_{12} = 0, \qquad S_{21} = -\frac{4\mu_1\varepsilon w}{1 + \varepsilon} - \tau_*, \qquad N_{32} = \gamma\partial_y w + \tau_{n1}.$$

Кроме того, в силу непрерывности функции $N_{32}(y)$ выполняется равенство $\partial_y w\big|_{y=h} = 0$. Таким образом, функция $w$ является решением краевой задачи

$$0 = \partial_y^2 w - \lambda^2 w - \tau_*/\gamma, \quad w\big|_{y=h} = 0, \quad \partial_y w\big|_{y=h} = 0, \quad w\big|_{y=H} = w_1$$

с неизвестным параметром $h$, где $\lambda^2 = 4\mu_1\varepsilon/[\gamma(1 + \varepsilon)]$.

Введем обозначения

$$w_h = \tau_*(1 + \varepsilon)/(4\mu_1\varepsilon), \qquad w_H = w_1 + w_h.$$

Тогда решение имеет вид

$$w = -w_h + \frac{w_H \operatorname{sh}\lambda(y - h) + w_h \operatorname{sh}\lambda(H - y)}{\operatorname{sh}\lambda(H - h)}, \qquad h < y < H.$$

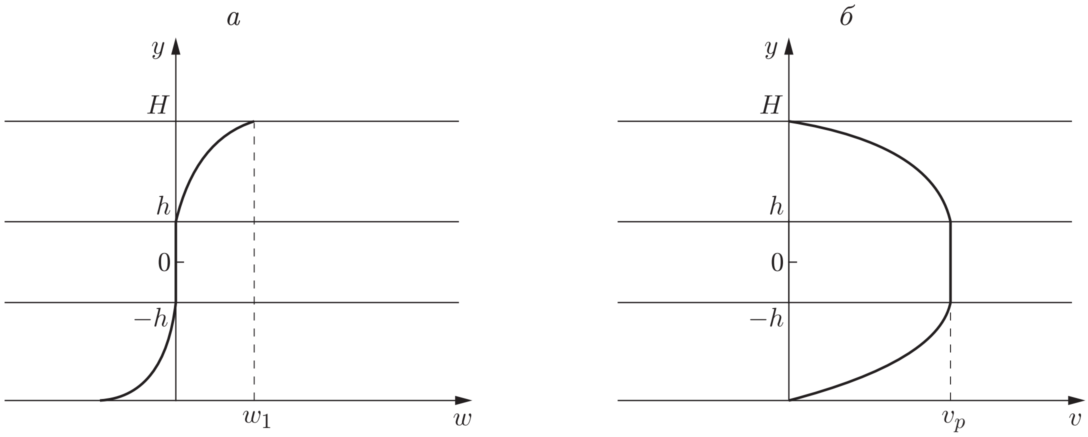


Рис. 1. Профили спина (*а*) и скорости (*б*) для течения с “сильной” твердотельной зоной при краевых условиях $w|_{y=\pm H} = \pm w_1$, $w_1 > 0$, $v|_{y=\pm H} = 0$

Отсюда, в частности, следует, что $w > 0$ при $h < y < H$. Условие $\partial_y w\big|_{y=h} = 0$ приводит к равенству

$$\operatorname{ch}\lambda(H-h) = \frac{w_H}{w_h} \equiv 1 + \frac{w_1}{w_h}, \tag{7}$$

из которого однозначно определяется толщина твердотельной зоны. Отметим, что условие (7) накладывает ограничение на граничный спин: $w_1 < (\operatorname{ch}\lambda H - 1)w_h \equiv w_1^*$; при $w_1 = w_1^*$ толщина твердотельного слоя $h$ равна нулю, и в силу равенства (6) функция $S_{21}(y)$ имеет разрыв при $y = 0$. При $w_1 = 0$ толщина твердотельной зоны принимает значение $H$, поэтому течение отсутствует.

В жидком слое $-H < y < -h$ функция $w(y)$ восстанавливается путем ее продолжения с помощью нечетной функции. Затем определяется скорость в виде представления

$$v(y) = \frac{2\varepsilon}{1+\varepsilon}\int\limits_y^H w\,dy, \qquad h < y < H,$$

следующего из (5) и (4). В частности, в твердотельной зоне $|y| \leqslant h$ выражение для скорости записывается в виде

$$v_p = -\frac{\tau_*(H-h)}{2\mu_1} + \frac{\operatorname{ch}\lambda(H-h) - 1}{\operatorname{sh}\lambda(H-h)}\Big(w_1 + \frac{\tau_*(1+\varepsilon)}{2\mu_1\varepsilon}\Big)\sqrt{\frac{\gamma\varepsilon}{\mu_1(1+\varepsilon)}}.$$

Функции $S_{21}$ и $N_{32}$ в жидких зонах восстанавливаются по формулам (6). Так как $\partial_y w > 0$ при $|y| > h$, то $\partial_y^2 v < 0$ при $|y| > h$. Эти условия определяют форму профилей скорости и спина, которые приведены на рис. 1.

