УДК 532.5

САМОГРАВИТИРУЮЩАЯСЯ УСТОЙЧИВОСТЬ ВРАЩАЮЩЕГОСЯ СЛОЯ ЖИДКОСТИ

А. А. Хасан

Технологический колледж Арабской академии наук, технологий
и морского транспорта, Асуан, Египет
E-mail: alfaisal772001@gmail.com

С использованием линейной теории рассмотрена задача о самогравитирующейся неустойчивости модели вращающегося слоя жидкости и выведено дисперсионное соотношение, справедливое для любых типов возмущений. Установлено, что в зависимости от соотношения плотностей жидкостей сила самогравитации является дестабилизирующей в очень малом диапазоне волновых чисел, в остальных диапазонах она является стабилизирующей. Показано, что при больших значениях угловой скорости центробежная сила является стабилизирующей и может подавлять самогравитирующуюся неустойчивость. Обнаружено, что в отсутствие силы самогравитации модель вращающегося слоя жидкости является предельно устойчивой

Ключевые слова: самогравитация, вращение, течение слоистой жидкости.

DOI: 10.15372/PMTF20160608

Введение. Неустойчивость полубесконечных потоков жидкости, состоящей из слоев жидкостей с различными плотностями, на которые действуют капиллярные, электродинамические и другие силы, изучается начиная с 50-х гг. XX в. В работе [1] с использованием предположения о существовании недивергентного вектора впервые исследована осесимметричная неустойчивость жидкого цилиндра. В [2] приведен обзор работ, в которых изучается устойчивость струй жидкости, слоев жидкости и двух полубесконечных потоков, разделенных плоской границей, на которой в начальный момент времени они находились в состоянии покоя (неустойчивость Рэлея — Тейлора) или равномерно двигались (неустойчивость Кельвина — Гельмгольца) под действием внешних гравитационных сил (см. также [3]). В работе [4] приведены результаты экспериментов, в которых исследовалось образование полостей в объеме жидкости (струя газа, распространяющаяся в жидкости). Устойчивость жидких цилиндров, находящихся под действием различных сил, в том числе силы самогравитации, изучена в работах [5, 6]. В [7] исследована устойчивость колеблющегося цилиндра, заполненного текущей жидкостью, на которую действуют капиллярные, самогравитирующиеся и электродинамические силы, при различных осесимметричных и неосесимметричных возмущениях. В [8] изучена неустойчивость колеблющегося цилиндра, заполненного текущей самогравитирующейся диэлектрической несжимаемой жидкостью и окруженного практически неподвижной средой, на которую действует переменное электрическое поле. В [9, 10] рассмотрена аналогичная задача с учетом действия капиллярных, электрических сил и сил самогравитации. В [11] изучалась магнитно-гравитационная динамическая устойчивость цилиндра, заполненного текущей жидкостью и находящегося под действием капиллярных и магнитных сил. Линейная устойчивость самогравитирующихся композитных диэлектрических несмешивающихся струй под действием аксиального электрического поля исследовалась в работе [12].

Целью настоящей работы является исследование самогравитирующейся неустойчивости вращающегося слоя жидкости, заключенного между полубесконечными слоями жидкости с другой плотностью.

1. Постановка задачи. Рассмотрим самогравитирующийся слой жидкости конечной толщины $2h$ с плотностью $\rho^{(i)}$, погруженный в бесконечную самогравитирующуюся жидкость плотностью $\rho^{(e)}$. Предполагается, что модель вращается с равномерной угловой скоростью $\boldsymbol{\Omega} = (0, 0, \Omega)$. Слой жидкости заключен между двумя плоскостями $z_0 = \pm h$. При $z_0 = h$ и $z_0 = -h$ слой примыкает к полубесконечным слоям жидкости, имеющей другую плотность. Предполагается, что жидкости являются несжимаемыми идеальными и находятся под действием градиента давления, сил самогравитации и центробежных сил.

