РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК

СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ

АВТОМЕТРИЯ

2004, том 40, № 1

УДК 681.5.015

Ю. Г. Булычев, И. В. Бурлай, Е. Ю. Булычева, Д. М. Челахов, С. В. Шашлов

(Ростов-на-Дону)

ОБРАБОТКА ИЗМЕРЕНИЙ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ПРИНЦИПА ИНВАРИАНТНОСТИ

С использованием условий инвариантности разработан декомпозиционный подход к решению плохо обусловленных задач оптимального оценивания, позволяющий строить устойчивые МНК-оценки на базе двух параллельных алгоритмов, размерность которых существенно меньше размерности классической процедуры построения МНК-оценок.

Введение. Известно [1–3], что многие задачи оптимальной обработки измерительных данных относятся к классу плохо обусловленных и что это в итоге приводит к построению неустойчивых алгоритмов формирования искомых оценок. Кроме того, решение задач высокой размерности (так называемых сверхбольших задач [1]) сопряжено на практике со значительными вычислительными затратами, что является сложным даже для современных ЭВМ.

В настоящее время для построения устойчивых линейных оценок используются алгоритмы, основанные на применении принципов ортогональных разложений [1] и приближенного решения некорректных задач [2]. Анализ показывает, что на практике использование указанных принципов для сверхбольших задач линейного оценивания также представляет собой трудно разрешимую проблему вычислительного плана.

В данной работе развит новый подход к решению плохо обусловленных задач обработки измерений, позволяющий за счет декомпозиции формировать несложные параллельные алгоритмы построения устойчивых МНК-оценок, легко реализуемые на современных ЭВМ. В основу развиваемого подхода заложены некоторые теоретические идеи, заимствованные из работы [4], в частности условия инвариантности оценивания, используемые при решении соответствующей оптимизационной задачи.

Постановка задачи. Пусть имеется модель наблюдений

$$h_n = z_n + \Delta h_n, \quad n = \overline{1, N}, \tag{1}$$

где $h_n = h(t_n)$, $z_n = z(t_n)$ и $\Delta h_n = \Delta h(t_n)$. Здесь под $z(t)$ понимается информационный процесс

$$z(t) = A^{\text{т}} C(t) = C^{\text{т}}(t) A, \tag{2}$$

где $A = [a_m,\ m = \overline{1, M}]^{\text{т}}$ – вектор искомых коэффициентов; $C(t) = [c_m(t),\ m = \overline{1, M}]^{\text{т}}$ – вектор линейно независимых функций. Соответственно под $\{\Delta h_n\}_{n=1}^{N}$ понимаются случайные некоррелированные ошибки наблюдений, характеризуемые нулевым математическим ожиданием и соответствующей корреляционной матрицей K_H.

Представим (1) с учетом (2) в следующем виде:

$$h_n = z_{1n} + z_{2n} + \Delta h_n = A_1^{\text{т}} C_{1n} + A_2^{\text{т}} C_{2n} + \Delta h_n, \quad n = \overline{1, N}, \tag{3}$$

где

$$A_i = [a_{im},\ m = \overline{1, M_i}]^{\text{т}}, \quad a_{im} \in \{a_m,\ m = \overline{1, M}\}, \quad C_{in} = [c_{im}(t_n),\ m = \overline{1, M_i}]^{\text{т}},$$

$$c_{im}(t) \in \{c_m(t),\ m = \overline{1, M}\}, \{c_{1m}(t),\ m = \overline{1, M_1}\} \cap \{c_{2m}(t),\ m = \overline{1, M_2}\} = \varnothing,$$

$$\{c_{1m}(t),\ m = \overline{1, M_1}\} \cup \{c_{2m}(t),\ m = \overline{1, M_2}\} = \{c_m(t),\ m = \overline{1, M}\},$$

$$M_i < M, \quad i = 1, 2, \quad M_1 + M_2 = M.$$

Теперь запишем (3) в векторной форме:

$$H = Z_1 + Z_2 + \Delta H = Z + \Delta H, \tag{4}$$

где $H = [h_n,\ n = \overline{1, N}]^{\text{т}}$, $Z_i = [z_{in},\ n = \overline{1, N}]^{\text{т}}$, $\Delta H = [\Delta h_n,\ n = \overline{1, N}]^{\text{т}}$, $Z_i = C_i A_i$, $C_i = [c_{im}(t_n),\ n = \overline{1, N},\ m = \overline{1, M_i}]$, $i = 1, 2$.

