

6. Батьков Ю. В., Новиков С. А., Синицына Л. М. и др. Проблемы прочности, 1981, 5, 56.
7. Анианян А. В., Дремин А. Н., Канель Г. И. ФГВ, 1973, 9, 3, 437.
8. Авиационные материалы: Справочник в девяти томах/Под ред. А. Т. Тумапова.—М.: ОНТИ, 1975.—Т. 1.
9. Иванов А. Г., Новиков С. А., Синицын В. А. ФТТ, 1963, 5, 1, 269.
10. Работнов Ю. И. Механика деформируемого твердого тела.—М.: Наука, 1979.
11. Morris C. E., Fritz J. N., Holian B. L. // Shock Waves in Condensed Matter, 1981.—N. Y., 1982.
12. Curran D. R. J. Appl. Phys., 1963, 34, 9.
13. Бордзиловский С. А., Карабанов С. М. ФГВ, 1986, 22, 3, 131.
14. Дремин А. Н., Канель Г. И., Черникова О. Б. ПМТФ, 1981, 4, 132.
15. Урлин В. Д. ЖЭТФ, 1965, 49, 2(8).
16. Ross M. // Shock Waves in Condensed Matter, 1983.—Amsterdam, 1984.
17. Большаков А. П., Новиков С. А., Синицын В. А. Проблемы прочности, 1979, 10, 87.
18. Steinberg D. J., Cochram S. Y., Guinan' H. G. J. Appl. Phys., 1980, 51, 3, 1498.
19. Альтшуллер Л. В., Баканова А. А., Дудоладов И. П. и др. ПМТФ, 1981, 2, 3.
20. McQueen R., Fritz J. N., Morris C. E. // Shock Waves in Condensed Matter, 1983.—Amsterdam, 1984.
21. Воробьев А. А., Дремин А. И., Канель Г. И. ПМТФ, 1974, 5, 94.

Поступила в редакцию 4/II 1988

УДК 536.46

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ПОВЕДЕНИЕ СКОРОСТИ ГОРЕНИЯ КОНДЕНСИРОВАННЫХ СИСТЕМ ПРИ МАЛЫХ ВОЗМУЩЕНИЯХ

A. B. Кискин, B. B. Новожилов

(Новосибирск, Москва)

Задачу от асимптотическом поведении нестационарной скорости горения в результате малого возмущения температурного профиля стационарно горящей газифицирующейся конденсированной системы (к-системы) будем рассматривать в рамках феноменологической теории нестационарного горения [1]. Эта проблема рассматривалась в [1—3]. Методом гармонического анализа получены [1] граници колебательных режимов горения и устойчивости стационарного горения. В [2, 3] для решения использован операционный метод, позволяющий найти решение во всей области определяющих параметров k , r . Однако в [2] определена только граница устойчивости, а в [3] приведено ошибочное решение линейного дифференциального уравнения, описывающего эволюцию возмущения. По этой причине результаты анализа асимптотического поведения возмущения скорости горения [3] неверны.

Исследование характера отклика скорости горения на воздействие малого возмущения будем проводить в линейном приближении. Считаем, что к начальному моменту времени действие возмущающего фактора закончилось и выражается в малых отклонениях температурного распределения в к-фазе и скорости горения от стационарного состояния. Тогда поведение нестационарной скорости горения можно описать следующей системой уравнений в безразмерных переменных (давление и другие внешние факторы постоянны):

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Theta}{\partial \tau} - v \frac{\partial \Theta}{\partial \xi} &= \frac{\partial^2 \Theta}{\partial \xi^2}, \quad 0 < \xi < \infty, \\ \Theta(\infty, \tau) &= \Theta_0 = 0, \\ \Theta_s &= \Theta_s(\varphi), \quad v = v(\varphi), \quad \varphi = -\frac{\partial \Theta}{\partial \xi}(0, \tau), \\ \Theta(\xi, 0) &= \Theta e^{0-\xi}. \end{aligned} \tag{1}$$

Здесь Θ — температура к-фазы; v — скорость горения; ξ — пространственная координата; τ — время. Индексы: s — поверхностный; 0 — ниж-