Уравнения задачи представляют собой систему, состоящую из уравнений гидродинамики и закона самогравитации Ньютона:

$$\rho^{(s)}\Big(\frac{\partial \boldsymbol{u}^{(s)}}{\partial t} + (\boldsymbol{u}^{(s)} \cdot \nabla)\boldsymbol{u}^{(s)}\Big) = -\nabla P^{(s)} - \rho^{(s)}\nabla V^{(s)} + 2\rho^{(s)}(\boldsymbol{u}^{(s)} \wedge \boldsymbol{\Omega}); \tag{1}$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{u}^{(s)} = 0; \tag{2}$$

$$\nabla^2 V^{(s)} = 4\pi G\rho^{(s)}. \tag{3}$$

Здесь индекс $s = i$ соответствует внутреннему ограниченному слою, $s = e$ — окружающей жидкости; $\boldsymbol{u}$, P — скорость жидкости и кинетическое давление; V, G — потенциал и константа самогравитации. Уравнения (1) представляют собой уравнения движения жидкости под действием приложенных сил, уравнения (2) — уравнения неразрывности для несжимаемой жидкости, уравнения (3) — ньютоновские уравнения самогравитации.

2. Метод возмущений. В предположении, что возмущения распространяются вдоль поверхностей раздела жидкостей, любая переменная ($\boldsymbol{u}$, P, V) может быть представлена в виде

$$Q(x, y, z; t) = Q_0(z) + \varepsilon(t)Q_1(x, y, z) + \ldots, \tag{4}$$

где $Q_0(z)$ — значения $Q(x, y, z; t)$ в начальный момент времени ($t = 0$); $Q_1(x, y, z)$ — возмущения; z — расстояние от поверхностей жидкостей. Амплитуда возмущений $\varepsilon(t)$ представляется в виде $\varepsilon(t) = \varepsilon_0\, \mathrm{e}^{i\sigma t}$, где ε_0 — амплитуда возмущений в начальный момент времени; σ — частота колебаний в момент времени t.

С использованием метода возмущений и линейной теории возмущений выражение для деформации контактирующих поверхностей записывается в виде

$$z = z_0 + z_1, \qquad z_1 = \varepsilon(t)\exp{[i(kx + ly)]}, \tag{5}$$

где k, l — волновые числа.

Используя представления (4), (5), из (1)–(3) получаем линеаризованные уравнения возмущений

$$\rho^{(s)}\Big(\frac{\partial \boldsymbol{u}_1^{(s)}}{\partial t} + (\boldsymbol{u}_0^{(s)} \cdot \nabla)\,\boldsymbol{u}_1^{(s)}\Big) = -\nabla P_1^{(s)} - \rho^{(s)}\nabla V_1^{(s)} + 2\rho^{(s)}(\boldsymbol{u}_1^{(s)} \wedge \boldsymbol{\Omega}); \tag{6}$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{u}_1^{(s)} = 0; \tag{7}$$

$$\nabla^2 V_1^{(s)} = 0. \tag{8}$$

При решении системы дифференциальных уравнений второго порядка (6)–(8) используем метод анализа нормальных колебаний. Тогда

$$Q_1(x, y, z; t) = Q_1^*(z)\varepsilon(t)\exp{[i(kx + ly)]}. \tag{9}$$

Для того чтобы получить компоненты $\boldsymbol{u}_1^{(s)}$, применим к уравнению (6) оператор ротора:

$$\rho^{(s)} \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \wedge \boldsymbol{u}_1^{(s)}) + 2\rho^{(s)} \nabla \wedge (\boldsymbol{\Omega} \wedge \boldsymbol{u}_1^{(s)}) = -\nabla \wedge (\nabla P_1^{(s)}) - \rho^{(s)} \nabla \wedge (\nabla V_1^{(s)}). \qquad (10)$$

С помощью тождеств

$$\nabla \wedge (\nabla P_1^{(s)}) = 0, \qquad \nabla \wedge (\nabla V_1^{(s)}) = 0,$$

$$\nabla \wedge (\boldsymbol{\Omega} \wedge \boldsymbol{u}_1^{(s)}) = (\boldsymbol{u}_1^{(s)} \cdot \nabla)\boldsymbol{\Omega} - (\boldsymbol{\Omega} \cdot \nabla)\boldsymbol{u}_1^{(s)} - (\nabla \cdot \boldsymbol{\Omega})\boldsymbol{u}_1^{(s)} + (\nabla \cdot \boldsymbol{u}_1^{(s)})\boldsymbol{\Omega},$$

$$(\boldsymbol{u}_1^{(s)} \cdot \nabla)\boldsymbol{\Omega} = 0, \qquad (\nabla \cdot \boldsymbol{\Omega})\boldsymbol{u}_1^{(s)} = 0, \qquad (\nabla \cdot \boldsymbol{u}_1^{(s)})\boldsymbol{\Omega} = 0$$