Путем интегрирования выражения для локальной скорости находим среднюю скорость

$$U \equiv \frac{1}{2H}\int\limits_{-H}^{H} v\,dy = -\frac{\tau_*(H^2-h^2)}{2\nu_1} + w_h a + w_H b,$$

где

$$a = \frac{4\varepsilon}{\lambda(1+\varepsilon)\operatorname{sh}\lambda(H-h)}\Big[h\operatorname{ch}\lambda(H-h) - H + \frac{\operatorname{sh}\lambda(H-h)}{\lambda}\Big],$$

$$b = \frac{4\varepsilon}{\lambda(1+\varepsilon)\operatorname{sh}\lambda(H-h)}\Big[H\operatorname{ch}\lambda(H-h) - h - \frac{\operatorname{sh}\lambda(H-h)}{\lambda}\Big].$$

Следовательно, при малых $\varepsilon$ справедливо представление

$$U = \frac{w_1}{2}\sqrt{\frac{\varepsilon\gamma}{\mu_1(1+\varepsilon)}}\operatorname{Arch}\Big(1 + \frac{\mu_1\varepsilon w_1}{\tau_*(1+\varepsilon)}\Big) + o(\varepsilon),$$

которое связывает микровращения на граничных плоскостях с поступательным движением.

Рассмотрим случай, когда в течении отсутствует зона "сильного" твердотельного движения, а имеется только зона "слабого" твердотельного движения, в которой $\partial_y v \neq 0$, $\partial_y w = 0$. Заменим краевые условия (4) на следующие:

$$v\big|_{y=-H} = 0, \quad v\big|_{y=H} = v_H, \quad w\big|_{y=\pm H} = w_1 \qquad (w_1 > 0).$$

По-прежнему выполняются уравнения (2). Как и выше, будем искать решение, для которого $S_{12} = 0$. Поэтому выполняются равенства (5) и (6). Покажем, что можно подобрать параметры $w_1$ и $v_H$, так чтобы "слабая" твердотельная зона занимала слой $|y| < h$, а функция $w(y)$ являлась четной и положительной.

В жидкой зоне $h < y < H$ функция $w$ является решением краевой задачи

$$0 = \partial_y^2 w - \lambda^2 w - \tau_*/\gamma, \qquad \partial_y w\big|_{y=h} = 0, \quad w\big|_{y=H} = w_1,$$

а в жидкой зоне $-H < y < -h$ — решением краевой задачи

$$0 = \partial_y^2 w - \lambda^2 w - \tau_*/\gamma, \qquad \partial_y w\big|_{y=-h} = 0, \quad w\big|_{y=-H} = w_1.$$

Эти решения имеют вид

$$w = w_1 - \frac{w_h[\operatorname{ch}\lambda h - \operatorname{ch}\lambda(-h-y)]}{\operatorname{ch}\lambda h}, \qquad -H < y < -h,$$

$$w = w_1 - \frac{w_h[\operatorname{ch}\lambda(H-h) - \operatorname{ch}\lambda(y-h)]}{\operatorname{ch}\lambda(H-h)}, \qquad h < y < H.$$

Условие $w(-h) = w(h)$ выполняется автоматически в силу симметрии задачи. При этом спин в твердотельной зоне определяется по формуле

$$w(h) = w_1 - \frac{\tau_*(1+\varepsilon)(\operatorname{ch}\lambda h - 1)}{4\mu_1\varepsilon} \equiv w_p.$$

Следует отметить, что условие $w_p > 0$ накладывает ограничение на граничные микровращения $w_1$.

Для определения толщины "слабого" твердотельного слоя $h$ используем формулу (3) для представления функции $N_{32}$. Так как $w_y > 0$ при $y > h$ и $w_y < 0$ при $y < -h$, то $N_{32}\big|_{y=\pm h} = \pm\tau_{n1}$.

Поскольку в жидкой и твердотельной областях течения $b \neq 0$, представление (6) для $S_{21}$ справедливо в любой точке $y$ интервала $|y| < H$. Так как $w > 0$, то

$$S_{21} = -4\mu_1\varepsilon w_p/(1+\varepsilon) - \tau_*, \qquad |y| < h.$$

Интегрируя первое равенство в (2) по интервалу $(-h, h)$, получаем уравнение для определения величины $h$

$$0 = 2\tau_{n1} - 2h(\tau_* + 4\mu_1\varepsilon w_p(h)/(1+\varepsilon)). \tag{8}$$

При достаточно больших $w_1$ уравнение (8) всегда имеет решение, для которого $h < H$. Действительно, уравнение (8) можно записать в виде

$$F(h) = 2 + \frac{4\mu_1 \varepsilon w_1}{\tau_*(1+\varepsilon)}, \qquad F(h) \equiv \operatorname{ch} \lambda h + \frac{\tau_{n1}}{\tau_* h}.$$

Пусть $w_1$ удовлетворяет условию

$$2 + \frac{4\mu_1 \varepsilon w_1}{\tau_*(1+\varepsilon)} \geqslant \min_{0<h<H} F(h),$$

тогда уравнение (8) имеет решение, поскольку $F(h) \to \infty$ при $h \to 0$. Очевидно, $h(w_1) \to 0$ при $w_1 \to \infty$.

