УДК 532.61:536.24

УСТОЙЧИВОСТЬ ВЕРТИКАЛЬНОЙ ПЛЕНКИ ЖИДКОСТИ С УЧЕТОМ ЭФФЕКТА МАРАНГОНИ И ТЕПЛООБМЕНА С ОКРУЖАЮЩЕЙ СРЕДОЙ

О. А. Бурмистрова

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, 630090 Новосибирск
E-mail: oksanabur@mail.ru

Исследована устойчивость свободной вертикальной жидкой пленки при совместном воздействии силы тяжести и термокапиллярных сил. Для случая плоского стационарного течения с постоянной толщиной пленки найдено точное решение уравнений Навье — Стокса и теплопроводности. Показано, что, в случае если свободные поверхности пленки идеально теплоизолированы, расход жидкости через поперечное сечение слоя равен нулю. Установлено, что при учете теплообмена с окружающей средой для замыкания модели необходимо задавать расход жидкости и производную от температуры по продольной координате либо расход и толщину пленки. Исследована устойчивость решения с постоянной толщиной пленки при малых значениях волнового числа. Получено решение спектральной задачи для возмущений в виде затухающих колебаний.

Ключевые слова: жидкая пленка, свободная поверхность, малые возмущения, устойчивость решения, межфазный теплообмен, термокапиллярный эффект.

Введение. В настоящей работе, как и в работе [1], анализируются результаты экспериментов, выполненных авторами работы [2] и позволивших получить протяженные по длине свободные вертикальные жидкие пленки, которые могут быть использованы в технологии опреснения воды.

В движении жидкостей важную роль играет термокапиллярный эффект [3–5]. В работах [1, 6, 7] рассмотрена деформация свободной жидкой пленки под действием термокапиллярных сил, задачи решались с помощью осреднения по поперечной координате, причем в [6, 7] считалось, что пленка находится в условиях невесомости. В [6] температурное распределение в пленке полагалось заданным, в [1, 7] температура была неизвестной искомой функцией, а свободная поверхность считалась идеально теплоизолированной.

В данной работе исследуется поведение свободной жидкой пленки при совместном действии силы тяжести и термокапиллярных сил с учетом теплообмена с окружающей средой.

1. Постановка задачи. На плоскости рассматривается вязкая несжимаемая жидкость, заполняющая слой $\Omega_t = \{x \in (-\infty, \infty);\ z \in (-h(x,t), h(x,t))\}$, где направление ускорения свободного падения $\boldsymbol{g} = (-g, 0)^{\mathrm{T}}$ противоположно направлению оси x; $z = \pm h(x,t)$ — неизвестные свободные поверхности. Пусть $\boldsymbol{v} = (u, w)$ — вектор скорости; p — давление жидкости. Плотность ρ и кинематическую вязкость ν будем полагать постоянными, а по-

Работа выполнена при финансовой поддержке СО РАН — УрО РАН — ДВО РАН (грант № 38) и Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 13-01-00526).

верхностное натяжение σ — линейной функцией температуры T:

$$\sigma = \sigma_0 - \varkappa(T - T_0).$$

Здесь σ_0, $\varkappa$, T_0 — положительные постоянные; T — неизвестная функция x, z, t. В предположении, что течение симметрично относительно прямой $z = 0$, уравнения Навье — Стокса и теплопроводности запишем в виде

$$\boldsymbol{v}_t + (\boldsymbol{v} \cdot \nabla)\boldsymbol{v} = -\rho^{-1}\nabla p + \nu\Delta\boldsymbol{v} + \boldsymbol{g}; \tag{1.1}$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{v} = 0; \tag{1.2}$$

$$T_t + (\boldsymbol{v} \cdot \nabla)T = \chi\,\Delta T, \tag{1.3}$$

на свободной поверхности зададим граничные условия

$$\boldsymbol{v}\boldsymbol{n} = V_n \quad \text{при} \quad z = h(x,t); \tag{1.4}$$

$$(p_0 - p)\boldsymbol{n} + 2\rho\nu D\boldsymbol{n} = -2K\sigma\boldsymbol{n} + \nabla_\Gamma\sigma \quad \text{при} \quad z = h(x,t); \tag{1.5}$$

$$\frac{\partial T}{\partial \boldsymbol{n}} = \beta(T_\Gamma - T) \quad \text{при} \quad z = h(x,t). \tag{1.6}$$

Здесь $D = (\nabla\boldsymbol{v} + (\nabla\boldsymbol{v})^{\text{т}})/2$ — тензор скоростей деформаций; $\nabla_\Gamma = \nabla - \boldsymbol{n}(\boldsymbol{n}\nabla)$ — поверхностный градиент; $\boldsymbol{n}$ — единичный вектор внешней нормали к свободной поверхности; K — средняя кривизна свободной поверхности; V_n — скорость перемещения свободной поверхности в направлении $\boldsymbol{n}$; p_0 — атмосферное давление; $\beta > 0$ — коэффициент межфазного теплообмена; T_Γ — температура свободной поверхности, которая считается заданной.