уравнения (10) приводятся к виду

$$i\sigma(\nabla \wedge \boldsymbol{u}_1^{(s)}) = 2\Omega \frac{\partial \boldsymbol{u}_1^{(s)}}{\partial z}. \qquad (11)$$

Используя z-компоненту уравнения (11) и уравнения (7), получаем

$$(l\sigma + 2ik\Omega) u_{1x}^{(s)} = (k\sigma - 2il\Omega) u_{1y}^{(s)}, \qquad (12)$$

выражение для y-компоненты уравнения (11) записывается в виде

$$i\sigma\Big(\frac{\partial u_{1x}^{(s)}}{\partial z} - iku_{1z}^{(s)}\Big) = 2\Omega \frac{\partial u_{1y}^{(s)}}{\partial z}. \qquad (13)$$

Подставляя (12) в (13), получаем

$$\frac{i^2 k(\sigma^2 - 4\Omega^2)}{2l\Omega + ik\sigma} \frac{\partial^2 u_{1x}^{(s)}}{\partial z^2} = -\sigma k \frac{\partial u_{1z}^{(s)}}{\partial z}. \qquad (14)$$

Аналогично при использовании уравнений (7), (12) с учетом (9) из уравнений (14) следует

$$\Big(\frac{d^2}{dz^2} - m^2\Big) u_{1x}^{(s)} = 0, \qquad m^2 = \frac{\sigma^2(l^2 + k^2)}{\sigma^2 - 4\Omega^2}. \qquad (15)$$

Невырожденные решения уравнений (15) в слое жидкости и окружающей жидкости имеют вид

$$u_{1x}^{(i)} = u_{0x}^{(i)} + c_1 z_1 \varepsilon(t) \operatorname{ch} mz, \qquad 0 < z < h,$$
$$u_{1x}^{(e)} = u_{0x}^{(e)} + c_2 z_1 \varepsilon(t) \exp{(-mz)}, \qquad h < z < \infty, \qquad (16)$$

где c_1, c_2 — константы интегрирования, которые необходимо определить; $u_{0x}^{(i)} = 0$; $u_{0x}^{(e)} = 0$. Используя уравнения (12), получаем

$$u_{1y}^{(i)} = Ac_1 z_1 \operatorname{ch} mz, \qquad u_{1y}^{(e)} = Ac_2 z_1 \exp{(-mz)}, \qquad (17)$$

где

$$A = (l\sigma + 2ik\Omega)/(k\sigma - 2il\Omega). \qquad (18)$$

Используя уравнения неразрывности (7), для z-компоненты $\boldsymbol{u}_1^{(s)}$ получаем уравнение

$$u_{1z}^{(s)} = -\int (iku_{1x}^{(s)} + ilu_{1y}^{(s)})\, dz. \qquad (19)$$

Таким образом, с учетом (16)–(18) имеем

$$u_{1z}^{(i)} = Bc_1 z_1 \operatorname{sh} mz, \qquad u_{1z}^{(e)} = Bc_2 z_1 \exp(-mz), \qquad B = \frac{\sigma(l^2+k^2)}{m(2l\Omega + ik\sigma)}. \tag{20}$$

С использованием (9) невырожденные решения уравнений (8) представляются в виде

$$V_1^{(i)} = c_3 z_1 \operatorname{ch}\big(\sqrt{l^2+k^2}\, z\big), \qquad V_1^{(e)} = c_4 z_1 \exp\big(-\sqrt{l^2+k^2}\, z\big), \tag{21}$$

где c_3, c_4 — константы интегрирования, которые необходимо определить.