После того как установлено значение $h$ и найдена функция $w(y)$, можно определить остальные неизвестные. В частности,

$$S_{12} = 0, \quad S_{21} = -\frac{4\mu_1 \varepsilon w}{1+\varepsilon} - \tau_*, \quad N_{32}\big|_{|y|>h} = \gamma\, \partial_y w + \tau_{n1} \operatorname{sign} w_y, \quad v_H = v(y)\big|_{y=H}$$

где

$$v(y) = -\frac{2\varepsilon}{1+\varepsilon} \int\limits_0^y w\, dy.$$

Так как в твердотельной зоне $w(y) = \mathrm{const} = w_p$, то в этой зоне скорость $v(y)$ линейно зависит от $y$:

$$v = v_- - \frac{2\varepsilon w_p (y+h)}{1+\varepsilon}, \quad |y| < h, \qquad v_\pm = v(\pm h).$$

Такое течение можно трактовать как вращение абсолютно твердого тела: скорости точек на оси $y$ в твердотельной зоне таковы, что эти точки можно считать “вмороженными” в некоторое абсолютно твердое тело, которое вращается с эффективной угловой скоростью $2\varepsilon w_p/(1+\varepsilon)$ в положительном направлении вокруг точки на оси $y$ с координатой $y = h(v_- + v_+)/(v_+ - v_-)$. Так как $S_{21} = \mathrm{const}$ в твердотельной зоне, то в этой зоне $N_{32}(y)$ меняется по линейному закону:

$$N_{32} = (y+h)(4\mu_1 \varepsilon w_p/(1+\varepsilon) + \tau_*) - \tau_{n1}, \qquad |y| < h.$$

На рис. 2 представлены профили скорости и спина, на рис. 3 — профили напряжений. Заметим, что вне твердотельной зоны скорость не является линейной функцией, так как $\partial_y^2 v < 0$ при $y > h$ и $\partial_y^2 v > 0$ при $y < -h$.

В случае $\tau_{n1}/\tau_* < H$ приведенное выше решение со “слабой” твердотельной зоной преобразуется в решение с “сильной” твердотельной зоной, если $w_1$ и $h$ удовлетворяют условиям

$$w_1 = \frac{\tau_*(1+\varepsilon)}{4\mu_1 \varepsilon} (\operatorname{ch} \lambda (H-h) - 1), \qquad h = \frac{\tau_{n1}}{\tau_*}.$$

При этом

$$w = w_p = 0, \qquad \partial_y v = 0, \qquad |y| < h.$$

Соответствующие профили скорости и спина представлены на рис. 4.

**Одномерные течения в ячейке Хеле-Шоу.** Проведем асимптотический анализ течения микрополярной жидкости Бингама в канале, считая толщину канала малой. Перейдем к безразмерным переменным:

$$v = V v', \qquad y = H y', \qquad w = w_0 w'.$$

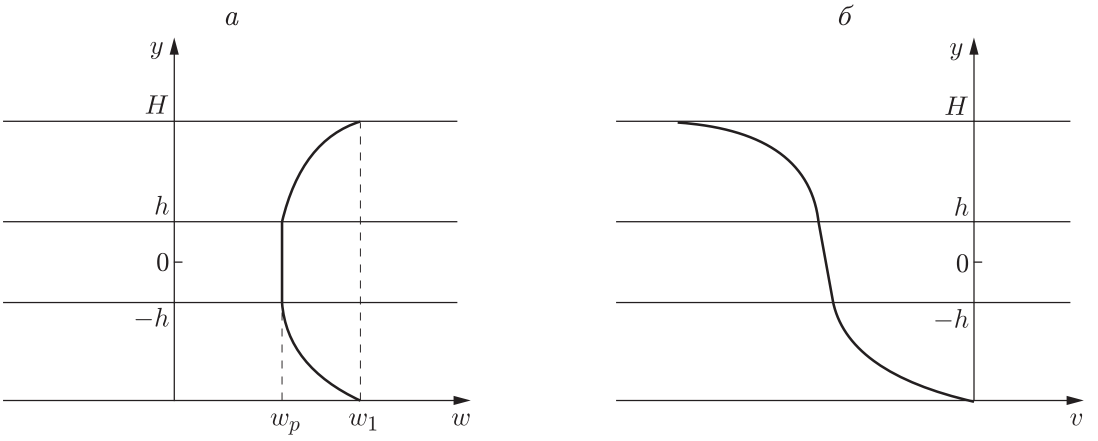


Рис. 2. Профили спина ($a$) и скорости ($б$) для течения со “слабой” твердотельной зоной при краевых условиях $w|_{y=\pm H} = \pm w_1$, $w_1 > 0$, $v|_{y=-H} = 0$, $v|_{y=H} = v_H(w_1)$