ний — начальный, верхний — стационарный. Решение будем искать в виде

$$\Theta(\xi, \tau) = e^{-\xi} + \delta\Theta(\xi, \tau), v(\tau) = 1 + \delta v(\tau),$$

$$\Theta_s(\tau) = 1 + \delta\Theta_s(\tau), \varphi(\tau) = 1 + \delta\varphi(\tau),$$

где $\delta\Theta$, $\delta\varphi$, δv — собственно возмущенная часть решения. Линеаризуя уравнение теплопроводности и нелинейные связи (1) на границе $\xi = 0$ между Θ_s , φ и v с использованием стационарных зависимостей $v^0(\Theta_0)$, $\Theta_s^0(\Theta_0)$, получим систему уравнений для возмущенных переменных:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \delta\Theta}{\partial \tau} - \frac{\partial \delta\Theta}{\partial \xi} + \delta v e^{-\xi} &= \frac{\partial^2 \Theta}{\partial \xi^2}, \quad 0 < \xi < \infty, \quad \delta\Theta(\infty, \tau) = 0, \\ \delta v &= \frac{k}{r} \delta\Theta_s, \quad \delta\varphi = \frac{k+r-1}{r} \delta\Theta_s, \quad \delta\Theta(\xi, 0) = \delta\Theta^0(\xi). \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь используются параметры k , r , характеризующие стационарные зависимости $r^0(\Theta_0)$, $\Theta_s^0(\Theta_0)$:

$$k = \frac{dv}{d\Theta_0}, \quad r = \frac{d\Theta_s^0}{d\Theta_0} \quad \text{при } v^0 = \Theta_s^0 = 1.$$

В связи с тем, что нас интересует поведение скорости горения или, что то же самое, температуры поверхности, а знание временной истории всего температурного распределения необязательно, воспользуемся методом, описанным в [4].

Применим к (2) двойное преобразование Лапласа:

$$\begin{aligned} \sigma \tilde{\Theta} - \bar{\Theta}_0 - \eta \tilde{\Theta} + \tilde{\Theta}_s + \tilde{v}/(1+\eta) &= \eta^2 \tilde{\Theta} - \eta \tilde{\Theta}_s + \tilde{\varphi}, \\ \tilde{\varphi} &= \frac{k+r-1}{r} \tilde{\Theta}_s, \quad \tilde{v} = \frac{k}{r} \tilde{\Theta}_s. \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь принято соответствие оригиналов и изображений

$$\begin{aligned} \delta\Theta(\xi, \tau) &\div \tilde{\Theta}(\xi, \sigma) \div \tilde{\Theta}(\eta, \sigma), \quad \delta\Theta_0(\xi) \div \tilde{\Theta}_0(\eta), \\ \delta\Theta_s(\tau) &\div \tilde{\Theta}_s(\sigma), \quad \delta\varphi(\tau) \div \tilde{\varphi}(\sigma), \quad \delta v(\tau) \div \tilde{v}(\sigma). \end{aligned}$$

Считаем функцию $\tilde{\Theta}_0(\xi)$ такой, что интеграл $\bar{\Theta}_0(\eta) = \int_0^\infty \delta\Theta_0(\xi) e^{-\xi\eta} d\xi$ сходится при $\operatorname{Re} \eta < \infty$. Из (3) следует, что

$$\tilde{\Theta}(\eta, \sigma) = \frac{\tilde{v} - (1+\eta)(\bar{\Theta}_0 + \tilde{\varphi}) + (1+\eta)^2 \tilde{\Theta}_s}{(\eta^2 + \eta - \sigma)(1+\eta)}. \quad (4)$$

Для существования оригинала функции $\tilde{\Theta}(\eta, \sigma)$ необходимо, чтобы она не имела особых точек при $\operatorname{Re} \eta > \eta'$ и $\operatorname{Re} \sigma > \sigma'$, где η' , σ' — некоторые действительные числа. Таким образом, числитель выражения (4) должен быть нулевым при $\eta(\sigma) = (\sqrt{1+4\sigma}-1)/2$ в области достаточно больших значений $\operatorname{Re} \eta$ и $\operatorname{Re} \sigma$ (точка $\eta = -1$ не представляет интереса, поскольку ей соответствует тривиальное нулевое решение). Отсюда следует

$$\tilde{\Theta}_s(\sigma) = \frac{2r(1+\sqrt{1+4\sigma})\bar{\Theta}_0(\eta(\sigma))}{r(1+4\sigma)-2(k-1)\sqrt{1+4\sigma}+2(k+1)-r}. \quad (5)$$

