ному. Цифры на фигурах соответствуют номерам образцов:

№ образца	4	5	7	10	16	17	19
τ, *кг/мм*^{2} =	14.00	11.56	11.56	13.00	14.74	14.10	10.11

(Заметим, что для образца 10 при обратном кручении $\tau = 12.2$ *кг/см*^{2}.) Как видно из кривых, для всех экспериментов абсолютное значение деформации сдвига, накопленной при обратном кручении, значительно больше деформации сдвига, накопленной при прямом кручении. Таким образом, кручение в прямом направлении разупрочняет материал по отношению к кручению в обратном направлении.

Обнаруженный в этих экспериментах эффект напоминает известный эффект Баушингера; однако обнаруженный нами эффект не может быть сведен к эффекту Баушингера, поскольку напряжения в описываемых экспериментах выбирались не выше предела пропорциональности материала при данной температуре. Между тем, за внешним сходством этих двух эффектов, по-видимому, кроется физическое сходство процесса деформирования.

Поступила
26 XI 1959

ЛИТЕРАТУРА

1. Наместников В. С. О ползучести при постоянных нагрузках в условиях сложного напряженного состояния, Изв. АН СССР, ОТН, 1957, № 4.

НАПРЯЖЕНИЕ В НЕРАВНОМЕРНО НАГРЕТЫХ ДИСКАХ ЗА ПРЕДЕЛОМ УПРУГОСТИ

Ю. В. Немировский
(*Новосибирск*)

Рассматривается задача о температурных напряжениях в круглом диске при следующих условиях:

а) рассматривается тонкий диск постоянной толщины, так что реализуется плосконапряженное состояние;

б) температура установившаяся и зависит только от радиуса;

в) материал диска считается идеальнопластическим;

г) упругие константы диска, модуль Юнга E и коэффициент Пуассона ν, не зависят от температуры. Последнее допущение возможно, если температура диска повышается не настолько, чтобы изменить существенным образом E и ν.

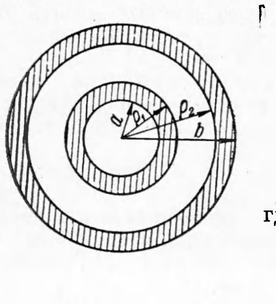
При сделанных предположениях известное упругое решение есть [1,2]:

$$\sigma_r = -\frac{E}{r^2}\int^r \alpha t\, rdr + C_1 - \frac{C_2}{r_2}, \qquad \sigma_\theta = \frac{E}{r^2}\int^r \alpha tr\, dr - E\alpha t + C_1 + \frac{C_2}{r^2} \tag{1}$$

где t — температура и α — коэффициент линейного расширения.

При условии отсутствия внешних поверхностных сил на контурах диска постоянные C_1 и C_2 определяются из условий

$$\sigma_r = 0 \quad \text{при } r = a, \qquad \sigma_r = 0 \quad \text{при } r = b \tag{2}$$



В результате получим для упругих напряжений

$$\sigma_r = E\left[\theta(b)\frac{b^2}{(b^2 - a^2)} - \theta(r)\frac{r^2}{(r^2 - a^2)}\right]\left(1 - \frac{a^2}{r^2}\right)$$

$$\sigma_\theta = E\left[\theta(b)\frac{b^2}{(b^2 - a^2)}\left(1 + \frac{a^2}{r^2}\right) + \theta(r) - \alpha t\right]$$

где

$$\theta(r) = \frac{1}{r^2}\int_a^r \alpha t\, rdr$$

Заметим, что напряжение σ_r пропорционально разности между половиной средней температуры целого диска и половиной средней температуры части диска радиуса r

$$\theta(b)\frac{b^2}{(b^2 - a^2)} = \frac{1}{2\pi(b^2 - a^2)}\int_a^b 2\pi\alpha t\, rdr, \qquad \theta(r)\frac{r^2}{(r^2 - a^2)} = \frac{1}{2\pi(r^2 - a^2)}\int_a^r 2\pi\alpha t\, rdr$$

Исходя из этого, можно заключить, что если $\Delta t = t_b - t_a < 0$, то всюду $\sigma_r < 0$, если же $\Delta t > 0$, то всюду $\sigma_r > 0$.

Рассматривая значения σ_θ на контурах диска, находим:

$$\sigma_\theta = E\left[\theta(b)\frac{2b^2}{(b^2-a^2)} - (\alpha t)_{r=a}\right] \quad \text{при } r=a$$

$$\sigma_\theta = E\left[\theta(b)\frac{2b^2}{(b^2-a^2)} - (\alpha t)_{r=b}\right] \quad \text{при } r=b$$

Из этих выражений следует, что если $\Delta t < 0$, то $\sigma_\theta < 0$ у внутреннего контура и $\sigma_\theta > 0$ у внешнего контура; при $\Delta t > 0$ — наоборот.