2. Плоское слоистое течение с постоянной толщиной. Предположим, что движение стационарно, $w \equiv 0$ и пленка имеет постоянную толщину $2a$. Тогда задача (1.1)–(1.6) имеет решение

$$u(z) = \frac{g}{2\nu}\,z^2 + c, \qquad T = -bx - \frac{b}{\chi}\Big(\frac{g}{24\nu}\,z^4 + \frac{cz^2}{2}\Big) + f, \qquad p \equiv p_0, \tag{2.1}$$

где c, b, f — постоянные.

Расход жидкости через поперечное сечение слоя обозначим через $2q$. Получаем

$$q \equiv \int\limits_0^a u(z)\,dz = \frac{g}{6\nu}\,a^3 + ca, \tag{2.2}$$

откуда следует

$$c = \frac{q}{a} - \frac{ga^2}{6\nu}, \tag{2.3}$$

т. е. постоянная c однозначно определяется заданным расходом.

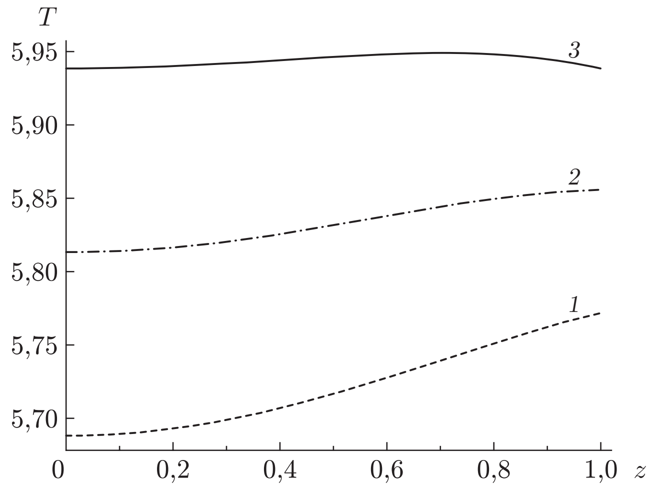
В предположении, что свободные поверхности идеально теплоизолированы, в краевом условии (1.6) $\beta = 0$. Подставляя выражение для температуры из (2.1) в (1.6), получаем

$$c = -\frac{g}{6\nu}\,a^2. \tag{2.4}$$

Из соотношений (2.2), (2.4) следует $q = 0$.

Для того чтобы найти решение с ненулевым расходом, для температуры зададим краевое условие третьего рода, т. е. будем полагать, что в (1.6) $\beta \neq 0$. Из проекции (1.5) на касательную плоскость получаем соотношение, связывающее толщину пленки и производную температуры по переменной x:

$$\varkappa b = \rho g a. \tag{2.5}$$



Зависимость температуры от поперечной координаты при различных значениях расхода:
1 — $\tilde{q} = -1/12$, *2* — $\tilde{q} = 0$, *3* — $\tilde{q} = 1/12$

Полагая, что $T_\Gamma = -bx + T_0$, из (1.6) находим постоянную f:

$$f = \frac{b}{\chi}\Big(\frac{q}{\beta} + \frac{a}{2}\Big(q - \frac{ga^3}{12\nu}\Big)\Big) + T_0. \tag{2.6}$$

Следовательно, для замыкания модели в качестве входных параметров необходимо задавать расход жидкости через поперечное сечение слоя q и производную b температуры по переменной x (либо толщину пленки a). Для определенности будем задавать q и a.

На рисунке приведена зависимость безразмерной температуры от безразмерной координаты при различных значениях безразмерного расхода жидкости $\tilde{q}$.