Функция $\tilde{\Theta}_s(\sigma)$ имеет четыре особые точки:

$$\sigma_0 = -1/4,$$

$$\sigma_{1,2} = \frac{(k-1)^2 - r(k+1) \pm (k-1)\sqrt{(k-1)^2 - r(2k+2-r)}}{2r^2}, \quad (6)$$

σ_3 — бесконечно удаленная особая точка. Здесь точке σ_1 соответствует знак плюс перед корнем, а σ_2 — знак минус, σ_1, σ_2 — точки ветвления, а σ_0, σ_3 — полюсы. Для получения однозначной функции $\Theta_s(\sigma)$ проведем на плоскости σ вдоль отрицательной вещественной оси разрез, соединяющий точки ветвления σ_0 и σ_3 . Отметим, что в результате этой операции действительная часть выражения $\sqrt{1+4\sigma}$ неотрицательна при любом комплексном σ .

Особый интерес представляют особые точки с максимальной действительной частью, поскольку асимптотическое поведение оригинала определяется свойствами изображения в окрестности именно этих точек. Возможны два случая: 1) все особые точки расположены на действительной оси ($\operatorname{Im} \sigma_{1,2} = 0$); 2) точки σ_1, σ_2 комплексно-сопряженные ($\sigma_1 = \bar{\sigma}_2$).

В дальнейшем будем пользоваться теоремой об асимптотическом разложении оригинала при $\tau \rightarrow \infty$ [5]: если функцию $F(\sigma)$ в окрестности особой точки σ^* с максимальной действительной частью можно представить в виде абсолютно сходящегося ряда

$$F(\sigma) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n (\sigma - \sigma^*)^{z_n},$$

тогда асимптотическое разложение оригинала $f(\tau)$ будет иметь вид

$$f(\tau) = e^{\sigma^* \tau} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{C_n \tau^{-z_n-1}}{\Gamma(-z_n)},$$

где $1/\Gamma(-z_n) = 0$ при $z_n = 0, 1, 2, \dots$; Γ — гамма-функция. При наличии нескольких особых точек с одинаковыми максимальными действительными частями конечный результат определяется суммированием отдельных разложений.

Преобразуем выражение (5) к виду

$$\begin{aligned} \tilde{\Theta}_s(\sigma) &= \frac{2\bar{\Theta}_0(\eta(\sigma))}{\eta_1 - \eta_2} \left[\frac{1 + \eta_1}{\sqrt{1+4\sigma} - 1 - 2\eta_1} - \frac{1 + \eta_2}{\sqrt{1+4\sigma} - 1 - 2\eta_2} \right], \\ \eta_{1,2} &= \frac{\sqrt{1+4\sigma_{1,2}} - 1}{2} = \frac{k - r - 1 \pm \sqrt{(k-1)^2 - r(2k+2-r)}}{2r}, \end{aligned} \quad (7)$$

$$\operatorname{Re} \sqrt{1+4\sigma} \geq 0.$$

Рассмотрим область действительных значений σ_1, σ_2 . Она расположена выше ветви r_+ и ниже r_- параболы:

$$r_{\pm} = (1 \pm \sqrt{k})^2. \quad (8)$$

В этом случае в области $k > 1$ максимальное значение имеет σ_1 . Представим $\tilde{\Theta}_s(\sigma)$ в виде степенного ряда в окрестности полюса первого порядка σ_1

$$\tilde{\Theta}_s(\sigma) = \frac{(1 + \eta_1)(1 + 2\eta_1)}{(\eta_1 - \eta_2)(\sigma - \sigma_1)} \bar{\Theta}_0(\eta_1) + \sum_{n=0}^{\infty} C_n (\sigma - \sigma_1)^n.$$

Тогда, в соответствии с приведенной теоремой, следует, что при $\tau \rightarrow \infty$

$$\delta\Theta_s(\tau) = \frac{(1 + \eta_1)(1 + 2\eta_1)}{\eta_1 - \eta_2} \exp(\sigma_1 \tau) \int_0^{\infty} \delta\Theta_0(\xi) \exp(-\xi \eta_1) d\xi. \quad (9)$$

