при $0 \leqslant t < T_* = \sqrt{\lambda_v/\varkappa} \cdot \varepsilon$. График функции $p(x, t)$ в различные моменты времени приведен на рис. 2. Решение (3.2) удовлетворяет начальным условиям (2.7) и следующим граничным условиям:

$$p(0, t) = \sqrt{\lambda_v/\varkappa}\left\{-\ln\left[1 - \frac{\sqrt{\varkappa/\lambda_v}}{\varepsilon}t\right] - \frac{\sqrt{\varkappa/\lambda_\tau}}{\varepsilon}t\right\}, \quad 0 \leqslant t < T_*,$$

$$p(\infty, t) = 0, \quad 0 \leqslant t < T_*.$$

Как видно, $p(0, t) \to \infty$ при $t \to T_* - 0$ и за время обострения волна проникает на конечную глубину $x_* = \varepsilon$ и $p(x, t) = 0$ при $x \geqslant x_*$, $0 \leqslant t \leqslant T_*$: при этом решение $p(x, t)$, кроме точки $x = 0$, равномерно по $t \in [0;\ T_*]$, ограничено предельной кривой $p(x, T_*)$ (рис. 2):

$$p(x, t) \leqslant p(x, T_*) = \begin{cases} \sqrt{\lambda_v/\varkappa}\left[-\ln\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) - 1 + \frac{x}{\varepsilon}\right], & 0 \leqslant x \leqslant \varepsilon, \\ 0, \quad x \geqslant \varepsilon. \end{cases}$$

Нетрудно проверить, что $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} \lambda_\varepsilon(u) = 0$ для любого $u \geqslant 0$. Из рис. 1 видно, что за счет выбора ε функция λ может быть сделана сколь угодно малой, однако, несмотря на это, функциональная зависимость $\lambda(\partial p/\partial t)$ приводит к эффекту локализации граничного режима с обострением.

Автор выражает благодарность А. Х. Мирзаджанзаде за постановку задачи и обсуждение результатов.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Мирзаджанзаде А. Х., Ширинзаде С. А.** Повышение эффективности и качества бурения глубоких скважин.— М.: Недра, 1986.
2. **Самарский А. А., Галактионов В. А., Курдюмов С. П., Михайлов А. П.** Режимы с обострением в задачах для квазилинейных параболических уравнений.— М.: Наука, 1987.
3. **Молокович Ю. М., Непримеров Н. Н., Пикуза В. И., Штанин А. В.** Релаксационная фильтрация.— Казань: Изд. КГУ, 1980.
4. **Oldroyd J. G.** Non-linear stress, rate of strain relations at finite rate of shear in co-called «linear elastico-viscous» liquids // Second order effects in elasticity, plasticity and fluid dynamics: Proc. Intern. Symp. 1962.— L., 1964.
5. **Уилкинсон У. Л.** Неньютоновские жидкости.— М.: Мир, 1964.
6. **Баренблатт Г. И., Ентов В. М., Рыжик И. М.** Теория нестационарной фильтрации жидкости и газа.— М.: Недра, 1972.
7. **Мизохата С.** Теория уравнений с частными производными.— М.: Мир, 1977.

г. Баку *Поступила 24/I 1990 г., в окончательном варианте — 3/V 1990 г.*

УДК 532.546

О. Ю. Динариев

О НЕКОТОРЫХ ОСОБЕННОСТЯХ КРИВОЙ ВОССТАНОВЛЕНИЯ ДАВЛЕНИЯ ПРИ РЕЛАКСАЦИОННОЙ ФИЛЬТРАЦИИ ЖИДКОСТИ

В лабораторных экспериментах обнаружено, что для процессов фильтрации жидкостей с характерным временем переменности $\sim 10^3$ с теоретические предсказания на основе модели упругого режима могут отличаться на порядок от реально наблюдаемых величин [1—3]. Поэтому при описании быстропеременных явлений при фильтрации жидкости нужно отказаться от уравнений классической модели упругого режима [4, 5] и использовать уравнения релаксационной теории фильтрации [6, 7]. В частности, начальный участок кривой восстановления давления (КВД) должен анализироваться с позиций релаксационной теории фильтрации. Ранее были получены различные приближенные формулы для КВД, когда релаксационное ядро имело некоторый частный вид [6]. Наиболее общий случай, рассмотренный в [6], соответствует выбору фурье-образа релаксационного ядра в виде отношения двух полиномов второго порядка. В настоящей работе найдены точные результаты для начального участка КВД при произвольном виде ядра, совместимом с физическими и термодинамическими требованиями.