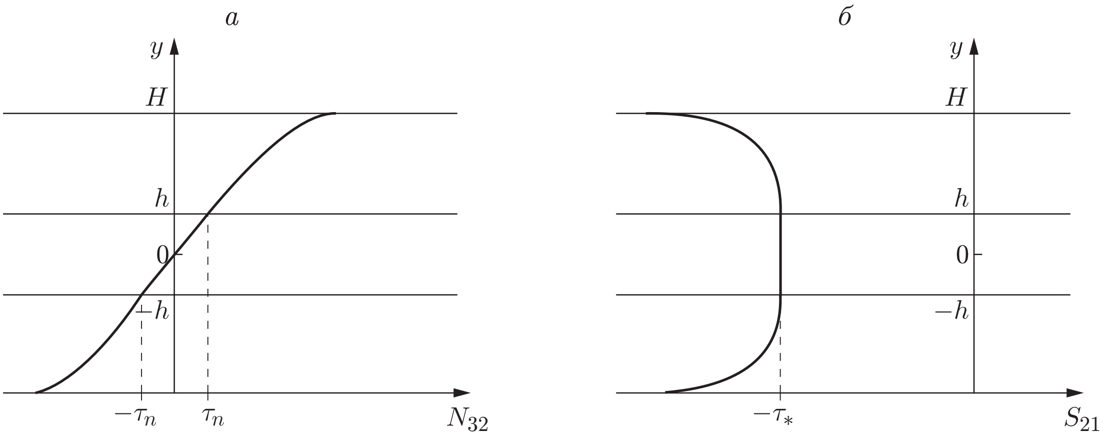


Рис. 3. Профили пар напряжений $N_{32}$ ($a$) и напряжений $S_{21}$ ($б$) для течения со “слабой” твердотельной зоной при краевых условиях $w|_{y=\pm H} = \pm w_1 > 0$, $v|_{y=-H} = 0$, $v|_{y=H} = v_H(w_1) < 0$

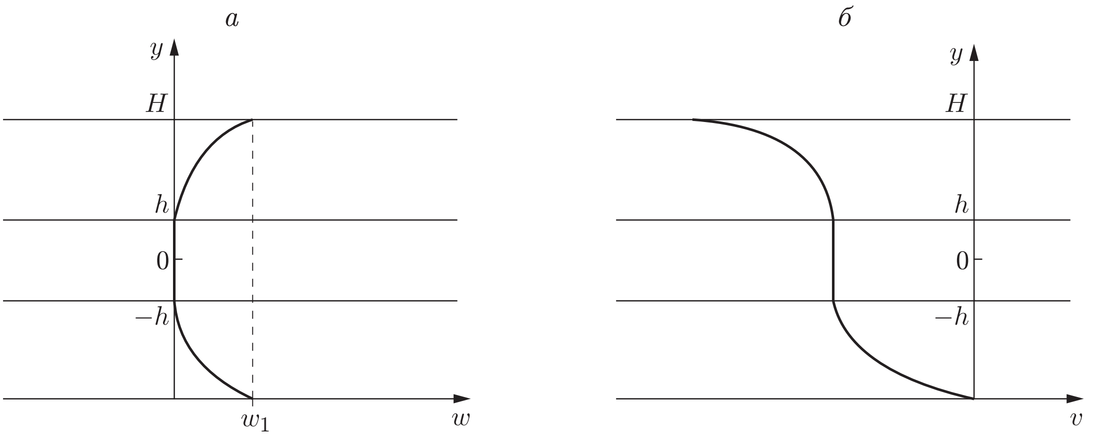


Рис. 4. Профили спина ($a$) и скорости ($б$) для течения с “сильной” твердотельной зоной при краевых условиях $w|_{y=\pm H} = \pm w_1$, $w_1 > 0$, $v|_{y=-H} = 0$, $v|_{y=H} = v_H(w_1) < 0$