Если перепад температуры на контурах будет достаточно велик, то в диске могут возникнуть пластические области. Исходя из теории плоского напряженного состояния и вышеизложенных рассуждений о знаках напряжений, можно сделать вывод, что пластические деформации возникают:

на внутреннем контуре при условии

$$\sigma_\theta(a) = E\left[\theta(b)\frac{2b^2}{(b^2-a^2)} - (\alpha t)_{r=a}\right] = \mp\sigma_s(a) \tag{3}$$

на внешнем контуре при условии

$$\sigma_\theta(b) - \sigma_r(b) = E\left[\theta(b)\frac{2b^2}{(b^2-a^2)} - (\alpha t)_{r=b}\right] = \pm\sigma_s(b) \tag{4}$$

причем верхний знак всюду берется при $\Delta t < 0$, а нижний — при $\Delta t > 0$.

Здесь $\sigma_s(a)$ — значение предела текучести при $r = a$. Таким образом, в зависимости от размеров диска, свойств материала и перепада температуры пластические деформации в диске могут возникать первоначально на внутреннем или внешнем контуре диска. При увеличении перепада температур пластические области распространяются от контуров внутрь диска (фиг. 1), занимая некоторые области $a \leqslant r \leqslant \rho_1$ и $\rho_2 \leqslant r \leqslant b$.

При некотором перепаде в диске могут существовать одновременно обе области. Задача нахождения напряжений в пластических областях решается при помощи уравнения равновесия $d(r\sigma r)/dr = \sigma_0$ и условий пластичности

$$\sigma_\theta = \mp\sigma_s(r) \quad \text{при } a \leqslant r \leqslant \rho_1, \qquad \sigma_\theta - \sigma_r = \pm\sigma_s(r) \quad \text{при } \rho_2 \leqslant r \leqslant b$$

Воспользовавшись граничными условиями (2), получим:

$$\sigma_r = \mp k(r), \qquad \sigma_\theta = \mp\sigma_s(r) \qquad \left(k(r) = \int_a^r \sigma_s(r)\,dr, \quad a \leqslant r \leqslant \rho_1\right) \tag{5}$$

$$\sigma_r = \pm k_1(r), \qquad \sigma_\theta = \pm[k_1(r) + \sigma_s(r)] \qquad \left(k_1(r) = \int_r^b \frac{\sigma_s(r)\,dr}{r} \quad \varrho_2 \leqslant r \leqslant b\right) \tag{6}$$

Из полученных выражений следует, что в пластических областях напряжения зависят от температуры только вторичным путем через механические свойства материала. Если же при неравномерном нагреве материал диска остается однородным как в упругом, так и в упруго-пластическом состоянии, то напряжения в пластической области не зависят ни от закона распределения, ни от перепада температуры. Для полного решения поставленной задачи необходимо найти константы C_1 и C_2 из (1) и радиусы упруго-пластических границ. Для этого воспользуемся следующими условиями.

а) При наличии двух пластических областей — непрерывностью напряжений σ_r и σ_θ при $r = \rho_1$ и $r = \rho_2$.

б) При наличии одной пластической области на внутреннем контуре — непрерывностью σ_r и σ_θ при $r = \rho_1$ и граничным условием $\sigma_r^y = 0$ при $r = b$.

в) При наличии одной пластической области на внешнем контуре — непрерывностью σ_r и σ_θ при $r = \rho_2$ и граничным условием $\sigma_r^y = 0$ при $r = a$.

Это дает: а) для двух пластических областей:

$$C_1 = \mp\frac{1}{2}[k(\rho_1) + \sigma_s(\rho_1)] + \frac{1}{2}E(\alpha t)_{r=\rho_1} \tag{7}$$

$$C_2 = -E\int^{\rho_1}\alpha t\,r dr \mp \frac{{\rho_1}^2}{2}[\sigma_s(\rho_1) - k(\rho_1)] + \frac{{\rho_1}^2}{2}E(\alpha t)_{r=\rho_1} \tag{8}$$

$$-\frac{E}{{\rho_2}^2}\int_{\rho_1}^{\rho_2}\alpha t\,r dr \mp \frac{1}{2}k(\rho_1)\left(1 + \frac{{\rho_1}^2}{{\rho_2}^2}\right) \mp \frac{1}{2}[\sigma_s(\rho_1) \mp E(\alpha t)_{\rho_1}]\left(1 - \frac{{\rho_1}^2}{{\rho_2}^2}\right) = k_1(\rho_2) \tag{9}$$

$$\frac{E}{{\rho_2}^2}\int_{\rho_1}^{\rho_2}\alpha t\,r dr \mp \frac{1}{2}k(\rho_1)\left(1 - \frac{{\rho_1}^2}{{\rho_2}^2}\right) \mp \frac{1}{2}[\sigma_s(\rho_1) \mp E(\alpha t)_{\rho_1}]\left(1 - \frac{{\rho_1}^2}{{\rho_2}^2}\right) - E(\alpha t)_{\rho_2} = \\ = \pm[k_1(\rho_2) + \sigma_s(\rho_2)] \tag{10}$$