1. Рассмотрим однородную пористую среду, насыщенную жидкостью. Изучим изотермические процессы, в которых плотность жидкости ρ мало отличается от фиксированной величины ρ_0, поэтому можно принять линейное выражение для давления

$$p = p_0 + E(\rho - \rho_0)/\rho_0. \tag{1.1}$$

В релаксационной теории фильтрации [6, 7] закон Дарси обобщается следующим образом:

$$\mathbf{u}(t_0, r) = -k\mu^{-1}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} K(t_0 - t)\nabla G(t, \mathbf{r})\,dt, \quad G = p + \rho\varphi. \tag{1.2}$$

Здесь $\mathbf{u}$ — скорость фильтрации; k — проницаемость; φ — гравитационный потенциал; μ — вязкость жидкости, которую будем считать постоянной. Ядро $K = K(t)$ не зависит от пространственных координат и характеризует внутренние релаксационные процессы в системе пористая среда — жидкость. Функция $K = K(t)$ удовлетворяет ряду условий, вытекающих из физических и термодинамических соображений.

Перечислим эти условия, следуя в основном [2].

1. $K = K(t)$ — неотрицательная функция, имеющая размерность (время)$^{-1}$.

2. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} K(t)\,dt = 1.$

3. Носитель функции $K = K(t)$ лежит на полуоси $[0, +\infty)$. На этой полуоси $K = K(t)$ — гладкая монотонная быстроубывающая функция. Условие $K(0) < +\infty$ обеспечивает конечность скорости распространения сигнала при фильтрации [8].

В дальнейшем для произвольной функции времени $f = f(t)$ символом f_F обозначим преобразование Фурье этой функции:

$$f_F(\omega) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega t} f(t)\,dt, \quad \omega \in R.$$

Из условия 3 по теореме Пэли — Винера следует, что функция $K_F = K_F(\omega)$ продолжается по аналитичности в нижнюю полуплоскость комплексной плоскости [9, 10]. Согласно условию 2, $K_F(0) = 1$. Имеет место термодинамическое условие:

4. $\operatorname{Re} K_F(\omega) > 0, \quad \omega \in R.$

При больших $|\omega|$ справедливо разложение

$$K_F(\omega) = K(0)(i\omega)^{-1} + K'(0)(i\omega)^{-2} + O(\omega^{-3}), \tag{1.3}$$

на основании которого в соответствии с условием 4 потребуем, чтобы $K'(0) < 0$. Далее из условия 4, (1.3) и общей теории [11] следует, что голоморфная функция $K_F = K_F(\omega)$ не имеет нулей при $\operatorname{Im}\omega < 0$ и поэтому отображает полуплоскость $\operatorname{Im}\omega < 0$ в себя. В частности, строгое неравенство 4 справедливо во всей нижней комплексной полуплоскости.

При фильтрации жидкости в пористой среде выполняется уравнение неразрывности $\partial(m\rho)/\partial t + \operatorname{div}(\rho\mathbf{u}) = 0$ (m — пористость), которое при учете (1.1), (1.2) дает уравнение, определяющее динамику давления (Δ — оператор Лапласа):

$$\frac{\partial p}{\partial t}(t_0, \mathbf{r}) = \varkappa \int\limits_{-\infty}^{+\infty} K(t_0 - t)\Delta p(t, \mathbf{r})\,dt, \quad \varkappa = \frac{kE}{m\mu}. \tag{1.4}$$

Рассмотрим двумерную задачу о работе скважины с переменным дебитом. В этом случае $p = p(t, r)$, $0 < r_1 \leqslant r \leqslant r_2$ (r_1 — радиус скважины, r_2 — радиус контура питания). Уравнение (1.4) принимает вид

$$\frac{\partial p}{\partial t}(t_0, r) = \varkappa \int\limits_{-\infty}^{+\infty} K(t_0 - t)\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\right) p(t, r)\,dt. \tag{1.5}$$

Наложим граничные условия: постоянство давления на контуре питания

$$p(t,\ r_2) = p_0 = \text{const} \tag{1.6}$$

и заданный дебит $q = q(t)$ на единицу продуктивной толщи пласта

$$q(t_0) = \lambda \int_{-\infty}^{+\infty} K(t_0 - t) \frac{\partial}{\partial r} p(t, r_1)\, dt, \quad \lambda = 2\pi r_1 k \mu^{-1} \rho_0. \tag{1.7}$$

Условие (1.7) получено из релаксационного закона фильтрации (1.2).