Здесь

$$V = L/T, \qquad w_0 = 1/T, \qquad H/L = \delta,$$

$L$, $V$, $w_0$, $T$ — характерные длина, скорость, частота и время, причем $w_0 = 1/T$. Параметр $\delta$ считается малым. В случае одномерного течения вдоль оси $x_1 \equiv x$ единственными ненулевыми компонентами тензора $S$ являются $S_{12}$ и $S_{21}$. В новых переменных для жидкой зоны ($\partial_y v \neq 0$) имеем

$$S_{12} = \frac{2\mu_1 w_0}{\delta}\Big[\frac{\partial_{y'}v'}{2} + \varepsilon\Big(\frac{\partial_{y'}v'}{2} + \delta w'\Big)\Big] + \tau_1 \frac{\partial_{y'}v'/2 + \varepsilon(\partial_{y'}v'/2 + \delta w')}{\sqrt{2[(\partial_{y'}v'/2)^2 + \varepsilon^2(\partial_{y'}v'/2 + \delta w')^2]}},$$

где

$$\tau_1 = \tau_*/\sqrt{2(1+\varepsilon^2)}.$$

Пренебрегая малым членом $\delta w'$, в размерных переменных получаем представления

$$\tilde{S}_{12} = \tilde{S}_{21} = \mu_1\,\partial_y v + \tau_1 \operatorname{sign}\partial_y v,$$

$$S_{12} = (1+\varepsilon)\tilde{S}_{12}, \qquad S_{21} = (1-\varepsilon)\tilde{S}_{21}, \qquad \partial_y v \neq 0.$$

Так как в жидких зонах $\tilde{S}_{12} = \tilde{S}_{21}$, то свойство симметрии естественно распространить на твердотельную зону $|y| < h$, в которой $\partial_y v = 0$, $w = 0$. При $|y| < H$ уравнения (2) принимают вид

$$0 = -p_x y + (1+\varepsilon)\tilde{S}_{12}, \qquad 0 = \partial_y N_{32} + (1-\varepsilon)\tilde{S}_{21} - (1+\varepsilon)\tilde{S}_{12},$$

где

$$N_{32} = \gamma w_y + \tau_{n1}\operatorname{sign}\partial_y w, \qquad \partial_y w \neq 0,$$

$$|N_{32}| \leqslant \tau_{n1}, \qquad \partial_y w = 0, \qquad |\tilde{S}_{12}| \leqslant \tau_1, \qquad \partial_y v = 0.$$

Краевые условия выбираются в виде условий проскальзывания [14]

$$v\big|_{y=\pm H} = 0, \qquad w + \Lambda\,\partial_y v\big|_{y=\pm H} = 0, \tag{9}$$

где $\Lambda = \mathrm{const}$, $0 < \Lambda < 1$.

Будем искать решение задачи, для которого $v(y)$, $w(y)$ — четная и нечетная функции соответственно. Полагая $p_x < 0$, найдем толщину твердотельного слоя из условия

$$(1+\varepsilon)\tilde{S}_{12}\big|_{y=h} = -(1+\varepsilon)\tau_1 = p_x h.$$

Тогда

$$h = \tau_1(1+\varepsilon)/|p_x|.$$

Введем число Бингама

$$\beta_1 = \frac{|p_x|H}{\tau_1(1+\varepsilon)} \equiv \frac{|p_x|H\sqrt{2(1+\varepsilon^2)}}{\tau_*(1+\varepsilon)}.$$

Условие $h < H$ означает, что $\beta_1 > 1$. Если градиент давления мал, т. е. $\beta_1 \leqslant 1$, то течение отсутствует.

Из первого уравнения в (9) находим

$$\partial_y v = \frac{p_x y}{\mu_1(1+\varepsilon)} + \frac{\tau_1}{\mu_1}\operatorname{sign} y, \qquad |y| > h. \tag{10}$$

Интегрируя уравнение (10) и используя краевые условия (9), получаем представление для скорости в жидкой зоне

$$v(y) = -\frac{p_x(H^2 - y^2)}{2\mu_1(1+\varepsilon)} + \frac{\tau_1}{\mu_1}\,(|y| - H), \qquad |y| > h.$$

Следовательно, скорость в твердотельной зоне равна

$$v(y) = v(h) = -\frac{p_x(H-h)^2}{2\mu_1(1+\varepsilon)} \equiv v_p, \qquad |y| < h.$$

Результаты вычислений показывают, что выражение для средней скорости $U = \dfrac{1}{2H}\displaystyle\int\limits_{-H}^{H} v\,dy$ имеет вид

$$U = -\begin{cases} 0, & |p_x| \leqslant \tau_*(1+\varepsilon)/(H\sqrt{2(1+\varepsilon^2)}\,) \equiv p_l, \\ p_x H^2/(3\mu_a(|p_x|, \varepsilon, H, \tau_*)), & |p_x| > p_l, \end{cases} \tag{11}$$

где $\mu_a$ — кажущаяся вязкость:

$$\mu_a = \frac{\mu_1(1+\varepsilon)}{f(\beta_1)}, \qquad f(\beta_1) = \frac{1}{2}\Big(1 - \frac{1}{\beta_1}\Big)^2\Big(2 + \frac{1}{\beta_1}\Big).$$