Классическая МНК-оценка $\hat{A} = [\hat{a}'_m,\ m = \overline{1, M}]^{\text{т}}$ вектора $A = [a_m,\ m = \overline{1, M}]^{\text{т}}$ является решением системы нормальных уравнений [5]:

$$C^{\text{т}} K_H^{-1} C \hat{A} = C^{\text{т}} K_H^{-1} H, \tag{5}$$

где $C = [c_m(t_n),\ n = \overline{1, N},\ m = \overline{1, M}]$.

Из (5) следует, что для вычисления такой оценки требуется реализация процедуры обращения матрицы $C^{\text{т}} K_H^{-1} C$ размера $M \times M$. Как указывалось выше, при больших значениях M и плохой обусловленности данной матрицы может возникнуть существенная погрешность МНК-оценки. Чтобы снизить эту погрешность, сформулируем задачу нахождения МНК-оценки в рамках развиваемого ниже декомпозиционного подхода.

С учетом (3) и (4) будем искать МНК-оценки $\hat{A}_1$ и $\hat{A}_2$ векторов A_1 и A_2 независимо друг от друга в виде двух параллельных алгоритмов

$$\hat{A}_i = P_i H, \quad i = 1, 2, \tag{6}$$

где $P_i = [p_{imn},\ m=\overline{1, M_i},\ n=\overline{1,N}]$ – матрицы искомых коэффициентов.

В дальнейшем полагаем, что расширенная матрица $[C_1, C_2]$ имеет ранг, равный $M_1 + M_2 = M < N$.

Корреляционные матрицы $K_{\hat{A}_i}$ оценок (6) для принятой модели случайного вектора ΔH находятся по правилу [6]:

$$K_{\hat{A}_i} = P_i K_H P_i^{\text{т}}, \qquad i=1,2. \tag{7}$$

Требуется найти вид оптимальных матриц P_1 и P_2, обеспечивающих минимизацию следов $\operatorname{tr}(K_{\hat{A}_1}) = \sum_{m=1}^{M_1} \sigma_{1m}^2$ и $\operatorname{tr}(K_{\hat{A}_2}) = \sum_{m=1}^{M_2} \sigma_{2m}^2$ матриц $K_{\hat{A}_1}$ и $K_{\hat{A}_2}$ соответственно. При этом по аналогии с [4] полагаются выполненными условия инвариантности оценивания

$$P_i Z_i = A_i, \qquad i=\overline{1,2}, \tag{8}$$

$$P_1 Z_2 = [0]_{M_1\times 1}, \qquad P_2 Z_1 = [0]_{M_2\times 1}, \tag{9}$$

где $[0]_{M_1\times 1}$ и $[0]_{M_2\times 1}$ – нулевые вектор-столбцы размера M_1 и M_2 соответственно.

Синтез алгоритма оптимальной обработки данных. С учетом (4) условия несмещенности (8) можно записать в виде $P_i C_i A_i = A_i$ $(i=1,2)$, откуда следует

$$P_i C_i - E_{M_i\times M_i} = [0]_{M_i\times M_i}, \qquad i=1,2, \tag{10}$$

где $E_{M_i\times M_i}$ – единичная матрица размера $M_i \times M_i$; $[0]_{M_i\times M_i}$ – нулевая матрица размера $M_i \times M_i$. Соответственно условия инвариантности (9) запишутся следующим образом: $P_1 C_2 A_2 = [0]_{M_1\times 1}$, $P_2 C_1 A_1 = [0]_{M_2\times 1}$, или

$$P_1 C_2 = [0]_{M_1\times M_2}, \qquad P_2 C_1 = [0]_{M_2\times M_1}. \tag{11}$$

Для удобства дальнейших выкладок условия (11) представим в виде следующего выражения:

$$P_i C_j = [0]_{M_i\times M_j}, \qquad i\neq j,\ \ i,j=1,2. \tag{12}$$

Предполагаем, что система уравнений (10) и (12) совместна для фиксированного i. Задачу нахождения матриц P_i $(i=1,2)$ будем решать методом множителей Лагранжа, находя минимум функции

$$F(P_i, \gamma_i, \eta_i) = P_{im}^{\text{т}} K_H P_{im} + \gamma_{im}^{\text{т}} C_j^{\text{т}} P_{im} + [E_{im}^{\text{т}} + P_{im}^{\text{т}} C_i]\eta_m,\ \ m=\overline{1, M_i},\ \ i\neq j, \tag{13}$$