Выше ветви r_+ параболы (8) (см. рисунок) $\sigma_1 < 0$, т. е. возмущение затухает. Ниже ветви r_- , наоборот, $\sigma_1 > 0$, следовательно, это область неустойчивых стационарных режимов горения. При $k < 1$ значение $\sigma_1 > \sigma_2$ (6), однако из анализа (6), (7) следует, что для обращения знаменателя (5) (или (7)) в нуль, необходимо, чтобы $\operatorname{Re} \sqrt{1+4\sigma_2} < 0$. Это про-

Области режимов горения.
 $1 - \sigma_1 = -1/4$; $2 = r_+$; $3 = r_-$; $4 - \operatorname{Re}\sigma_1 = 0$; $5 - r = k - 1$; $6 - \operatorname{Re}\sigma_1 = -1/4$.

тиворечит условию неотрицательности (7), т. е. точка σ_2 не является корнем знаменателя выражения (5), а значит, и особой точкой. Таким образом, выше линии $r = 2k + 2$, на которой $\sigma_1 = -1/4$, поведение скорости горения также описывается зависимостью (9) с $\sigma_1 < 0$. Ниже линии $r = 2k + 2$ вне параболы (8) точка $\sigma_0 = -1/4$ становится главной особой точкой. В этом случае разложение $\tilde{\Theta}_s(\sigma)$ в окрестности σ_0 имеет вид

$$\begin{aligned} \tilde{\Theta}_s(\sigma) = & \frac{1}{\eta_1 - \eta_2} \int_0^\infty \delta\Theta_0(\xi) e^{\xi/2} \sum_{m=0}^\infty \frac{(-\xi)^m (\sigma + 1/4)^{m/2}}{m!} \times \\ & \times \sum_{n=0}^\infty \left[\frac{1 + \eta_2}{(1/2 + \eta_2)^{n+1}} - \frac{1 + \eta_1}{(1/2 + \eta_1)^{n+1}} \right] (\sigma + 1/4)^{n/2} d\xi. \end{aligned}$$

После перехода к асимптотическому представлению оригинала в соответствии с теоремой и выделения главного члена разложения приходим к зависимости

$$\delta\Theta_s(\tau) = \frac{2re^{-\tau/4}}{(2k+2-r)\tau^{3/2}} \int_0^\infty \delta\Theta_0(\xi) e^{\xi/2} \left[\xi - \frac{4k-r}{2k+2-r} \right] d\xi. \quad (10)$$

В области комплексных значений выполняется соотношение $\sigma_1 = \bar{\sigma}_2$. При $k < 1$ не выполняется условие $\operatorname{Re}\sqrt{1+4\sigma_{1,2}} \geq 0$, т. е. $\sigma_0 = -1/4$ — главная особая точка при $r_- < r < r_+$. Таким образом, поведение скорости горения определяется разложением $\tilde{\Theta}_s(\sigma)$ в окрестности точки ветвления σ_0 и описывается выражением (10) всюду при $0 \leq k \leq 1$ и $0 < r < 2k+2$.

При $k > 1$ граница $\operatorname{Re}\sigma_{1,2} = -1/4$ имеет форму неполного (усеченного по линии $k = 1$) эллипса

$$r = 1 + k \pm \sqrt{6k - k^2 - 1}.$$

Для k -системы с параметрами k, r , соответствующими внутренней части эллипса, возмущение затухает по закону (10). Вне эллипса при $r_- < r < r_+$ функция $\tilde{\Theta}_s(\sigma)$ имеет две особые точки с одинаковыми максимальными действительными частями. В этом случае конечный результат является суммой асимптотических представлений для каждой из точек σ_1, σ_2 :

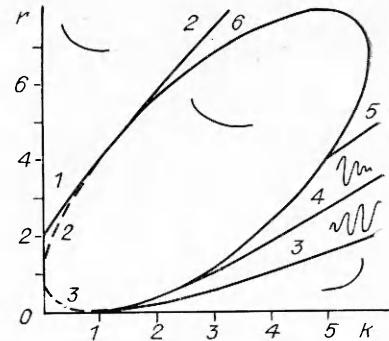
$$\begin{aligned} \delta\Theta_s(\tau) = & 2 \sqrt{\frac{k(2k+2-r)}{r(2k+2-r)-(k-1)^2}} e^{-\lambda\tau} \times \\ & \times \int_0^\infty \delta\Theta_0(\xi) \exp\left(\frac{1-k+r}{r}\xi\right) \sin\left(\omega\tau + \frac{r}{k-1}\xi + \psi\right) d\xi. \end{aligned} \quad (11)$$