б) Для случая одной пластической области у внутреннего контура — первые три уравнения (5), (6) и (7), в которых необходимо положить

$$\rho_2 = b, \qquad k_1(\rho_2) = 0$$

в) Для пластической области у внешнего контура

$$C_1 = \pm\left[k_1(\rho_2) + \frac{1}{2}\sigma_s(\rho_2)\right] + \frac{1}{2}E(\alpha t)_{r=\rho_2}$$

$$C_2 = -E\int^{\rho_2}\alpha t\, r dr + \frac{\rho_2^2}{2}E(\alpha t)_{r=\rho_2} \pm \frac{\rho_2^2}{2}\sigma_s(\rho_2) \tag{11}$$

$$-E\int_{\rho_2}^{a}\alpha t\, r dr \pm k_1(\rho_2)a^2 \pm \frac{1}{2}\sigma_s(\rho_2)(a^2-\rho_2^2) + \frac{1}{2}E(a^2-\rho_2^2)(\alpha t)_{r=\rho_2} = 0$$

Таким образом задача определения напряжений в неравномерно нагретых дисках решается следующим путем. При помощи (3) и (4) выясняется наличие пластических областей, затем из уравнений (9), (10) и (11) определяются, соответственно, один или два радиуса упруго-пластических границ. После чего напряжения определяются из выражений (1), (7), (8), (11), (5) и (6).

При еще большем перепаде температур представляется возможным переход всего диска в пластическое состояние либо путем распространения одной пластической области на всю ширину диска, либо путем соединения двух пластических областей, при наличии их. Для выяснения этого вопроса обратимся к конкретным примерам законов распределения температуры. Основное уравнение теплопроводности для диска постоянной толщины при отсутствии теплоотдачи с боковой поверхности диска имеет вид

$$\frac{d^2t}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dt}{dr} = 0$$

Решение его

$$t = M + N\ln\frac{r}{a} \tag{12}$$

где постоянные M и N определяются из условий на внутренней и внешней поверхностях диска и равны:

$$M = t_a, \qquad N = \frac{t_b - t_a}{\ln b - \ln a}$$

Будем предполагать, что предел текучести материала изменяется по линейному закону с температурой

$$\sigma_s = m - nt$$

или, учитывая выражение (12), имеем

$$\sigma_s = A - B\ln\frac{r}{a} \qquad (A = m - Mn, \quad B = nN) \tag{13}$$

Пусть для простоты коэффициент теплопроводности α не зависит от температуры и остается постоянным при любом r. Тогда, подставляя выражения (12) и (13), например, в уравнение (9) и учитывая обозначения для k и k_1, нетрудно заметить, что коэффициент при N обращается в нуль, в то время как коэффициенты при A, B, M не все обращаются в нуль, если положить $\rho_1 = \rho_2$, т. е. считать, что пластические области соединились. Из этого следует, что перепад температуры, при котором возможно чисто пластическое напряженное состояние у диска, имеющего две пластические области, $N = \infty$. В этом случае при увеличении перепада температур в зависимости от размеров диска и механических свойств материала толщина упругого слоя уменьшается, никогда, однако, не приближаясь к нулю.

Если в диске существует только одна пластическая область, то чисто пластическое состояние, т. е. $\rho_1 = b$ или $\rho_2 = a$, существует, если $k(b) = 0$ или $k_1(b) = 0$ (из (9) или (11)), что невозможно, так как $\sigma_s > 0$ всюду.

Таким образом при неравномерном нагреве чисто пластическое состояние в дисках не реализуется. В заключение отметим, что ввиду статической определимости решения в пластической области учет переменности E и ν не внесет существенных изменений. В этом случае необходимо только брать более сложное решение упругой задачи и удовлетворять условиям непрерывности на упруго-пластических границах. Выражения (5) и (6) для пластических напряжений сохраняются.

Поступила
26 XI 1959

ЛИТЕРАТУРА

1. Биргер. Об одной ошибке в курсе теории упругости Тимошенко, Инженерный сборник, 1951, т. 10.
2. Кац А. М. Теория упругости, ГТТИ, 1958.