Для сокращения дальнейших формул выберем такую систему единиц измерения времени и длины, в которой $\varkappa = r_1 = 1$. Положим $P = p - p_0$. Тогда из (1.5)—(1.7) следуют уравнение для $P_F = P_F(\omega, r)$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} - \frac{i\omega}{K_F(\omega)}\right) P_F = 0 \tag{1.8}$$

и граничные условия

$$P_F|_{r=r_2} = 0, \quad \left.\frac{\partial P_F}{\partial r}\right|_{r=1} = \lambda^{-1} q_F / K_F. \tag{1.9}$$

Определим функцию $\alpha = \alpha(\omega)$ соотношениями

$$\alpha^2 = i\omega / K_F(\omega), \quad \mathrm{Re}\,\alpha \geqslant 0. \tag{1.10}$$

Оказывается, что $\alpha = \alpha(\omega)$ — голоморфная в нижней комплексной полуплоскости функция, непрерывная вплоть до действительной оси. В самом деле,

$$\mathrm{Im}(i\omega/K_F) = (\mathrm{Re}\,\omega\,\mathrm{Re}\,K_F + \mathrm{Im}\,\omega\,\mathrm{Im}\,K_F)/|K_F|^2; \tag{1.11}$$

$$\mathrm{Im}\, K_F = -\int_0^{+\infty} e^{t\,\mathrm{Im}\,\omega} \sin(t\, \mathrm{Re}\,\omega)\, K(t)\, dt. \tag{1.12}$$

Из (1.12) вследствие условия 3 имеем неравенство $\mathrm{Re}\,\omega\,\mathrm{Im}\,K_F \leqslant 0$. Поэтому из (1.11) и принятых предположений вытекает, что $\mathrm{Im}(i\omega/K_F) = 0$, только если $\mathrm{Re}\,\omega = 0$. В последнем случае, однако, если $\omega \neq 0$, то $i\omega/K_F > 0$.

Отсюда при $\mathrm{Im}\,\omega \leqslant 0$, $\omega \neq 0$ $\mathrm{Re}\,\alpha(\omega) > 0$. Таким образом, соотношения (1.10) задают $\alpha = \alpha(\omega)$ как гладкую и однозначную функцию. Вообще говоря, функция $\alpha = \alpha(\omega)$ может быть продолжена по аналитичности в верхнюю комплексную полуплоскость, но там она будет иметь разрез вдоль мнимой полуоси из-за разреза, связанного с извлечением квадратного корня, и из-за особенностей K_F.

У задачи (1.8), (1.9) есть простое решение

$$P_F = \frac{q_F(-I_0(\alpha r_2) K_0(\alpha r) + K_0(\alpha r_2) I_0(\alpha r))}{\lambda K_F \alpha (K_0(\alpha r_2) I_1(\alpha) + K_1(\alpha) I_0(\alpha r_2))} \tag{1.13}$$

($I_\nu(z)$, $K_\nu(z)$ — функции Макдональда [12], при этом $I_\nu(z)$ целые, а $K_\nu(z)$ имеют разрез вдоль действительной отрицательной полуоси).

Рассмотрим асимптотики функций α, P_F при $|\omega| \to +\infty$. Из (1.3), (1.10) находим

$$\alpha = i\omega a_1 + a_0 + O(\omega^{-1}), \quad a_1 = (K(O))^{-1/2}, \quad a_0 = -\frac{1}{2} K'(O)\, a_1^3. \tag{1.14}$$

Из (1.13), (1.14) и асимптотических разложений для функций Макдональда [12, 13] получаем

$$P_F/q_F = -a_1 \lambda^{-1} (c(\omega,\ r) - c^{-1}(\omega,\ r))/(c(\omega,\ 1) + c^{-1}(\omega,\ 1)) + o(1),$$
$$c(\omega,\ r) = \exp\,[(i\omega a_1 + a_0)(r_2 - r)].$$