3. Задача об устойчивости слоистого решения. Пусть $\psi(t, x, z)$ — функция тока течения. Тогда уравнения (1.1)–(1.3) можно записать в виде

$$\psi_{txx} + \psi_{tzz} + \psi_z(\psi_{xxx} + \psi_{xzz}) - \psi_x(\psi_{zzz} + \psi_{xxz}) = \nu(\psi_{xxxx} + 2\psi_{xxzz} + \psi_{zzzz}); \tag{3.1}$$

$$T_t + \psi_z T_x - \psi_x T_z = \chi(T_{xx} + T_{zz}), \tag{3.2}$$

а граничные условия при $z = h(x, t)$ — в виде

$$h_t + \psi_z h_x = -\psi_x; \tag{3.3}$$

$$\frac{\rho\nu}{\sqrt{(1 + (h_x)^2)}}\,(h_x(-h_x(\psi_{zz} - \psi_{xx}) - 4\psi_{xz}) + \psi_{zz} - \psi_{xx}) = \sigma_x + h_x\sigma_z; \tag{3.4}$$

$$\begin{gathered}\rho(\psi_{tz} + \psi_z\psi_{xz} - \psi_x\psi_{zz} - \nu(\psi_{zzz} + \psi_{xxz}) + g) + \\ + \frac{2\rho\nu}{1 + (h_x)^2}\,(-h_x(-h_x\psi_{xxz} + \psi_{xzz} - \psi_{xxx}) - h_{xx}(-2h_x\psi_{xz} + \psi_{zz} - \psi_{xx}) - \psi_{xxz}) - \\ - \frac{4\rho\nu h_x h_{xx}}{(1 + (h_x)^2)^2}\,(-h_x(-h_x\psi_{xz} + \psi_{zz} - \psi_{xx}) - \psi_{xz}) = -2\sigma_x K - 2\sigma K_x;\end{gathered} \tag{3.5}$$

$$\frac{-h_x T_x + T_z}{\sqrt{1 + (h_x)^2}} = \beta(T_\Gamma - T). \tag{3.6}$$

Заметим, что скорости в решении с постоянной толщиной пленки (2.1) соответствует функция тока

$$\psi_0 = \frac{g}{6\nu}\,z^3 + cz. \tag{3.7}$$

Систему уравнений (3.1), (3.2) и краевые условия (3.3)–(3.6) линеаризуем на решении, заданном формулами (3.7), (2.1), (2.3), (2.5), (2.6). Получаем систему уравнений для возмущений

$$\begin{gathered}\psi_{txx}+\psi_{tzz}+\Big(\frac{g}{2\nu}z^2+c\Big)(\psi_{xzz}+\psi_{xxx})-\frac{g}{\nu}\,\psi_x=\nu(\psi_{xxxx}+2\psi_{xxzz}+\psi_{zzzz}),\\ T_t+\Big(\frac{g}{2\nu}\,z^2+c\Big)T_x-b\psi_z+\frac{b}{\chi}\Big(\frac{g}{6\nu}\,z^3+cz\Big)\psi_x=\chi(T_{xx}+T_{zz})\end{gathered}\qquad(3.8)$$

с краевыми условиями при $z=a$

$$\begin{gathered}\rho\nu\Big(\psi_{zz}-\psi_{xx}+\frac{g}{\nu}\,h\Big)=-\varkappa T_x+\frac{\varkappa b}{\chi}\Big(\frac{g}{6\nu}\,a^3+ca\Big)h_x,\\ \rho\Big(-\psi_{tz}+\nu(\psi_{zzz}+\psi_{xxz})-\Big(\frac{g}{2\nu}\,a^2+c\Big)\psi_{xz}+\frac{g}{\nu}\,a\psi_x\Big)+2\rho\nu\Big(\frac{ga}{\nu}\,h_{xx}+\psi_{xxz}\Big)=\\ =-h_{xxx}\Big(\sigma_0+\varkappa T_0+\varkappa\Big(bx+\frac{b}{\chi}\Big(\frac{g}{24\nu}\,a^4+\frac{ca^2}{2}\Big)-f\Big)\Big)-\varkappa bh_{xx},\\ h_t+\Big(\frac{g}{2\nu}\,a^2+c\Big)h_x=-\psi_x,\\ h_xb+T_z-\frac{b}{\chi}\Big(\frac{g}{2\nu}\,a^2+c\Big)h=-\beta\Big(T-\frac{b}{\chi}\Big(\frac{g}{6\nu}\,a^3+ca\Big)h\Big).\end{gathered}\qquad(3.9)$$

Введем безразмерные переменные по формулам

$$x'=\frac{x}{a},\quad z'=\frac{z}{a},\quad \psi'=\frac{\psi}{Va},\quad t'=\frac{t}{t^*},\quad T'=\frac{T}{\delta T},\quad h'=\frac{h}{a},$$