Из уравнений движения (1) следует

$$\frac{\partial \boldsymbol{u}_1^{(s)}}{\partial t} + 2\boldsymbol{\Omega} \wedge \boldsymbol{u}_1^{(s)} = -\nabla \Pi_1^{(s)}, \qquad \rho^{(s)}\Pi_1^{(s)} = P_1^{(s)} + \rho^{(s)} V_1^{(s)}, \tag{22}$$

где

$$\Pi_1^{(i)} = -i\sigma \int u_{1z}^{(i)}\, dz = -\frac{i\sigma}{m}\, Bc_1 z_1 \operatorname{ch} mz, \qquad \Pi_1^{(e)} = \frac{i\sigma}{m}\, Bc_2 z_1 \exp(-mz). \tag{23}$$

В случае невозмущенного состояния ($\boldsymbol{u}_0 = 0$) получаем уравнение, аналогичное уравнению (22):

$$\nabla \Pi_0^{(s)} = 0, \qquad \Pi_0^{(s)} = P_0^{(s)} + \rho^{(s)} V_0^{(s)} = \mathrm{const}\,. \tag{24}$$

Чтобы определить $V_0^{(s)}$, необходимо решить уравнение

$$\nabla^2 V_0^{(s)} = 4\pi G \rho^{(s)}. \tag{25}$$

В результате получаем

$$V_0^{(i)} = 2\pi G\rho^{(i)} z^2, \qquad V_0^{(e)} = 2\pi G \rho^{(e)} z^2 + 4\pi G h(\rho^{(i)} - \rho^{(e)}) z + 2\pi G h^2 (\rho^{(e)} - \rho^{(i)}), \tag{26}$$

где при получении решений (26) использовано условие непрерывности потенциала V_0 и его производной при $z_0 = h$.

3. Граничные условия. Решения (16)–(21) исходных уравнений (1)–(3) для возмущенного состояния и (24)–(26) для невозмущенного состояния должны удовлетворять приведенным ниже граничным условиям.

1. Кинематические условия. При $z = h$ нормальная компонента скорости должна быть непрерывна при переходе через границу области возмущения и равна скорости граничной поверхности возмущения. Поскольку $\boldsymbol{u}_0 = 0$, эти условия имеют вид

$$z_0 = h\colon \qquad u_{1z}^{(i)} = u_{1z}^{(e)} = \frac{\partial z}{\partial t}. \tag{27}$$

Подставляя (5), (18), (20) в условия (27), получаем

$$c_1 = \frac{\sigma(2i\Omega l - \sigma k)}{\sqrt{l^2+k^2}\,(\sigma^2 - 4\Omega^2)^{1/2} \operatorname{sh} mh}, \qquad c_2 = \frac{\sigma(2i\Omega l - \sigma k)}{\sqrt{l^2+k^2}\,(\sigma^2 - 4\Omega^2)^{1/2}}\, \mathrm{e}^{mh}\,.$$

2. Условия самогравитации. Потенциал самогравитации V и его производная должны быть непрерывными вдоль верхней возмущенной границы слоя жидкости:

$$z_0 = h\colon \quad V_1^{(i)} + z_1 \frac{\partial V_0^{(i)}}{\partial z} = V_1^{(e)} + z_1 \frac{\partial V_0^{(e)}}{\partial z}, \qquad \frac{\partial V_1^{(i)}}{\partial z} + z_1 \frac{\partial^2 V_0^{(i)}}{\partial z^2} = \frac{\partial V_1^{(e)}}{\partial z} + z_1 \frac{\partial^2 V_0^{(e)}}{\partial z^2}. \tag{28}$$

Подставляя (5), (21), (26) в условия (28), получаем

$$c_3 = \frac{4\pi G(\rho^{(e)} - \rho^{(i)})\,(l^2+k^2)^{-1/2}}{\operatorname{sh}\sqrt{l^2+k^2}\, h + \operatorname{ch}\sqrt{l^2+k^2}\, h} \exp\big(-\sqrt{l^2+k^2}\, h\big),$$

$$c_4 = \frac{4\pi G(\rho^{(e)} - \rho^{(i)})\,(l^2 + k^2)^{-1/2}}{\operatorname{sh}\sqrt{l^2 + k^2}\,h + \operatorname{ch}\sqrt{l^2 + k^2}\,h}\,\operatorname{ch}\big(\sqrt{l^2 + k^2}\,h\big)\exp\big(\sqrt{l^2 + k^2}\,h\big).$$