Таким образом, сходимость интеграла

$$(1.15)\qquad P(t, r)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega t} q_F(\omega)\, P_F(\omega, r)\, d\omega$$

существенно зависит от свойств q_F. При $\omega \to 0$, используя (1.13) и выражения для функций Макдональда [12, 13], имеем

$$(1.16)\qquad P_F/q_F = \lambda^{-1}\ln(r/r_2) + o(1).$$

Если $q(t) = Q = \mathrm{const}$, то из (1.15), (1.16) и формулы $q_F(\omega) = 2\pi Q\delta(\omega)$ находим точное решение такое же, как в теории упругого режима [4, 5]:

$$(1.17)\qquad P = \lambda^{-1} Q \ln(r/r_2).$$

2. Пусть теперь, как и в классической постановке задачи о КВД [4, 5], $q = Q\theta(-t)$ (Q — постоянная, $\theta(t)$ — функция Хевисайда). Тогда при $t < 0$ P задается формулой (1.17). Изменим обозначения. Положим $P(t, r) = p(t, r) - \lambda^{-1}\ln(r/r_2) - p_0$. Тогда при $t < 0$ $P = 0$. В силу линейности задачи (1.5)—(1.7) P можно вычислить по формулам (1.13), (1.15), где $q_F = Qi/(\omega - i\varepsilon)$, что соответствует $q(t) = -Q\theta(t)$. При этом ε — малая положительная величина, которую нужно после выполнения вычислений считать равной нулю.

Поскольку в рассматриваемой модели скорость распространения сигнала конечна [8] и нас интересует функция $P(t, r)$ при малых временах, то зависимость от r_2 должна быть несущественна и можно устремить r_2 в формуле (1.13) к бесконечности. Используя асимптотики функций Макдональда [12, 13], получим

$$(2.1)\qquad P_F = -QiK_0(\alpha r)/[\lambda K_F \alpha K_1(\alpha)(\omega - i\varepsilon)].$$

Исследуем изменение давления в скважине $F(t) = P|_{r=1}$. Из (1.15), (2.1) имеем

$$F(t) = -\frac{Qi}{2\pi\lambda}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{i\omega t} f(\omega)\, d\omega}{\omega - i\varepsilon},\qquad f(\omega)=\frac{K_0(\alpha)}{K_F\alpha K_1(\alpha)}.$$

Из предыдущего вытекает, что функция $f = f(\omega)$ голоморфная в полуплоскости $\mathrm{Im}\,\omega < 0$. Применяя асимптотики функций Макдональда [12, 13] и разложения (1.3), (1.14), вычислим асимптотики $f(\omega)$ при малых и больших ω:

$$(2.2)\qquad \omega \to 0,\quad f(\omega) = \frac{1}{2}\ln(i\omega) + \ln(\gamma/2) + o(1),\quad \gamma = e^{C};$$

$$(2.3)\qquad |\omega| \to +\infty,\quad f(\omega) = a_1 + i\nu\omega^{-1} + O(\omega^{-2}),\quad \nu = a_1^{-1}(2 - a_0)$$

(C — постоянная Эйлера). Определим функцию $h_1 = h_1(\omega)$ формулой

$$h_1(\omega) = \frac{\ln(i\omega)}{2(\omega^2+1)} + \frac{ix_1}{\omega - iy_1} + \frac{ix_2}{\omega - iy_2} + a_1,$$

где действительные числа x_1, x_2, y_1, y_2 являются решением (неединственным) уравнений и неравенств

$$(2.4)\qquad x_1 + x_2 = \nu,\quad -x_1/y_1 - x_2/y_2 + a_1 = \ln(\gamma/2),\quad y_1,\ y_2 > 0.$$

Положим $h_2 = f - h_1$. Тогда $F(t) = H_1(t) + H_2(t)$, где

$$H_1(t) = -\frac{Qi}{2\pi\lambda}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{i\omega t} h_1(\omega)\, d\omega}{\omega - i\varepsilon};\qquad H_2(t) = -\frac{Qi}{2\pi\lambda}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega t}\omega^{-1} h_2(\omega)\, d\omega.$$