Нетрудно показать, что вязкость $\mu_a$ и предельный градиент давления $p_l$ возрастают с увеличением $\varepsilon$ в интервале $0 < \varepsilon < 1$. Если $\tau_* = 0$, $\varepsilon = 0$, то справедливо равенство $\mu_a = \mu_1$, поэтому представление (11) совпадает с известной формулой для скорости в теории смазки [2]. Таким образом, учет микровращений влияет как на кажущуюся вязкость, так и на величину предельного градиента давления, причем с увеличением модуля градиента давления кажущаяся вязкость уменьшается по нелинейному закону:

$$\mu_a\big|_{|p_x| = p_l} = \infty, \qquad \mu_a\big|_{|p_x| = \infty} = \mu_1(1+\varepsilon).$$

Рассмотрим микрополярную жидкость Хершеля — Балкли, для которой постоянная вязкость $\mu_1$ заменяется функцией

$$\mu_1 = \mu_0 I_2^{(n-1)/2}, \qquad I_2 = \omega_0^{-2} D : D.$$

Здесь $I_2$ — безразмерный второй инвариант тензора $D$; $\omega_0$ — характерная частота; условия $n = 1$, $n > 1$, $n < 1$ соответствуют ньютоновской, дилатантной и псевдопластической жидкостям. В случае одномерного течения в слое $|y| < H$ в направлении оси $x$ справедливо выражение $I_2 = |\partial_y v|^2/(2\omega_0^2)$.

Для жидкости Хершеля — Балкли вместо (10) следует использовать равенство

$$\mu_1(\partial_y v)\,\partial_y v = p_x y/(1+\varepsilon) + \tau_1 \operatorname{sign} y. \tag{12}$$

В предположении, что $p_x < 0$, из определений числа Бингама $\beta_1$ и толщины твердотельного слоя $h$ следует

$$\frac{p_x y}{1+\varepsilon} + \tau_1 = \tau_1\Big(1 - \frac{\beta_1 y}{H}\Big) = \tau_1\Big(1 - \frac{y}{h}\Big), \qquad y > h.$$

Для четной функции $v(y)$ равенство (12) эквивалентно равенству

$$\partial_y v = -\sqrt{2}\,\omega_0 \operatorname{sign} y\Big(\frac{\tau_1(|y|/h - 1)}{\sqrt{2}\,\mu_0\omega_0}\Big)^{1/n}, \qquad |y| > h.$$

Интегрируя это выражение с учетом краевых условий (9), получаем представление для скорости

$$v(y) = A\Big[\Big(\frac{H}{h}-1\Big)^{1+1/n} - \Big(\frac{|y|}{h}-1\Big)^{1+1/n}\Big], \qquad |y|>h,$$

где

$$A = \frac{n\sqrt{2}\,\omega_0 h}{n+1}\Big(\frac{\tau_1}{\sqrt{2}\,\omega_0\mu_0}\Big)^{1/n}.$$

В частности, в твердотельной зоне скорость равна

$$v_p \equiv v(h) = A(H/h-1)^{1+1/n}.$$

Нетрудно получить выражение для средней скорости

$$U \equiv \frac{1}{2H}\int\limits_{-H}^{H} v\,dy = -\begin{cases} 0, & |p_x| \leqslant p_l, \\ p_x H^2/(3\mu_a(|p_x|,\varepsilon,H,\tau_*)), & |p_x| > p_l, \end{cases} \tag{13}$$

где

$$p_l = \frac{\tau_*(1+\varepsilon)}{H\sqrt{2(1+\varepsilon^2)}}, \qquad \mu_a = \frac{\mu_1(1+\varepsilon)}{f(\beta_1)}\Big(\frac{\tau_1}{\sqrt{2}\omega_0\mu_0}\Big)^{1-1/n},$$

$$f(\beta_1) = \frac{3n^2}{(n+1)(2n+1)}\Big(1-\frac{1}{\beta_1}\Big)^{1+1/n}\Big(1+\frac{1}{n}+\frac{1}{\beta_1}\Big)\Big(\frac{1}{\beta_1}\Big)^{1-1/n}.$$

Заметим, что при $n=1$ формулы (11) и (13) совпадают.