с учетом ограничений (10) и (12). В формуле (13) $\eta_{im} = [\eta_{imk},\ k=\overline{1,N}]^{\text{т}}$ и $\gamma_{im} = [\gamma_{imk},\ k=\overline{1,N}]^{\text{т}}$ – соответствующие векторные множители Лагранжа; $E_{im} =$

$=[0,\ldots,0,1,0,\ldots,0]^{\text{т}}$ – вектор-столбец размера $M_i \times 1$, у которого на m-й позиции стоит единица, а на остальных позициях – нуль; $P_{im} = [p_{imk},\ k=\overline{1,N}]^{\text{т}}$ – вектор-столбец искомых коэффициентов матрицы

$$P_i = \begin{bmatrix} P_{i1}^{\text{т}} \\ P_{i2}^{\text{т}} \\ \vdots \\ P_{iM_i}^{\text{т}} \end{bmatrix} = [p_{imk},\ m=\overline{1,M_i},\ k=\overline{1,N}].$$

Дифференцируя (13) по аргументам P_{im}, γ_{im} и η_{im}, получаем необходимые условия оптимальности:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F_{im}}{\partial P_{im}} = 2K_H P_{im} + C_j \gamma_{im} - C_i \eta_{im} = [0]_{N\times 1}; \\ \dfrac{\partial F_{im}}{\partial \gamma_{im}} = C_j^{\text{т}} P_{im} = [0]_{M_j \times 1}; \\ \dfrac{\partial F_{im}}{\partial \eta_{im}} = E_{im} - C_i^{\text{т}} P_{im} = [0]_{M_i \times 1}, \end{cases} \tag{14}$$

где $F_{im} = F(P_{im}, \gamma_{im}, \eta_{im})$.

Введем для сокращения записей следующие обозначения:

$$\Phi_{jj} = C_j^{\text{т}} K_H^{-1} C_j,\quad \Phi_{ji} = C_j^{\text{т}} K_H^{-1} C_i,\quad \Phi_{ij} = C_i^{\text{т}} K_H^{-1} C_j,\quad \Phi_{ii} = C_i^{\text{т}} K_H^{-1} C_i,$$

$$\Gamma_j = K_H^{-1} C_j,\qquad \Gamma_i = K_H^{-1} C_i.$$

С учетом данных обозначений из первого уравнения системы (14) находим

$$P_{im} = 2^{-1}(\Gamma_i \eta_{im} - \Gamma_j \gamma_{im}). \tag{15}$$

Умножая левую и правую части формулы (15) слева на матрицу $C_j^{\text{т}}$ и учитывая условие инвариантности ($C_j^{\text{т}} P_{im} = [0]_{M_j \times 1}$), после несложных преобразований получаем

$$\gamma_{im} = \Phi_{jj}^{-1} \Phi_{ji} \eta_{im}. \tag{16}$$

Аналогично, умножая формулу (15) слева и справа на матрицу $C_i^{\text{т}}$ и учитывая условие несмещенности ($C_i^{\text{т}} P_{im} = E_{im}$), можно записать

$$\eta_{im} = 2\Phi_{ii}^{-1}(E_{im} + 2^{-1}\Phi_{ij}\gamma_{im}). \tag{17}$$

Разрешая (16) и (17) относительно γ_{im} и η_{im}, имеем

$$\gamma_{im} = 2\Phi_{jj}^{-1}\Phi_{ji}(E_{M_i \times M_i} - \Phi_{ii}^{-1}\Phi_{ij}\Phi_{jj}^{-1}\Phi_{ji})^{-1}\Phi_{ii}^{-1}E_{im}, \tag{18}$$

$$\eta_{im} = 2(E_{M_i \times M_i} - \Phi_{ii}^{-1}\Phi_{ij}\Phi_{jj}^{-1}\Phi_{ji})^{-1}\Phi_{ii}^{-1}E_{im}. \tag{19}$$

Подставляя (18) и (19) в (15), получим

$$P_{im} = (\Gamma_i - \Gamma_j\Phi_{jj}^{-1}\Phi_{ji})(E_{M_i \times M_i} - \Phi_{ii}^{-1}\Phi_{ij}\Phi_{jj}^{-1}\Phi_{ji})^{-1}\Phi_{ii}^{-1}E_{im}. \tag{20}$$

Далее воспользуемся следующими обозначениями:

$$\Gamma_i - \Gamma_j\Phi_{jj}^{-1}\Phi_{ji} = \Psi_{jj}\Gamma_i, \tag{21}$$

$$(E_{M_i \times M_i} - \Phi_{ii}^{-1}\Phi_{ij}\Phi_{jj}^{-1}\Phi_{ji})^{-1}\Phi_{ii}^{-1} = (C_i^{\mathrm{T}}\Psi_{jj}\Gamma_i)^{-1}, \tag{22}$$

где $\Psi_{jj} = E_{N \times N} - \Gamma_j\Phi_{jj}^{-1}C_j^{\mathrm{T}}$.

