Второе замечание касается области устойчивости при $k > 1$. Как было указано в [5], в этой области возможны колебательные режимы горения пороха (частота ω комплексна). В частности, на кривой s температура и скорость горящего пороха, выведенного каким-либо образом из стационарного режима, колеблются без затухания около своих стационарных значений. Возможно, что в этой области могут наблюдаться эффекты, связанные с наличием у системы собственной частоты (например, резонансная зависимость скорости горения от частоты падающей на поверхность пороха звуковой волны).

Автор благодарит А. С. Компанейца, О. И. Лейпунского, А. Г. Истратова, В. Б. Либровича и С. С. Новикова за обсуждение работы.

Поступила 26 III 1965

ЛИТЕРАТУРА

1. Зельдович Я. Б. К теории горения порохов и взрывчатых веществ. Ж. эксперим. и теор. физ., 1942, т. 12, № 11—12.
2. Коротков А. И., Лейпунский О. И. Зависимость температурного коэффициента скорости горения пороха при атмосферном давлении от температуры пороха. Сб. «Физика взрыва», Изд-во АН СССР, 1953, № 2.
3. Похил П. Ф., Нефедова О. И., Марголин А. Д. Об аномальной зависимости скорости горения пороха от начальной температуры. Докл. АН СССР, 1962, т. 145, № 4.
4. Зельдович Я. Б. О скорости горения пороха при переменном давлении. ПМТФ, 1964, № 3.
5. Истратов А. Г., Либрович В. Б. Об устойчивости горения пороха. ПМТФ, 1964, № 5.
6. Новиков С. С., Рязанцев Ю. С. К теории устойчивости горения порохов. ПМТФ, 1965, № 1.
7. Зельдович Я. Б., Франк-Каменецкий Д. А. Теория теплового распространения пламени. Ж. физ. химии, 1938, т. 12, № 1.
8. Зельдович Я. Б. Об устойчивости режима горения пороха в полузамкнутом объеме. ПМТФ, 1963, № 1.
9. Новожилов Б. В. Переходные процессы при горении порохов. ПМТФ, 1962, № 5.
10. Истратов А. Г., Либрович В. Б., Новожилов Б. В. О приближенном методе в теории нестационарной скорости горения пороха. ПМТФ, 1964, № 3.

О РЕЖИМАХ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ПЛАМЕНИ

С. А. Каганов

(Саратов)

Если с торца полуограниченной цилиндрической трубы подается с определенной скоростью горючая смесь, предварительно нагретая до температуры T_0, то возможны два режима стационарного горения. Первый реализуется при малых скоростях подачи горючего, и основное значение при этом режиме имеет передача тепла теплопроводностью от сгоревших частиц к свежей смеси. Во втором режиме, реализуемом при больших скоростях подачи, горение происходит за счет самовоспламенения предварительно нагретого горючего.

Статьи [1,2] посвящены изучению указанных режимов стационарного горения. Отмечено [1], что второй режим довольно часто реализуется в современных технических устройствах (реактивных двигателях).

Основные результаты работы [2] получены численным интегрированием соответствующей краевой задачи с использованием ЭВМ.

В указанных работах процесс горения считается одномерным. Хорошо известно, однако, что как в процессах нормального горения, так и в процессах с самовоспламенением большее значение имеет учет теплопотерь через стенки трубы. Представляется в связи с этим целесообразным изучение процесса с учетом радиального распределения температуры.

В настоящей работе предпринята попытка изучения вышеуказанных режимов с дополнительным рассмотрением влияния стенок. Это позволяет, во-первых, дополнить картину процесса учетом возможности потухания, что должно оказаться существенным при исследовании устойчивости процесса горения. Во-вторых, исследование проводится при помощи линеаризации входящей в уравнение нелинейной функции $F(T)$, что позволяет в простой форме получить критерии для различных режимов и вычислить расстояние, которое должна пройти горючая смесь в случае самовоспламенения.