**Двумерные течения в ячейке Хеле-Шоу.** Рассмотрим обобщение формулы (13) на случай двумерных течений в слое $|x_2|<H$, $x_2\equiv y$ при наличии заданного градиента давления

$$\nabla p = (\partial_{x_1}p, 0, \partial_{x_3}p)^{\mathrm{T}} = \mathrm{const}\,.$$

Сначала исследуем жидкость Бингама. По-прежнему будем полагать, что скорость и спин $(v_1,0,v_3)$, $(w_1,0,w_3)$ зависят лишь от поперечной координаты $y$. Для таких течений

$$D_{12} = \partial_y v_1/2, \qquad D_{23} = \partial_y v_3/2, \qquad D_{21} = D_{12}, \qquad D_{32} = D_{23},$$

$$R_{12} = \partial_y v_1/2 + w_3, \qquad R_{23} = -\partial_y v_3/2 + w_1, \qquad R_{21} = -R_{12}, \qquad R_{32} = -R_{23}.$$

Остальные компоненты тензоров $D$ и $R$ равны нулю. Введем двумерные векторы

$$\boldsymbol{v} = (v_1, v_3)^{\mathrm{T}}, \qquad \boldsymbol{w}^{\perp} = (w_3, -w_1)^{\mathrm{T}}, \qquad \nabla p = (\partial_{x_1}p, \partial_{x_3}p)^{\mathrm{T}}.$$

Тогда

$$S_{ij} = 2\mu_1(D_{ij}+\varepsilon R_{ij}) + (\tau_*/b)(D_{ij}+\varepsilon R_{ij}), \qquad b\neq 0,$$

где

$$b^2/2 = |\partial_y\boldsymbol{v}/2|^2 + \varepsilon^2|\partial_y\boldsymbol{v}/2+\boldsymbol{w}^{\perp}|^2.$$

Введем также обозначения

$$\tilde S_{12} = \frac{S_{12}}{1+\varepsilon}, \qquad \tilde S_{32} = \frac{S_{32}}{1+\varepsilon}, \qquad \tilde S_{21} = \frac{S_{21}}{1-\varepsilon}, \qquad \tilde S_{23} = \frac{S_{23}}{1-\varepsilon}.$$

Как и в одномерном случае, при малой толщине слоя матрица $\tilde S_{ij}$ симметрична и справедливо представление

$$(\tilde S_{12}, \tilde S_{32})^{\mathrm{T}} \equiv \frac{\partial_y\boldsymbol{v}}{2}\Big(2\mu_1 + \frac{\tau_1}{|\partial_y\boldsymbol{v}/2|}\Big), \qquad \partial_y\boldsymbol{v}\neq 0. \tag{14}$$

Кроме того,

$$\tilde S_{12}^2 + \tilde S_{32}^2 \leqslant \tau_1^2, \qquad \partial_y \boldsymbol{v} = 0. \tag{15}$$

Уравнения импульсов имеют вид

$$0 = -\partial_{x_1} p + \partial_y S_{12}, \qquad 0 = -\partial_{x_3} p + \partial_y S_{32}.$$

Интегрируя эти уравнения с учетом нечетности функций $S_{12}$ и $S_{32}$, получаем

$$(\tilde S_{12}, \tilde S_{32})^{\text{т}} = y\nabla p/(1+\varepsilon).$$

Отсюда с помощью условия (15) находим толщину твердотельного слоя

$$h = \tau_1(1+\varepsilon)/|\nabla p|.$$

Используя (14), получаем равенство

$$\frac{\partial_y \boldsymbol{v}}{2}\Big(2\mu_1 + \frac{\tau_1}{|\partial_y \boldsymbol{v}/2|}\Big) = \frac{y\nabla p}{1+\varepsilon}, \qquad |y| > h,$$

из которого сначала находим модуль вектора $\partial_y \boldsymbol{v}$, а затем и сам вектор:

$$\Big|\frac{\partial_y \boldsymbol{v}}{2}\Big| = \frac{|\nabla p|(|y| - h)}{2\mu_1(1+\varepsilon)}, \qquad \frac{\partial_y \boldsymbol{v}}{2} = \operatorname{sign} y\, \frac{\nabla p(|y| - h)}{2\mu_1(1+\varepsilon)}, \qquad |y| > h.$$

Путем интегрирования последнего равенства, как и в одномерном случае, получаем выражение для средней скорости

$$\boldsymbol{U} = -\begin{cases} 0, & |\nabla p| \leqslant \tau_*(1+\varepsilon)/(H\sqrt{2(1+\varepsilon^2)}\,) \equiv p_l, \\ H^2\nabla p/(3\mu_a(|\nabla p|, \varepsilon, H, \tau_*)), & |\nabla p| > p_l, \end{cases} \tag{16}$$

где

$$\mu_a = \mu_1(1+\varepsilon)/f(\beta_1),$$

$$f(\beta_1) = \frac{1}{2}\Big(1 - \frac{1}{\beta_1}\Big)^2\Big(2 + \frac{1}{\beta_1}\Big), \qquad \beta_1 = \frac{|\nabla p| H\sqrt{2(1+\varepsilon^2)}}{\tau_*(1+\varepsilon)}.$$