Здесь

$$\lambda = -\operatorname{Re}\sigma_1 = \frac{r(k+1)-(k-1)^2}{2r^2}; \quad (12)$$

$$\omega = \operatorname{Im}\sigma_1 = \sqrt{\frac{k}{r^2} - \lambda^2}; \quad \operatorname{tg}\psi = \frac{\omega(3-4\lambda)}{2\lambda^2 - 3\lambda + 1 - 2\omega^2}.$$

Из выражения (11) видно, что возмущение затухает либо растет осциллирующим образом с амплитудой, изменяющейся по экспоненциальному



закону. Уравнение границы области устойчивости ($\operatorname{Re} \sigma_1 = -\lambda = 0$) идентично полученному в [1]:

$$r = (k - 1)^2 / (k + 1).$$

Методом гармонического анализа в [1] найдена также граница $\operatorname{Im} \sigma_1 = 0$ (парабола (8)), разделяющая колебательные и чисто экспоненциальные режимы развития возмущения.

Приведенное рассмотрение проведено без учета особых точек функции $\bar{\Theta}_0(\eta)$. Поскольку функция $\delta\Theta_0(\xi)$ имеет естественное ограничение роста при больших значениях ξ

$$|\delta\Theta_0(\xi)| \leq e^{s\xi}, M \geq 0, s \leq 0,$$

это означает, что особые точки изображения $\bar{\Theta}_0(\eta)$ расположены левее прямой $\operatorname{Re} \eta = s \leq 0$ в плоскости комплексной переменной η . При переходе в плоскость σ вследствие условия положительности $\sqrt{1+4\sigma}$ на величину $\eta(\sigma)$ накладывается ограничение $\operatorname{Re} \eta(\sigma) \geq -1/2$, т. е. любая особая точка функции $\bar{\Theta}_0(\eta)$, расположенная левее прямой $\operatorname{Re} \eta = -1/2$, заведомо не будет главной особой точкой функции $\bar{\Theta}_s(\sigma)$ (5). Таким образом, интересующие нас особые точки функции $\bar{\Theta}_0(\eta(\sigma))$ удовлетворяют неравенству $-1/2 \leq \operatorname{Re} \eta(\sigma) \leq 0$. Обозначим их как $\sigma_4, \sigma_5, \dots$, где $\operatorname{Re} \sigma_4 > \operatorname{Re} \sigma_5 > \dots$. Если $\operatorname{Re} \sigma_4$ больше, чем действительные части σ_0 или σ_1 , тогда поведение скорости горения при $\tau \rightarrow \infty$ определяется свойствами функции $\Theta_0(\eta(\sigma))$ в окрестности точки σ_4 . Как показывает анализ, это возможно для достаточно полого пространственного распределения начального возмущения $\delta\Theta_0(\xi)$ при определяющих параметрах k, r из области, расположенной выше кривой, проходящей вдоль отрезка $(0, 0) \div (1, 0)$, дуги эллипса $(1, 0) \div (5, 4)$ и прямой линии $r = k - 1$ при $k \geq 5$. Отметим, что начальное возмущение k -системы может влиять на асимптотическое поведение скорости горения только в области устойчивости. Рассмотрим конкретный пример. Пусть

$$\delta\Theta_0(\xi) = \sum_{j=0}^m \xi^j \exp(s_j \xi), \quad s_j \leq 0,$$

и s_n — максимальное значение из множества $\{s_j\}$, тогда уравнение

$$\eta(\sigma) - s_n = 0$$

определяет крайнюю правую точку σ_4 функции $\bar{\Theta}_0(\eta(\sigma))$. Если $\sigma_4 > \max(\sigma_0, \operatorname{Re} \sigma_1)$, тогда разложение $\bar{\Theta}_s(\sigma)$ в окрестности σ_n с последующим переходом к оригиналу приводит к асимптотической характеристике температуры поверхности на больших временах:

$$\delta\Theta_s(\tau) = \frac{r(1+s_n)(1+2s_n)^{n+1}}{rs_n^2 - s_n(k-r-1)+1}. \quad (13)$$