где a — толщина пленки для найденного в п. **2** решения; δT — характерный перепад температур; $V=\varkappa\delta T/(\rho\nu)$; $t^*=\rho\nu a/(\varkappa\delta T)$. Далее штрихи над безразмерными переменными опускаются. В безразмерных переменных система уравнений (3.8) принимает вид

$$\begin{gathered}\frac{\mathrm{Ma}}{\mathrm{Pr}}\,(\psi_{txx}+\psi_{tzz})+\Big(\mathrm{Re}-\frac{\mathrm{Ga}}{6}+\frac{\mathrm{Ga}}{2}\,z^2\Big)(\psi_{xzz}+\psi_{xxx})-\mathrm{Ga}\,\psi_x=\psi_{xxxx}+2\psi_{xxzz}+\psi_{zzzz},\\ \mathrm{Ma}\,T_t+\Big(\mathrm{Re}\,\mathrm{Pr}-\frac{\mathrm{Ga}\,\mathrm{Pr}}{6}+\frac{\mathrm{Ga}\,\mathrm{Pr}}{2}\,z^2\Big)T_x-\mathrm{Ga}\,\mathrm{Pr}\,\psi_z+\\ +\Big(\frac{\mathrm{Ga}^2\,\mathrm{Pr}^2}{6}\,z^3+\mathrm{Ga}\,\mathrm{Pr}^2\,(\mathrm{Re}-\mathrm{Ga})z\Big)\psi_x=T_{xx}+T_{zz}\end{gathered}$$

с граничными условиями (3.9) при $z=1$

$$\begin{gathered}\psi_{zz}-\psi_{xx}+\frac{\mathrm{Ga}\,\mathrm{Pr}}{\mathrm{Ma}}\,h=-T_x+\frac{\mathrm{Ga}\,\mathrm{Pr}^2\,\mathrm{Re}}{\mathrm{Ma}}\,h_x,\\ -\frac{\mathrm{Ma}}{\mathrm{Pr}}\,\psi_{tz}+3\psi_{xxz}+\psi_{zzz}-\Big(\mathrm{Re}+\frac{\mathrm{Ga}}{3}\Big)\psi_{xz}+\mathrm{Ga}\,\psi_x+3\,\frac{\mathrm{Ga}\,\mathrm{Pr}}{\mathrm{Ma}}\,h_{xx}=\\ =-h_{xxx}\Big(\mathrm{Cr}^{-1}+\frac{\mathrm{Ga}\,\mathrm{Pr}}{\mathrm{Ma}}\,x-\frac{\mathrm{Re}\,\mathrm{Pr}^2\,\mathrm{Ga}}{\mathrm{Ma}\,\mathrm{Bi}}\Big),\\ h_t+\Big(\frac{\mathrm{Ga}\,\mathrm{Pr}}{3\,\mathrm{Ma}}+\frac{\mathrm{Re}\,\mathrm{Pr}}{\mathrm{Ma}}\Big)h_x=-\psi_x,\\ T_z+\mathrm{Bi}\,T+\frac{\mathrm{Ga}\,\mathrm{Pr}}{\mathrm{Ma}}\,h_x-\frac{\mathrm{Ga}\,\mathrm{Pr}^2}{\mathrm{Ma}}\Big(\frac{\mathrm{Ga}}{3}+\mathrm{Re}\,(1+\mathrm{Bi})\Big)h=0.\end{gathered}$$

Здесь $\mathrm{Ma} = \varkappa\delta T a/(\rho\nu\chi)$ — число Марангони; $\mathrm{Pr} = \nu/\chi$ — число Прандтля; $\mathrm{Ga} = ga^3/\nu^2$ — число Галилея; $\mathrm{Re} = q/\nu$ — число Рейнольдса; $\mathrm{Bi} = \beta a$ — число Био; величина $\mathrm{Cr} = \varkappa\delta T/\sigma_0$ характеризует степень деформируемости свободной поверхности термокапиллярными силами.

Решение задачи для возмущений находим в виде

$$\psi = \varphi(z)\,\mathrm{e}^{\lambda t + ikx}, \qquad T = \xi(z)\,\mathrm{e}^{\lambda t + ikx}, \qquad h = A\,\mathrm{e}^{\lambda t + ikx}.$$