Процесс горения в полуограниченной цилиндрической трубе радиуса R описывается (в нестационарном режиме) уравнением

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a^2 \left(\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \right) - u_0 \frac{\partial T}{\partial x} + \delta F(T) \tag{1}$$

с условиями

$$T|_{t=0} = 0, \quad T|_{x=0} = T_0, \quad T|_{r=R} = 0 \tag{2}$$

Здесь t — время, T — температура, x — координаты вдоль трубы, r — радиальная координата, u_0 — скорость подачи топлива, $F(T)$ — функция, удовлетворяющая условиям

$$F(T) = 0 \quad \text{для} \quad 0 \leqslant T \leqslant T^* \quad (0 \leqslant T^* < T_1)$$
$$F(T) > 0 \quad \text{для} \quad T^* < T < T_1 \quad F(T) = 0 \text{ для } T \geqslant T_1$$

Стационарный режим описывается уравнением

$$a^2 \left(\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \right) - u_0 \frac{\partial T}{\partial x} + \delta F(T) = 0$$
$$T|_{x=0} = T_0, \qquad T_{r=R} = 0 \tag{3}$$

Простые соображения показывают, что влияние стенок существенно. Действительно, рассмотрим случай большого u_0 и пренебрежем в этом случае, как сделано в [1,2], теплопроводностью в направлении оси x, тогда

$$u_0 \frac{\partial T}{\partial x} = a^2 \left(\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \delta F(T), \qquad T|_{x=0} = T_0, \quad T|_{r=R} = 0,$$

Эта задача подобна (с заменой t на x) нестационарной задаче теплового самовоспламенения в бесконечном цилиндре радиуса R с начальной температурой, равной T_0, и температурой стенок, равной нулю. Как известно, существует такое значение $\delta = \delta^*$, что для $\delta < \delta^*$ самовоспламенения не произойдет. В одномерной же теории при малых δ имеет место горение в режиме самовоспламенения.

Задача (3) с нелинейной функцией $F(T)$ весьма трудна для изучения. Возможно исследование этой задачи численным интегрированием для конкретных видов $F(T)$ и различных значений параметров. Однако присутствие радиальных членов усложняет задачу численного интегрирования. К тому же точный вид функции $F(T)$ обычно неизвестен, неизвестны также точные значения многих параметров. Представляется поэтому целесообразным упрощение задачи таким образом, чтобы оставалось возможным получение правильных качественных результатов и приближенных количественных оценок. Оказывается, что линеаризация функции $F(T)$ вполне приемлема.

Весьма важным является выбор способа линеаризации.

Возможна замена кривой либо касательной в точке $(T_0, F(T_0))$, либо прямой, проходящей через начало координат и точку $(T_0, F(T_0))$, либо прямой, проходящей через начало координат так, чтобы площадь треугольника над отрезком $[0, T_1]$ равнялась площади под кривой $F(T)$. Выбор способа линеаризации определяется конкретным видом функции $F(T)$ и значением T_0.

Заменим функции $F(T)$ функцией $\beta_1 T$. Тогда задача (3) принимает вид

$$a^2 \left(\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \right) - u_0 \frac{\partial T}{\partial x} + \beta T = 0$$
$$T|_{x=0} = T_0, \qquad T|_{r=R} = 0, \qquad \beta = \delta\beta_1 \tag{4}$$

Задача (4) решается методом разделения переменных. Полагая $T = \theta(r) X(x)$, будем иметь

$$\theta'' = \frac{1}{r} \theta' + \lambda^2 \theta = 0, \qquad \theta|_{r=R} = 0 \tag{5}$$

$$X'' = \frac{u_0}{a^2} X' + \left(\frac{\beta}{a^2} - \lambda^2 \right) X = 0 \tag{6}$$

Из (5) имеем $\theta_k = J_0(\lambda_k r)$, где $J_0(z)$ — функция Бесселя нулевого порядка, и λ_k — корни уравнения $J_0(\lambda R) = 0$. Решение (6) имеет вид

$$X_k(x) = \exp \left\{ \left(\frac{u_0}{2a^2} - \left[\frac{u_0^2}{4a^4} + \left(\lambda_k^2 - \frac{\beta}{a^2} \right) \right]^{1/2} \right) x \right\}$$