Из условия неотрицательности $\sqrt{1+4\sigma}$ следует, что точка $\sigma_4 = -s_n^2 + s_n$ может быть главной особой точкой только при $s_n > -1/2$. Поскольку s_n отрицательно, то выражение (13) всегда описывает затухающее возмущение. В области параметров k и r , где поведение температуры поверхности описывается зависимостью (10), для перехода к (13) достаточно условия $s_n > -1/2$. Для устойчивого горения вида (9) смена режима горения на закон (13) происходит при $s_n > \eta_1(\sigma_1)$. В области с осциллирующим типом затухания возмущения (11) переход к зависимости (13) выполняется при ограничении $s_n > -\frac{1+r-k}{2r}$, т. е. выше прямой $r = k - 1$ (штриховая линия на рисунке).

Суммируем полученные результаты. На рисунке ниже кривой r расположена область неустойчивости с чисто экспоненциальным ростом возмущения (9). Между линиями r и $\operatorname{Re} \sigma_1 = 0$ находится область не-

устойчивых режимов горения осциллирующего типа с экспоненциальным ростом амплитуды (11). Между кривыми r_+ и $\text{Re } \sigma_1 = 0$ вне эллиптической области начальное возмущение имеет характер затухающих по экспоненте колебаний (11). Внутри области, ограниченной эллиптической кривой $\text{Re } \sigma_1 = -1/4$, линией $\sigma_1 = -1/4$ и координатными осями, возмущение затухает по экспоненциальному закону (10) с показателем, не зависящим от параметров к-системы k, r . Выше линий $\sigma_1 = -1/4$ и r_+ возмущение уменьшается по чисто экспоненциальному закону (9). Выше кривой, проходящей через точки $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(5, 4)$ и $(6, 5)$, затухающий характер поведения скорости горения может определяться первоначальным возмущением в случае достаточно плавого профиля $\sigma\theta_0(\xi)$ при $\xi \rightarrow 0$.

Авторы выражают благодарность Л. К. Гусаченко за внимание к работе и помочь в выявлении неточностей.

ЛИТЕРАТУРА

1. Новожилов Б. В. Нестационарное горение твердых ракетных топлив.— М.: Наука, 1973.
2. Новиков С. С., Рязанцев Ю. С. ПМТФ, 1966, 3.
3. Зельдович Я. Б., Лейпунский О. И., Либрович В. Б. Теория нестационарного горения пороха.— М.: Наука, 1975.
4. Диткин В. А., Прудников А. П. Операционное исчисление по двум переменным и его приложение.— М.: Физматгиз, 1958.
5. Деч Г. Руководство к практическому применению преобразования Лапласа и Z-преобразования.— М.: Наука, 1971.

Поступила в редакцию 24/XI 1988

УДК 534.222.2

О ДИФРАКЦИИ МНОГОФРОНТОВОЙ ДЕТОНАЦИОННОЙ ВОЛНЫ

A. A. Борисов, B. N. Михалкин

(Москва)

Вопрос о выходе газовой детонационной волны (ДВ) из канала в объем экспериментально исследован достаточно подробно (см., например, [1—6]). Связано это, по-видимому, с большой практической ценностью основного критического параметра процесса — минимального диаметра канала, который не только определяет возможность возбуждения детонации в объеме, но и часто используется для оценки критической энергии инициирования сферической детонации на основании простых моделей процесса [7—11]. Трехмерность реальных ДВ приводит к картине течения при дифракции [6], которая внешне существенно отличается от схем, рассмотренных в ранних работах [3]. Оценка энергии прямого инициирования сферической детонации по значениям минимального диаметра выхода детонации из канала в объем базируется на ряде предположений о картине течения при распаде волны и о количественных характеристиках волны разгрузки. Естественно, что любая количественная информация, подкрепляющая или опровергающая сделанные предположения, помогает решить вопрос о применимости моделей.

В связи с этим в настоящей работе предпринята попытка на основе подробного анализа следовых отпечатков дифрагирующей волны уточнить картину распада и восстановления детонации при выходе из канала в объем или коническую полость, установить ряд количественных закономерностей этого процесса (в частности, скорость головы боковой волны разгрузки).

Эксперименты проводили на детонационной установке, представляющей собой разгонную трубу постоянного сечения, к которой пристыковывалась расширяющаяся коническая или цилиндрическая секция. Пол-