Для функций φ, ξ, A получаем систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{gathered}
\varphi^{(4)} - \Big(\lambda\frac{\mathrm{Ma}}{\mathrm{Pr}} + ik\Big(\mathrm{Re} - \frac{\mathrm{Ga}}{6} + \frac{\mathrm{Ga}}{2}z^2\Big) + 2k^2\Big)\varphi'' + \\
+ \Big(ik\,\mathrm{Ga} + \frac{\mathrm{Ma}}{\mathrm{Pr}}k^2 + ik^3\Big(\mathrm{Re} - \frac{\mathrm{Ga}}{6} + \frac{\mathrm{Ga}}{2}z^2\Big) + k^4\Big)\varphi = 0, \\
\xi'' - \Big(\lambda\,\mathrm{Ma} + ik\Big(\mathrm{Re}\,\mathrm{Pr} - \frac{\mathrm{Ga}\,\mathrm{Pr}}{6} + \frac{\mathrm{Ga}\,\mathrm{Pr}}{2}z^2\Big) + k^2\Big)\xi + \\
+ \mathrm{Ga}\,\mathrm{Pr}\,\varphi' - ik\Big(\frac{\mathrm{Ga}^2\,\mathrm{Pr}^2}{6}z^3 + \mathrm{Ga}\,\mathrm{Pr}^2\,(\mathrm{Re} - \mathrm{Ga})z\Big)\varphi = 0
\end{gathered} \tag{3.10}$$

со следующими краевыми условиями при $z = 1$:

$$\begin{gathered}
\varphi'' + k^2\varphi + ik\xi + \frac{\mathrm{Ga}\,\mathrm{Pr}}{\mathrm{Ma}}(1 - ik\,\mathrm{Re}\,\mathrm{Pr})A = 0, \\
\varphi''' - \Big(\lambda\frac{\mathrm{Ma}}{\mathrm{Pr}} + ik\Big(\mathrm{Re} + \frac{\mathrm{Ga}}{3}\Big) + 3k^2\Big)\varphi' + ik\,\mathrm{Ga}\,\varphi - \\
- \Big(3k^2\frac{\mathrm{Ga}\,\mathrm{Pr}}{\mathrm{Ma}} - ik^3\Big(\mathrm{Cr}^{-1} + \frac{\mathrm{Ga}\,\mathrm{Pr}}{\mathrm{Ma}}x - \frac{\mathrm{Re}\,\mathrm{Pr}^2\,\mathrm{Ga}}{\mathrm{Ma}\,\mathrm{Bi}}\Big)\Big)A = 0, \\
ik\varphi + \Big(\lambda + ik\frac{\mathrm{Pr}}{\mathrm{Ma}}\Big(\mathrm{Re} + \frac{\mathrm{Ga}}{3}\Big)\Big)A = 0, \\
\xi' + \mathrm{Bi}\,\xi - \frac{\mathrm{Ga}\,\mathrm{Pr}}{\mathrm{Ma}}\Big(\mathrm{Pr}\Big(\frac{\mathrm{Ga}}{3} + \mathrm{Re}\,(1 + \mathrm{Bi})\Big) - ik\Big)A = 0.
\end{gathered} \tag{3.11}$$

(Согласно [8] переменную x во втором краевом условии можно зафиксировать, положив $x = 1/2$.)

Разложим функции по малому параметру k:

$$\varphi = \varphi_0 + k\varphi_1 + \ldots, \quad \xi = \xi_0 + k\xi_1 + \ldots, \quad \lambda = \lambda_0 + k\lambda_1 + \ldots, \quad A = A_0 + kA_1 + \ldots$$

и подставим данные разложения в уравнения (3.10) и краевые условия (3.11). В нулевом порядке получаем краевую задачу для φ_0 и ξ_0

$$\varphi_0^{(4)} - \lambda_0\frac{\mathrm{Ma}}{\mathrm{Pr}}\varphi_0'' = 0; \tag{3.12}$$

$$\xi_0'' - \lambda_0\,\mathrm{Ma}\,\xi_0 = -\,\mathrm{Ga}\,\mathrm{Pr}\,\varphi_0'; \tag{3.13}$$

$$\varphi_0''(1) = 0; \tag{3.14}$$

$$\varphi_0'''(1) - \lambda_0\frac{\mathrm{Ma}}{\mathrm{Pr}}\varphi_0'(1) = 0; \tag{3.15}$$

$$\xi_0'(1) + \mathrm{Bi}\,\xi_0(1) = 0.$$

Функция ξ_0 не входит в уравнение (3.12) и краевые условия (3.14), (3.15), из которых находятся φ_0, λ_0. Уравнение (3.12) является дифференциальным уравнением четвертого порядка, а искомая функция φ_0 имеет лишь два краевых условия, поэтому необходимо задать еще два краевых условия — условия четности. Для четных возмущений эти условия имеют вид

$$\varphi_0'(0) = \varphi'''(0) = 0,$$

для нечетных —

$$\varphi_0(0) = \varphi_0''(0) = 0.$$

Умножим уравнение (3.12) на $\bar{\varphi}_0''$ и проинтегрируем его по переменной z от 0 до 1 ($\bar{\varphi}_0''$ — функция, комплексно-сопряженная с функцией φ_0''). Используя формулу интегрирования по частям и учитывая условие (3.14), можно сделать вывод, что $\lambda_0 \leqslant 0$. В результате решения краевой задачи для φ_0 получаем следующие собственные значения и собственные функции:

— в случае четных возмущений

$$\lambda_0 = -\frac{1}{\mathrm{Ma}}\Big(\frac{\pi}{2} + \pi n\Big)^2 \mathrm{Pr}, \quad n = 0, 1, \ldots, \qquad (\varphi_0)_n = \cos\left((\pi/2 + \pi n)z\right), \tag{3.16}$$

— в случае нечетных возмущений

$$\lambda_0 = -\frac{(\pi n)^2 \,\mathrm{Pr}}{\mathrm{Ma}}, \quad n = 1, 2, \ldots, \qquad (\varphi_0)_n = \sin\left(\pi n z\right).$$

Положим $\varphi_0 \equiv 0$ и рассмотрим спектральную задачу для тепловых возмущений. Для решения уравнения (3.13) зададим условие четности:

— для четных возмущений

$$\xi_0'(0) = 0,$$

— для нечетных возмущений

$$\xi_0(0) = 0.$$

Как и в случае собственных значений для функции тока, получаем $\lambda_0 \leqslant 0$. Решая краевую задачу для ξ_0, в случае четных возмущений получаем выражение для собственных значений в неявном виде

$$\mathrm{ctg}\,\sqrt{-\lambda_0\,\mathrm{Ma}} = \mathrm{Bi}^{-1}\sqrt{-\lambda_0\,\mathrm{Ma}}\,,$$

в случае нечетных возмущений имеем

$$\mathrm{tg}\,\sqrt{-\lambda_0\,\mathrm{Ma}} = -\,\mathrm{Bi}^{-1}\sqrt{-\lambda_0\,\mathrm{Ma}}\,.$$

Поскольку во всех случаях значения λ_0 вещественны и отрицательны, длинноволновые возмущения функции тока и температуры являются устойчивыми.

4. Продолжение решения по параметру. Следуя алгоритму, предложенному в работе [9], продолжим решение для возмущений по малому параметру k. Зададим некоторое достаточно малое значение k и запишем систему (3.10) в виде

$$\boldsymbol{y}' = M(z, \lambda)\boldsymbol{y}, \tag{4.1}$$

где

$$\boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} \varphi \\ \xi \\ \varphi' \\ \varphi'' \\ \varphi''' \\ \xi' \end{pmatrix}, \qquad M(z) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ m_{51} & 0 & 0 & m_{54} & 0 & 0 \\ m_{61} & m_{62} & m_{63} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$m_{51} = -\Big(ik\,\mathrm{Ga} + \lambda\,\frac{\mathrm{Ma}}{\mathrm{Pr}}\,k^2 + ik^3\Big(\,\mathrm{Re} - \frac{\mathrm{Ga}}{6} + \frac{\mathrm{Ga}}{2}\,z^2\Big) + k^4\Big),$$

$$m_{54} = \lambda\,\frac{\mathrm{Ma}}{\mathrm{Pr}} + ik\Big(\,\mathrm{Re} - \frac{\mathrm{Ga}}{6} + \frac{\mathrm{Ga}}{2}\,z^2\Big) + 2k^2,$$

$$m_{61} = ik\Big(\frac{\mathrm{Ga}^2\,\mathrm{Pr}^2}{6}\,z^3 + \mathrm{Ga}\,\mathrm{Pr}^2\,(\mathrm{Re} - \mathrm{Ga})z\Big),$$

$$m_{62} = \lambda\,\mathrm{Ma} + ik\Big(\,\mathrm{Re}\,\mathrm{Pr} - \frac{\mathrm{Ga}\,\mathrm{Pr}}{6} + \frac{\mathrm{Ga}\,\mathrm{Pr}}{2}\,z^2\Big) + k^2, \qquad m_{63} = -\,\mathrm{Ga}\,\mathrm{Pr}\,.$$