Согласно (2.2)—(2.4), функция $(\omega^{-1}h_2(\omega))$ обладает следующими свойствами: голоморфна при $\mathrm{Im}\,\omega < 0$, гладкая вне точки $\omega = 0$, где имеет интегрируемую (логарифмическую) особенность, при больших $|\omega|$ у нее есть асимптотика $\omega^{-1}h_2(\omega) = O(\omega^{-3})$. Используя теорему Лебега о переходе к пределу под знаком интеграла, легко убедиться, что функция $H_2 = H_2(t)$ непрерывно дифференцируема при всех t. Поскольку очевидно, что при $t < 0$ $H_2(t) = 0$ (теорема Пэли — Винера [9, 10]), то $H_2(0) = H_2'(0) = 0$. Отсюда легко вывести, что $F(t) = H_1(t) + o(t)$. В частности,

$$F|_{t=+0} = H_1|_{t=+0}, \quad \left.\frac{dF}{dt}\right|_{t=+0} = \left.\frac{dH_1}{dt}\right|_{t=+0}. \tag{2.5}$$

Для вычисления функции $H_1 = H_1(t)$ используем формулы 3.352.6, 3.352.4, 8.214.1, 8.214.2 соответственно из [13]:

$$\text{V. p.} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-bz}\,dz}{a - z} = e^{-ab}\operatorname{Ei}(ab) \qquad (a > 0,\ \operatorname{Re} b > 0); \tag{2.6}$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-bz}\,dz}{z + a} = -e^{ab}\operatorname{Ei}(-ab) \qquad (|\arg a| < \pi,\ \operatorname{Re} b > 0); \tag{2.7}$$

$$\operatorname{Ei}(z) = C + \ln(-z) + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{z^k}{kk!} \qquad (z < 0); \tag{2.8}$$

$$\operatorname{Ei}(z) = C + \ln z + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{z^k}{kk!} \qquad (z > 0) \tag{2.9}$$

($\operatorname{Ei}(z)$ — интегральная показательная функция [13]). Вычислим теперь вспомогательные интегралы

$$J_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i\omega t}\ln(i\omega)\,d\omega}{\omega - ai}, \quad J_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i\omega t}\ln(i\omega)\,d\omega}{\omega + ai}, \quad a > 0, \quad t > 0, \tag{2.10}$$

имея в виду, что $\ln z$ — аналитическая функция с разрезом вдоль отрицательной действительной полуоси, что в плоскости ω соответствует положительной мнимой полуоси. Сдвигая контур интегрирования в (2.10) к берегам разреза, получаем с учетом (2.6), (2.7)

$$J_1 = 2\pi i e^{-at}(\ln a - \operatorname{Ei}(at)), \quad J_2 = -2\pi i e^{at}\operatorname{Ei}(-at). \tag{2.11}$$

Теперь, используя разложение

$$(\omega - i\varepsilon)^{-1}(\omega^2 + 1)^{-1} = A(\omega - i\varepsilon)^{-1} + B(\omega - i)^{-1} + C(\omega + i)^{-1},$$
$$A = (1 - \varepsilon^2)^{-1}, \ B = -2^{-1}(1 - \varepsilon)^{-1}, \ C = -2^{-1}(1 + \varepsilon)^{-1},$$

а также (2.11) и теорему о вычетах, легко вычислить $H_1(t)$. При этом удобно перейти к пределу $\varepsilon \to +0$ с учетом (2.9). Тогда

$$H_1(t) = Q\lambda^{-1}\Big\{\frac{1}{4}(e^t\operatorname{Ei}(-t) + e^{-t}\operatorname{Ei}(t) - 2C - 2\ln t) +$$
$$+ \frac{x_1}{y_1}\left(e^{-y_1 t} - 1\right) + \frac{x_2}{y_2}\left(e^{-y_2 t} - 1\right) + a_1\Big\}.$$

Отсюда и из формул (2.5), (2.8), (2.9) находим

$$F|_{t=+0} = Q\lambda^{-1}a_1, \ dF/dt|_{t=+0} = -Q\lambda^{-1}(x_1 + x_2) = -Q\lambda^{-1}\nu. \tag{2.12}$$