Таким образом, получим

$$T = T_0 \sum_k A_k J_0 (\lambda_k r) X_k (x) \qquad (7)$$

Коэффициенты A_k находятся из уравнения

$$\sum_k A_k J_0 (\lambda_k r) = 1$$

Очевидно, основное значение в (7) имеет первое слагаемое. Следовательно, можно считать

$$T = A_1 T_0 J_0 (\lambda_1 r) e^{\nu x} \qquad \left(\lambda_1 = \frac{b}{R}, \ \nu = \frac{u_0}{2a^2} - \left[\frac{u_0^2}{4a^4} + \left(\lambda_1^2 - \frac{\beta}{a^2}\right)\right]^{1/2}\right) \qquad (8)$$

Здесь b — первый корень уравнения $J_0 (z) = 0$. Рассматривая решение (8), получим три случая:

1) Если

$$\beta < \lambda_1^2 a^2 \quad (R < ab / \sqrt{\beta})$$

то при $x \to \infty$ температура $T \to 0$, т. е. в этом случае произойдет затухание.

2) Если

$$\beta > \lambda_1^2 a^2, \qquad \frac{u_0^2}{4a^4} + \left(\lambda_1^2 - \frac{\beta}{a^2}\right) \geqslant 0, \qquad \text{или} \quad u_0 \geqslant 2a^2 \left(\frac{\beta}{a^2} - \lambda_1^2\right)^{1/2}$$

то при $x \to \infty$ температура $T \to \infty$; при этом в каждой точке x температура остается конечной. Этот случай следует трактовать как горение в режиме самовоспламенения. Неограниченное увеличение температуры при $x \to \infty$ происходит в результате линейной аппроксимации. На самом деле, температура не может подняться выше значения T_1. Найдем расстояние от торца до точки x с температурой T_1 (по оси трубы). Имеем

$$T_1 = T_0 A_1 e^{\nu l}, \quad \text{или} \quad l = \frac{1}{\nu} \ln \frac{T_1}{T_0 A_1} \qquad (9)$$

Для больших u_0 вычисления можно упростить, учитывая, что в этом случае

$$\nu = \frac{u_0}{2a^2}\left\{1 - \left[1 + \left(\lambda_1^2 - \frac{\beta}{a^2}\right)\frac{4a^4}{u_0^2}\right]^{1/2}\right\} \approx \frac{u_0}{2a^2}\left[1 - \left(1 - \frac{\lambda_1^2 a^4 - \beta a^2}{u_0^2}\right)\right] = \frac{\beta - \lambda_1^2 a^2}{u_0}$$

Тогда

$$l = \frac{u_0}{\beta - (a^2 b^2 / R^2)} \ln \frac{T_1}{T_0 A_1} \qquad (10)$$

3) Если

$$\beta > \lambda_1 a^2, \qquad u_0 < 2a^2 \sqrt{(\beta / a^2) - \lambda_1^2} \qquad (11)$$

то не существует имеющего физический смысл стационарного решения. Нетрудно установить, рассматривая нестационарную линеаризированную задачу (1), что в этом случае уже для x, как угодно близких к нулю (т. е. на каком угодно близком расстоянии от торца), при увеличении t температура сильно увеличивается. Это означает, что для u_0, удовлетворяющих (11), будет иметь место горение в режиме теплопроводности.

Введем безразмерный параметр

$$\mu = \frac{4a^2 (\beta - \lambda_1^2 a^2)}{u_0^2} \qquad (12)$$

Если $\mu \leqslant 0$, то происходит затухание процесса. Если $0 < \mu \leqslant 1$, то горение происходит в режиме самовоспламенения. Если $\mu > 1$, то горение происходит в режиме теплопроводности.

Автор благодарит С. В. Фальковича за обсуждения.

Поступила 27 III 1965

ЛИТЕРАТУРА

1. Зайдель Р. М., Зельдович Я. Б. О возможных режимах стационарного горения. ПМТФ, 1962, № 5.
2. Мержанов А. Г. Филоненко А. К. О тепловом самовоспламенении гомогенной газовой смеси в потоке. Докл. АН СССР, 1963, т. 152, № 1.