С учетом (21) и (22) формулу (20) можно преобразовать к окончательному виду

$$P_{im} = \Psi_{jj}\Gamma_i(C_i^{\mathrm{T}}\Psi_{jj}\Gamma_i)^{-1}E_{im}. \tag{23}$$

Соответственно для искомой матрицы P_i с учетом (23) имеем

$$P_i = [\Psi_{jj}\Gamma_i(C_i^{\mathrm{T}}\Psi_{jj}\Gamma_i)^{-1}]^{\mathrm{T}}, \quad i \neq j, \quad i,j = 1,2. \tag{24}$$

Подставляя (24) в (6), получаем окончательные выражения для оптимальных оценок $\hat{A}_i$ $(i=1,2)$ в рамках развиваемого декомпозиционного подхода:

$$\hat{A}_i = [\Psi_{jj}\Gamma_i(C_i^{\mathrm{T}}\Psi_{jj}\Gamma_i)^{-1}]^{\mathrm{T}}H, \quad i \neq j, \quad i,j = 1,2. \tag{25}$$

С учетом (7), (24) находим выражение для корреляционных матриц оценок $\hat{A}_i$ $(i=1,2)$:

$$K_{\hat{A}_i} = (\Gamma_i^{\mathrm{T}}\Psi_{jj}^{\mathrm{T}}C_i)^{-1}\Xi_{ij}(C_i^{\mathrm{T}}\Psi_{jj}^{\mathrm{T}}\Gamma_i)^{-1}, \quad i \neq j, \quad i,j = 1,2, \tag{26}$$

где $\Xi_{ij} = \Gamma_i^{\mathrm{T}}\Psi_{jj}^{\mathrm{T}}K_H\Psi_{jj}\Gamma_i$.

Анализ выражений (24)–(26) показывает, что в развиваемом подходе требуется обращение матрицы Φ_{jj} размера $M_j \times M_j$, а также матрицы $C_i^{\mathrm{T}}\Psi_{jj}\Gamma_i$ размера $M_i \times M_i$. Если $M_i = M_j = M/2$, то алгоритм (25) позволяет параллельно формировать оценки $\hat{A}_1$ и $\hat{A}_2$ с использованием процедур обращения матриц размера $M/2\times M/2$. В то же время классический МНК предполагает построение соответствующей псевдообратной матрицы путем реализации процедуры обращения матрицы размера $M\times M$. Очевидно, что при больших значениях M и плохой обусловленности обращаемых матриц развиваемый подход может оказаться весьма эффективным в вычислительном плане.

Если информационный процесс (2) представить в виде $z(t)=B^{\mathrm{T}}C(t)=$ $=C^{\mathrm{T}}(t)B$ (где $B=[A_1^{\mathrm{T}},\ A_2^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}$), то можно убедиться, что матрица $P=\begin{bmatrix}P_1\\P_2\end{bmatrix}$ является псевдообратной матрицей для МНК-оценки

$$\hat{B}=PH. \tag{27}$$

Следовательно, вероятностные характеристики оценок (25), формируемых в рамках декомпозиционного подхода, совпадают с аналогичными характеристиками МНК-оценки (27). Данный вывод вполне согласуется с известной теоремой Гаусса – Маркова о наилучших линейных оценках [5]. При этом очевидно, что элементы корреляционных матриц (26) совпадают с соответствующими элементами корреляционной матрицы $K_{\hat{B}}$ для МНК-оценки (27):

$$K_{\hat{B}}=DK_H D^{\mathrm{T}}, \tag{28}$$

где $D=(C^{\mathrm{T}}K_H^{-1}C)^{-1}C^{\mathrm{T}}K_H^{-1}$.

Однако следует помнить, что формирование элементов матриц $K_{\hat{A}_i}$ $(i=1,2)$ в соответствии с алгоритмом (26) является также более предпочтительным по сравнению с алгоритмом (28) в силу указанных выше причин вычислительного характера.