Собственные значения в нулевом порядке вещественны, следовательно, $\lambda \neq -ik(\mathrm{Pr}\,/\,\mathrm{Ma})(\mathrm{Re} + \mathrm{Ga}\,/3)$. Тогда толщину пленки A можно исключить из краевых условий с помощью третьего краевого условия (3.11). Краевые условия на правой границе принимают вид

$$D(\lambda)\boldsymbol{y}(1) = \mathbf{0}, \tag{4.2}$$

где

$$D(\lambda) = \begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} & 0 & d_{14} & 0 & 0 \\ d_{21} & 0 & d_{23} & 0 & d_{25} & 0 \\ d_{31} & d_{32} & 0 & 0 & 0 & d_{36} \end{pmatrix},$$

$$d_{11} = -ik\Big(\lambda + ik\,\frac{\mathrm{Pr}}{\mathrm{Ma}}\Big(\,\mathrm{Re} + \frac{\mathrm{Ga}}{3}\Big)\Big) + k^2\Big(\lambda + ik\,\frac{\mathrm{Pr}}{\mathrm{Ma}}\Big(\,\mathrm{Re} + \frac{\mathrm{Ga}}{3}\Big)\Big),$$

$$d_{12} = ik\Big(\lambda + ik\,\frac{\mathrm{Pr}}{\mathrm{Ma}}\Big(\,\mathrm{Re} + \frac{\mathrm{Ga}}{3}\Big)\Big), \qquad d_{14} = \lambda + ik\,\frac{\mathrm{Pr}}{\mathrm{Ma}}\Big(\,\mathrm{Re} + \frac{\mathrm{Ga}}{3}\Big),$$

$$d_{21} = ik\Big(3k^2\,\frac{\mathrm{Ga}\,\mathrm{Pr}}{\mathrm{Ma}} - ik^3\Big(\,\mathrm{Cr}^{-1} + \frac{\mathrm{Ga}\,\mathrm{Pr}}{\mathrm{Ma}}\,x - \frac{\mathrm{Re}\,\mathrm{Pr}^2\,\mathrm{Ga}}{\mathrm{Ma}\,\mathrm{Bi}}\Big)\Big) + {}$$
$$+ ik\,\mathrm{Ga}\,\Big(\lambda + ik\,\frac{\mathrm{Pr}}{\mathrm{Ma}}\Big(\,\mathrm{Re} + \frac{\mathrm{Ga}}{3}\Big)\Big),$$

$$d_{23} = -\Big(\lambda + ik\,\frac{\mathrm{Pr}}{\mathrm{Ma}}\Big(\,\mathrm{Re} + \frac{\mathrm{Ga}}{3}\Big)\Big)\Big(\lambda\,\frac{\mathrm{Ma}}{\mathrm{Pr}} + ik\Big(\,\mathrm{Re} + \frac{\mathrm{Ga}}{3}\Big) + 3k^2\Big),$$

$$d_{25} = \lambda + ik\,\frac{\mathrm{Pr}}{\mathrm{Ma}}\Big(\,\mathrm{Re} + \frac{\mathrm{Ga}}{3}\Big), \qquad d_{31} = ik\,\frac{\mathrm{Ga}\,\mathrm{Pr}}{\mathrm{Ma}}\Big(\,\mathrm{Pr}\,\Big(\frac{\mathrm{Ga}}{3} + \mathrm{Re}\,(1 + \mathrm{Bi})\Big) - ik\Big),$$

$$d_{32} = \mathrm{Bi}\,\Big(\lambda + ik\,\frac{\mathrm{Pr}}{\mathrm{Ma}}\Big(\,\mathrm{Re} + \frac{\mathrm{Ga}}{3}\Big)\Big), \qquad d_{36} = \lambda + ik\,\frac{\mathrm{Pr}}{\mathrm{Ma}}\Big(\,\mathrm{Re} + \frac{\mathrm{Ga}}{3}\Big).$$

Пусть возмущения функции тока являются четными, т. е. λ_0 определяется из выражения (3.16). Из уравнения (3.13) следует, что в нулевом порядке функции φ, ξ имеют разную четность, поэтому возмущения температуры являются нечетными. В этом случае краевое условие на левой границе принимает вид

$$B\boldsymbol{y}(0) = \mathbf{0}, \tag{4.3}$$

где

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Полагая $M(z,\lambda) = M(z,\lambda_0)$, рассмотрим полную систему линейно независимых векторов, удовлетворяющих граничному условию (4.3). Обозначим эти векторы через $\boldsymbol{y}_1(0)$, $\boldsymbol{y}_2(0)$, $\boldsymbol{y}_3(0)$:

$$\boldsymbol{y}_1(0) = (1,0,0,0,0,0)^{\mathrm{т}}, \quad \boldsymbol{y}_2(0) = (0,0,0,1,0,0)^{\mathrm{т}}, \quad \boldsymbol{y}_3(0) = (0,0,0,0,0,1)^{\mathrm{т}}.$$