Обобщая полученные результаты на случай микрополярной жидкости Хершеля — Балкли, имеем

$$\boldsymbol{U} = -\begin{cases} 0, & |\nabla p| \leqslant \tau_*(1+\varepsilon)/(H\sqrt{2(1+\varepsilon^2)}\,) \equiv p_l, \\ H^2\nabla p/(3\mu_a(|\nabla p|, \varepsilon, H, \tau_*)), & |\nabla p| > p_l, \end{cases} \tag{17}$$

где

$$\mu_a = \frac{\mu_1(1+\varepsilon)}{f(\beta_1)}\Big(\frac{\tau_1}{\sqrt{2}\omega_0\mu_0}\Big)^{1-1/n},$$

$$f(\beta_1) = \frac{3n^2}{(n+1)(2n+1)}\Big(1 - \frac{1}{\beta_1}\Big)^{1+1/n}\Big(1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{\beta_1}\Big)\Big(\frac{1}{\beta_1}\Big)^{1-1/n}.$$

**Заключение.** В отличие от течения ньютоновской вязкой жидкости одномерное течение микрополярной вязкопластической жидкости Хершеля — Балкли между двумя параллельными плоскостями обладает рядом особенностей. Вследствие наличия предельного напряжения сдвига внутри слоя могут возникать твердотельные зоны течения двух типов: 1) скорость внутри твердотельного слоя не зависит от вертикальной координаты; 2) скорость является линейной функцией вертикальной координаты. В первом случае внутри твердотельного слоя локальные микровращения отсутствуют, во втором случае локальный спин не зависит от вертикальной координаты.

В случае когда толщина слоя мала, методом асимптотического анализа исследовано течение типа течения Хеле-Шоу, возникающее под действием градиента давления. Получено обобщение закона Дарси для средней (по вертикальной координате) скорости в зависимости от градиента давления. В отличие от модели ньютоновской вязкой жидкости в модели, учитывающей микровращения, происходит увеличение кажущейся вязкости. Такая вязкость является убывающей функцией модуля градиента давления, причем она обращается в бесконечность, когда градиент давления достигает значений, равных предельному градиенту.

В случае вязкопластических течений учет микровращений приводит к увеличению предельного градиента давления, который препятствует возникновению течений при малых градиентах давления.

## ЛИТЕРАТУРА


1. **Shelukhin V. V., Růžička M.** On Cosserat — Bingham fluids // Z. angew. Math. Mech. 2013. Bd 93, N 1. S. 57–72.
2. **Economides M. J.** Reservoir simulation. 3rd ed. / M. J. Economides, K. G. Nolte. Chichester: Wiley, 2000.
3. **Hieber C. A.** Melt viscosity characterization and its applications to injection molding // Injection and compression molding fundamentals / Ed. by A. I. Isaev. N. Y.: Marcel Dekker, 1987. Chap. 1.
4. **Van Doorn C. Z.** Dynamic behavior of twisted nematic liquid-crystal layeres in switched fields // J. Appl. Phys. 1975. V. 46. P. 3738–3746.
5. **Kondic L., Shelley M. J., Palffy-Muhoray P.** Non-Newtonian Hele-Show flow and the Saffman — Taylor instability // Phys. Rev. Lett. 1998. V. 80, N 7. P. 1433–1436.
6. **Cosserat E.** Théorie des corps déformables / E. Cosserat, F. Cosserat. P.: Herman et Fils, 1909.
7. **Eringen A. C.** Microcontinuum field theories. N. Y.: Springer-Verlag, 1999.
8. **Duvaut G., Lions J. L.** Inequalities in mechanics and physics. Berlin: Springer-Verlag, 1976.
9. **Basov I. V., Shelukhin V. V.** Generalized solutions to the equations of compressible Bingham flows // Z. angew. Math. Mech. 1999. Bd 79, N 3. S. 185–192.
10. **Basov I. V., Shelukhin V. V.** Nonhomogeneous incompressible Bingham viscoplastic as a limit of nonlinear fluids // J. Non-Newtonian Fluid Mech. 2007. V. 142. P. 95–103.
11. **Málek J., Růžička M., Shelukhin V. V.** Herschel — Bulkley fluids: existence and regularity of steady flows // Math. Models Methods Appl. Sci. 2005. V. 15, N 12. P. 1845–1861.
12. **Shelukhin V. V.** Bingham viscoplastic as a limit of non-Newtonian fluids // J. Math. Fluid Mech. 2002. V. 4, N 2. P. 1–19.
13. **Amirat Y., Shelukhin V.** Nonhomogeneous incompressible Herschel — Bulkley fluid flows between two eccentric cylinders // J. Math. Fluid Mech. 2013. V. 15, N 4. P. 635–661.
14. **Мигун Н. П.** Гидродинамика и теплообмен градиентных течений микроструктурной жидкости / Н. П. Мигун, П. П. Прохоренко. Минск: Наука и техника, 1984.


*Поступила в редакцию 20/I 2014 г.*