Тестовый пример. Для анализа эффективности развитого подхода рассмотрим два варианта разбиения вектора $A=[a_m,\ m=\overline{1,7}]^{\mathrm{T}}$ на подвекторы A_1 и A_2. В первом случае положим

$$A_1=[a_{1m},\ m=\overline{1,4}]^{\mathrm{T}}=[a_1,a_3,a_4,a_6]^{\mathrm{T}},$$

$$A_2=[a_{2m},\ m=\overline{1,3}]^{\mathrm{T}}=[a_2,a_5,a_7]^{\mathrm{T}},$$

во втором –

$$A_1=[a_{1m},\ m=\overline{1,3}]^{\mathrm{T}}=[a_2,a_4,a_6]^{\mathrm{T}},$$

$$A_2=[a_{2m},\ m=\overline{1,4}]^{\mathrm{T}}=[a_1,a_3,a_5,a_7]^{\mathrm{T}}.$$

В качестве базисных функций используем следующие комбинации степенных полиномов: для первого варианта

$$C_{1n}=[c_{1m}(t_n),\ m=\overline{1,4}]^{\mathrm{T}}=[t_n^0,\ t_n^2,\ t_n^3,\ t_n^5]^{\mathrm{T}},$$

$$C_{2n}=[c_{2m}(t_n),\ m=\overline{1,3}]^{\mathrm{T}}=[t_n^1,\ t_n^4,\ t_n^6]^{\mathrm{T}},$$

для второго варианта

$$C_{1n} = [c_{1m}(t_n),\ m = \overline{1,3}]^{\mathrm{T}} = [t_n^1, t_n^3, t_n^5]^{\mathrm{T}},$$

$$C_{2n} = [c_{2m}(t_n),\ m = \overline{1,4}]^{\mathrm{T}} = [t_n^0, t_n^2, t_n^4, t_n^6]^{\mathrm{T}}.$$

В ходе численных расчетов полагалось $a_1 = 1000$, $a_2 = -200$, $a_3 = 50$, $a_4 = 10$, $a_5 = -2$, $a_6 = 3$, $a_7 = 1$, при этом в формулах (1)–(3) принято $N = 300$, $t_{n+1} - t_n = \Delta t = 0{,}5$; измерения (1) формировались с использованием датчика случайных чисел, генерирующего некоррелированности ошибки Δh_n с нулевым математическим ожиданием и диагональной корреляционной матрицей $K_H = \mathrm{diag}[\sigma_n^2,\ n = \overline{1,300}]$, где $\sigma_n^2 = \sigma^2 = 0{,}04$ (все величины полагались безразмерными).

Применяя разработанный декомпозиционный алгоритм (24), (25), для первого варианта разбиения вектора A на подвекторы A_1 и A_2 были получены оценки $\hat{a}_m$ $(m = \overline{1,7})$, характеризующиеся относительными погрешностями $\delta a_{im} = 10^2 |\hat{a}_{im} - a_{im}| / |a_{im}|$:

$$\delta a_{11} = \delta a_1 = 1{,}585, \quad \delta a_{12} = \delta a_3 = 0{,}621,$$

$$\delta a_{13} = \delta a_4 = 0{,}082, \quad \delta a_{14} = \delta a_6 = 1{,}967 \cdot 10^{-5},$$

$$\delta a_{21} = \delta a_2 = 1{,}643 \cdot 10^{-4}, \ \delta a_{22} = \delta a_5 = 1{,}409 \cdot 10^{-7}, \ \delta a_{23} = \delta a_7 = 2{,}756 \cdot 10^{-11}$$

(все расчеты проводились с точностью до 15 разрядов).

Для второго варианта разбиения вектора A на подвекторы A_1 и A_2 получены следующие значения относительных погрешностей:

$$\delta a_{11} = \delta a_2 = 0{,}178, \quad \delta a_{12} = \delta a_4 = 0{,}016, \quad \delta a_{13} = \delta a_6 = 5{,}617 \cdot 10^{-6},$$

$$\delta a_{21} = \delta a_1 = 0{,}087, \quad \delta a_{22} = \delta a_3 = 0{,}083,$$

$$\delta a_{23} = \delta a_5 = 1{,}284 \cdot 10^{-3}, \quad \delta a_{24} = \delta a_7 = 3{,}336 \cdot 10^{-8}.$$

В свою очередь, реализация классического МНК (5) привела к следующим погрешностям:

$$\delta a_1 = 43{,}053, \quad \delta a_2 = 24{,}902, \quad \delta a_3 = 2{,}686, \quad \delta a_4 = 0{,}138,$$

$$\delta a_5 = 2{,}968 \cdot 10^{-3}, \quad \delta a_6 = 2{,}906 \cdot 10^{-6}, \quad \delta a_7 = 3{,}846 \cdot 10^{-10}.$$