3. Формулы (2.12), которые представляют собой основной результат настоящей работы, физически означают, что после остановки скважины давление претерпевает скачок, а затем начинает расти с конечным наклоном. Если перейти к размерным величинам, то формулы (2.12) принимают вид

$$F|_{t=+0} = Q\lambda^{-1}\varkappa^{1/2}a_1, \quad \left.\frac{dF}{dt}\right|_{t=+0} = -Q\lambda^{-1}\varkappa^{1/2}a_1^{-1}\left(2 - a_0\varkappa^{3/2}r_1^{-3}\right). \tag{3.1}$$

Исследуем, как ведет себя обнаруженный эффект при переходе к модели упругого режима. Положим $K(t) = \varepsilon^{-1} f(t/\varepsilon)$, где $f = f(t)$ — гладкая положительная при $t > 0$ функция, удовлетворяющая условию нормировки $\int\limits_0^{+\infty} f(t)\, dt = 1$, ε—малый положительный параметр. При стремлении ε к нулю $K(t)$ стремится к δ-функции Дирака, и модель (1.2) переходит в модель упругого режима. При этом, как легко видеть,

$$a_1 = \varepsilon^{1/2}(f(0))^{-1/2},\ a_0 = \varepsilon^{-1/2} f'(0)(f(0))^{-3/2},$$
$$F|_{t=+0} \to 0,\ dF/dt|_{t=+0} \to +\infty.$$

Таким образом, конечность величин в (3.1) — специфическое свойство релаксационной модели.

Отметим в заключение, что для появления скачка давления можно предположить следующее объяснение. В релаксационной модели возмущения плотности жидкости распространяются со скоростью $v = (\varkappa K(0))^{1/2}$ [8]. В задаче, которая фактически изучалась в п. 2, происходила закачка в пласт с расходом на единицу толщи пласта Q. За время Δt в пласт закачивается масса $Q\Delta t$, что соответствует появлению в объеме пористой среды $(2\pi r_1 v\Delta t)$ дополнительной плотности $\Delta\rho$. Как легко видеть, соотношение $Q\Delta t = 2\pi r_1 v \Delta t m \Delta\rho$ эквивалентно первой из формул (3.1).

С помощью предложенного в настоящей работе метода можно вычислить начальный участок КВД с любой точностью.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Динариев О. Ю., Николаев О. В.** Релаксационные явления в насыщенных пористых средах // Системный подход при проектировании разработки месторождений природного газа Западной Сибири.— М.: ВНИИГАЗ, 1988.
2. **Динариев О. Ю., Николаев О. В.** Релаксационные явления в насыщенных пористых средах. Линейная теория // ПММ.— 1989.— Т. 53, вып. 3.
3. **Динариев О. Ю., Николаев О. В.** О релаксационных процессах в низкопроницаемых пористых материалах // ИФЖ.— 1990.— Т. 58, № 1.
4. **Баренблатт Г. И., Ентов В. М., Рыжик В. М.** Теория нестационарной фильтрации жидкости и газа.— М.: Недра, 1972.
5. **Баренблатт Г. И., Ентов В. М., Рыжик В. М.** Движение жидкостей и газов в природных пластах.— М.: Недра, 1984.
6. **Молокович Ю. М., Непримеров Н. Н., Пикуза В. И., Штаник А. В.** Релаксационная фильтрация.— Казань: Изд-во КГУ, 1980.
7. **Молокович Ю. М.** Основы релаксационной фильтрации // Проблемы теории фильтрации и механика процессов повышения нефтеотдачи.— М.: Наука, 1987.
8. **Динариев О. Ю.** О скорости распространения волн для процессов переноса с релаксацией // ДАН СССР.— 1988.— Т. 301, № 5.
9. **Стейн И., Вейс Г.** Введение в гармонический анализ на евклидовых пространствах.— М.: Мир, 1974.
10. **Хёрмандер Л.** Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными // Теория распределений и анализ Фурье.— М.: Мир, 1986.
11. **Стоилов С.** Теория функций комплексного переменного. Основные понятия и принципы. — М.: ИЛ, 1962.— Т. 1.
12. **Бейтмен Г., Эрдейи А.** Высшие трансцендентные функции. Функции Бесселя, функции параболического цилиндра, ортогональные многочлены.— М.: Наука, 1974.
13. **Градштейн И. С., Рыжик И. М.** Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений.— М.: Физматгиз, 1963.

г. Москва

Поступила 12/XII 1989 г., в окончательном варианте — 15/V 1990 г.