3. Баланс напряжений. При $z_0 = h$ нормальная составляющая суммарных напряжений в слое жидкости плотностью $\rho^{(i)}$ должна быть равной нормальной составляющей напряжений в окружающей жидкости плотностью $\rho^{(e)}$:

$$P_1^{(i)} + z_1\,\frac{\partial P_0^{(i)}}{\partial z} = P_1^{(e)} + z_1\,\frac{\partial P_0^{(e)}}{\partial z}. \tag{29}$$

В силу уравнений (22), (24) условие (29) может быть записано в виде

$$\rho^{(i)}\Pi_1^{(i)} - \rho^{(i)}V_1^{(i)} - \rho^{(i)}z_1\,\frac{\partial}{\partial z}\,V_0^{(i)} = \rho^{(e)}\Pi_1^{(e)} - \rho^{(e)}V_1^{(e)} - \rho^{(e)}z_1\,\frac{\partial}{\partial z}\,V_0^{(e)}. \tag{30}$$

Подставляя (5), (20), (21), (23), (26) в условие (30), получаем дисперсионное соотношение

$$\sigma^2 = 4\pi G\Big(\frac{(\rho^{(i)}\,\mathrm{e}^{-nh} - \rho^{(e)})\operatorname{ch}nh}{\operatorname{sh}nh + \operatorname{ch}nh} - \rho^{(i)}\Big)\,\frac{mh\,(\rho^{(e)} - \rho^{(i)})\operatorname{sh}mh}{\rho^{(i)}\operatorname{ch}mh + \rho^{(e)}\exp(-mh)}, \tag{31}$$

где $m = n(1 - (4\Omega^2/\sigma^2))^{-1/2}$; $n = (l^2 + k^2)^{1/2}$ — результирующее волновое число возмущения.

4. Обсуждение результатов. Уравнение (31) является дисперсионным соотношением для самогравитирующегося вращающегося слоя жидкости (с плотностью $\rho^{(i)}$), помещенного в самогравитирующуюся вращающуюся бесконечную жидкость (с плотностью $\rho^{(e)}$), и справедливо для всех типов возмущений. Это уравнение представляет собой зависимость частоты колебаний σ от волнового числа возмущений n, плотностей $\rho^{(i)}$, $\rho^{(e)}$ жидкостей, гравитационной постоянной G, гиперболических функций $\operatorname{sh}(nh)$ и $\operatorname{ch}(nh)$, угловой скорости Ω и величины $4\pi G\rho^{(i)}$. С использованием соотношения (31) можно определить области устойчивости и неустойчивости рассматриваемой модели.

В предположении $\Omega = 0$ ($m = n$) и $\rho^{(e)} = 0$ из соотношения (31) получаем дисперсионное соотношение

$$\sigma^2 = 4\pi G\rho^{(i)}\Big(1 - \frac{\exp(-N)}{N(1 + \operatorname{th}N)}\Big)N\operatorname{th}N,$$

где $N = nh$ — безразмерное результирующее волновое число возмущений.

Дисперсионное соотношение (31) решается численно. В результате получаем

$$\frac{\sigma^2}{4\pi G\rho^{(i)}} < 0 \text{ при } N < 0{,}64, \qquad \frac{\sigma^2}{4\pi G\rho^{(i)}} = 0 \text{ при } N = 0{,}64, \qquad \frac{\sigma^2}{4\pi G\rho^{(i)}} > 0 \text{ при } N > 0{,}64.$$

Таким образом, для волн с безразмерным результирующим волновым числом, меньшим 0,64, самогравитирующийся слой жидкости плотностью $\rho^{(i)}$ неустойчив, для волн с волновым числом $N \geqslant 0{,}64$ — устойчив.

В предположении $\Omega = 0$ ($m = n$, где $n = \sqrt{l^2 + k^2}$ — результирующее волновое число) из дисперсионного соотношения (31) следует

$$\sigma^2 = 4\pi G\Big(\frac{(\rho^{(i)} - \rho^{(e)})\,\mathrm{e}^{-N}}{1 + \operatorname{th}N} - \rho^{(i)}N\Big)\,\frac{\rho^{(e)} - \rho^{(i)}}{\rho^{(i)}\operatorname{cth}N + \rho^{(e)}}.$$

Устойчивые и неустойчивые состояния существенно зависят от отношения плотностей $\rho^{(i)}$ и $\rho^{(e)}$. Для рассматриваемой модели существуют как устойчивые, так и неустойчивые состояния.