В ходе численного эксперимента рассчитывались корреляционные матрицы $K_{\hat{A}_i}$ $(i = 1, 2)$ в соответствии с алгоритмом (26) и корреляционная матрица $K_{\hat{B}}$ в соответствии с алгоритмом (28). В целях сокращения записей приведем лишь диагональные элементы данных матриц:

$$\mathrm{diag}K_{\hat{A}_1} = [0{,}031;\ 3{,}631\cdot 10^{-6};\ 2{,}306\cdot 10^{-9};\ 0],$$

$$\mathrm{diag}K_{\hat{A}_2} = [2{,}287\cdot 10^{-5};\ 0;\ 0]$$

(для первого варианта декомпозиции);

$$\mathrm{diag}K_{\hat{A}_1} = [2{,}931\cdot 10^{-3};\ 4{,}943\cdot 10^{-8};\ 1{,}912\cdot 10^{-14}],$$

$$\mathrm{diag}K_{\hat{A}_2} = [0{,}079;\ 1{,}779\cdot 10^{-7};\ 2{,}043\cdot 10^{-14};\ 0]$$

(для второго варианта декомпозиции);

$$\mathrm{diag}K_{\hat{B}} = [0{,}755;\ 0{,}073\cdot 10^{-6};\ 7{,}002\cdot 10^{-4}; 1{,}236\cdot 10^{-6}; 5{,}096\cdot 10^{-10}; 4{,}781\cdot 10^{-14}; 0]$$

(для классического МНК).

В ходе расчетов в евклидовой норме определялись числа обусловленности v_i $(i=1,2)$ обращаемых матриц $C_i^{\mathrm{T}}\Psi_{jj}\Gamma_i$ $(i \neq j,\ i,j=1,2)$ и число обусловленности v_3 обращаемой матрицы $C^{\mathrm{T}}K_H^{-1}C$, соответствующей классическому МНК. Для первого варианта декомпозиции

$$\mathrm{v}_1 = 5{,}283\cdot 10^{15}, \qquad \mathrm{v}_2 = 1{,}276\cdot 10^{14};$$

для второго варианта декомпозиции

$$\mathrm{v}_1 = 9{,}208\cdot 10^{13}, \qquad \mathrm{v}_2 = 7{,}279\cdot 10^{14};$$

для классического МНК

$$\mathrm{v}_3 = 4{,}537\cdot 10^{26}.$$

Сравнительный анализ показывает, что разработанный подход позволил существенно снизить вычислительную погрешность оценивания, особенно по коэффициентам a_1, a_2 и a_3. Достигнутая регуляризация задачи определена ее декомпозицией и улучшением обусловленности соответствующих матриц, подлежащих обращению.

Заключение. Предлагаемый подход может эффективно использоваться в комплексе с алгоритмами ортогональных разложений [1] и алгоритмами решения некорректных задач [2]. При этом на первом этапе строятся два параллельных алгоритма оценивания согласно развитому декомпозиционному подходу, которые затем исследуются на устойчивость. В случае плохой устойчивости вводится второй этап, на котором данные алгоритмы подвергаются процедурам ортогональных разложений или регуляризации. Поскольку декомпозированные алгоритмы имеют размерность существенно меньшую, чем классический алгоритм МНК, то применение указанных процедур на втором этапе существенно упрощается в вычислительном плане.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Лоусон Ч., Хенсон Р.** Численное решение задач метода наименьших квадратов. М.: Наука, 1986.
2. **Тихонов А. Н., Уфимцев М. В.** Статистическая обработка результатов экспериментов. М.: Изд-во МГУ, 1988.
3. **Булычев Ю. Г., Бурлай И. В.** Оптимальное оценивание параметров нормальной регрессии для случая расширенной модели наблюдений // Проблемы передачи информации. 1993. **29**, № 3. С. 31.
4. **Булычев Ю. Г., Бурлай И. В.** Оптимальное оценивание производных различных порядков в классе функций с финитным спектром // Журнал вычислит. математики и мат. физики. 2000. № 4. С. 505.
5. **Линник Ю. В.** Метод наименьших квадратов и основы математико-статистической теории обработки наблюдений. М.: Физматгиз, 1962.
6. **Вентцель Е. С.** Теория вероятностей. М.: Высш. шк., 1999.

Поступила в редакцию 4 марта 2003 г.