В случае отсутствия силы самогравитации (либо $\rho^{(i)} = 0$, $\rho^{(e)} \neq 0$, либо $\rho^{(i)} \neq 0$, $\rho^{(e)} = 0$) на модель действуют только градиент давления и центробежные силы. В этом случае из уравнения (31) следует $\sigma^2 = 0$. Это означает, что дисперсия отсутствует и модель является устойчивой. Таким образом, в отсутствие самогравитации центробежная сила не оказывает непосредственного влияния на устойчивость модели.

В предположении $\rho^{(i)} = 0$ дисперсионное соотношение (31) принимает вид

$$\sigma^2 = -4\pi G\rho^{(e)} \frac{\mathrm{e}^{-N}}{1 + \operatorname{th} N}. \tag{32}$$

Из соотношения (32) следует, что поток газа с пренебрежимо малой инерцией, заключенный внутри бесконечной жидкости плотностью $\rho^{(e)}$, в целом неустойчив при воздействии сил самогравитации. Этот вывод физически обоснован, поскольку если в бесконечную жидкость поместить слой газа, то он исчезнет, так как его молекулы проникают в жидкость, более того, модель мгновенно коллапсирует.

Заключение. В работе проведено исследование самогравитирующейся неустойчивости вращающегося слоя жидкости, помещенного в жидкость с другой плотностью. Сила самогравитации является дестабилизирующей в небольшом диапазоне значений волнового числа, в то же время она является стабилизирующей в других диапазонах, зависящих от отношения плотностей жидкостей. При больших значениях угловой скорости центробежная сила является стабилизирующей и может подавлять самогравитационную неустойчивость. Обнаружено, что в отсутствие силы самогравитации центробежные силы не оказывают непосредственного влияния на устойчивость модели.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Chandrasekhar S., Fermi E.** Problems of gravitational stability in the presence of a magnetic field // Astrophys. J. 1953. V. 118. P. 116–141.
2. **Chandrasekhar S.** Hydrodynamic and hydromagnetic stability. N. Y.: Dover, 1981.
3. **Cheng L.** Instability of a gas jet in liquid // Phys. Fluids. 1985. V. 28. P. 2614–2616.
4. **Kendall J. M.** Experiments on annular liquid jet instability and on the formation of liquid shells // Phys. Fluids. 1986. V. 29, N 7. P. 2086–2094.
5. **Radwan A., Hasan A.** Axisymmetric electrogravitational stability of fluid cylinder ambient with transverse varying oscillating field // IAENG Intern. J. Appl. Math. 2008. V. 38, N 3. P. 113–120.
6. **Radwan A., Hasan A.** Magnetohydrodynamic stability of selfgravitating fluid cylinder // Appl. Math. Modelling. 2009. V. 33, N 4. P. 2121–2131.
7. **Hasan A.** Electrogravitational stability of oscillating streaming fluid cylinder // Physica B. 2011. V. 406, N 2. P. 234–241.
8. **Hasan A.** Electrogravitational stability of oscillating streaming dielectric compound jets ambient with a transverse varying electric field // Boundary Value Probl. 2011. V. 31. P. 1–14.
9. **Hasan A.** Capillary electrodynamic stability of selfgravitational fluid cylinder with varying electric field // Trans. ASME. J. Appl. Mech. 2012. V. 79, iss. 2. 021006.
10. **Hasan A.** Hydromagnetic instability of streaming jet pervaded internally by varying transverse magnetic field // Math. Probl. Engng. 2012. V. 2012. 325423.
11. **Hasan A., Abdelkhalek R.** Magnetogravitodynamic stability of streaming fluid cylinder under the effect of capillary force // Boundary Value Probl. 2013. V. 2013, iss. 1. P. 1–20.
12. **Hasan A.** Electrogravitational stability of streaming compound jets // Intern. J. Biomath. 2016. V. 9, iss. 2. 1650032.

Поступила в редакцию 29/I 2015 г.