Значения λ при различных значениях k

k	λ
0	$-0{,}248\,717\,978\,749\,212$
0,0001	$-0{,}248\,717\,685\,051\,883 + i \cdot 0{,}000\,135\,454\,361\,781\,915$
0,0010	$-0{,}248\,688\,613\,595\,579 + i \cdot 0{,}001\,354\,642\,752\,346\,080$
0,0050	$-0{,}247\,986\,604\,307\,022 + i \cdot 0{,}006\,785\,314\,150\,297\,340$
0,0100	$-0{,}245\,825\,979\,783\,458 + i \cdot 0{,}013\,648\,167\,892\,490\,400$

Решения системы, принимающие на левой границе значения $\boldsymbol{y}_j(0)$ $(j = 1, 2, 3)$, обозначим через $\boldsymbol{y}_j$ $(j = 1,\ 2,\ 3)$ и найдем численно с помощью метода Рунге — Кутты четвертого порядка.

Вообще говоря, решения $\boldsymbol{y}_j$ $(j = 1,\ 2,\ 3)$ не удовлетворяют граничным условиям (4.2). Для того чтобы удовлетворить этим граничным условиям, будем искать решение в виде

$$\boldsymbol{y} = \sum_{j=1}^{3} \alpha_j \boldsymbol{y}_j, \tag{4.4}$$

где α_j $(j = 1,\ 2,\ 3)$ — постоянные.

Подставляя (4.4) в (4.2), для параметра λ получаем условие, при котором задача имеет нетривиальное решение:

$$\det\,(D(\lambda)\boldsymbol{y}_1(1)\ D(\lambda)\boldsymbol{y}_2(1)\ D(\lambda)\boldsymbol{y}_3(1)) = 0. \tag{4.5}$$

Для того чтобы найти значение λ, удовлетворяющее условию (4.5), используем метод Ньютона, а также параметр λ_0 в качестве начального приближения. После того как λ, удовлетворяющее условию (4.5) с некоторой точностью ε, найдено, подставляем его в систему (4.1) в качестве λ_0 и повторяем описанную процедуру до тех пор, пока полученные на двух соседних шагах собственные значения не совпадут с точностью ε. Это означает, что полученное на последнем шаге значение λ удовлетворяет системе (4.1) и краевым условиям (4.2), (4.3) с точностью ε.

Расчеты проводились при следующих значениях параметров: $\mathrm{Pr} = 7{,}2$, $\mathrm{Ma} = 71{,}2$, $\mathrm{Bi} = 1$, $\mathrm{Ga} = 9{,}9$, $\mathrm{Cr} = 0{,}0013$, $\mathrm{Re} = 9{,}92$. Шаг сетки полагался равным $\Delta z = 10^{-4}$. Поскольку метод Рунге — Кутты имеет четвертый порядок точности, при таком значении Δz погрешность равна 10^{-16}. Положим также $\varepsilon = 10^{-16}$. Тогда погрешность процедуры вычисления собственного значения будет порядка 10^{-16}. В таблице представлены найденные методом продолжения по параметру собственные числа для некоторых значений $0 \leqslant k \leqslant 0{,}01$. Согласно данным таблицы действительные части собственных значений остаются отрицательными, следовательно, при $0 \leqslant k \leqslant 0{,}01$ полученное решение является устойчивым.

Заключение. Исследована устойчивость свободной вертикальной жидкой пленки при совместном воздействии силы тяжести и термокапиллярных сил. В случае плоского стационарного слоистого течения с постоянной толщиной пленки найдено точное решение уравнений Навье — Стокса и теплопроводности. Показано, что, в случае если свободные поверхности пленки идеально теплоизолированы, расход жидкости через поперечное сечение слоя равен нулю.

В случае если коэффициент межфазного теплообмена не равен нулю, свободными параметрами являются расход жидкости и производная от температуры по продольной координате либо расход и толщина пленки. Решение с постоянной толщиной пленки исследовано на устойчивость при малых значениях волнового числа. В нулевом приближении собственные значения получены аналитически. Для малых волновых чисел собственные значения найдены численно с помощью продолжения по параметру. Получено решение спектральной задачи для возмущений в виде затухающих колебаний.

Автор выражает благодарность В. В. Пухначеву за постановку задачи и внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Бурмистрова О. А., Пухначев В. В.** Равновесие и устойчивость свободной вертикальной пленки жидкости // Сб. тр. Всерос. конф. “XXIX Сибирский теплофизический семинар”, Новосибирск, 15–17 нояб. 2010 г. [Электрон. ресурс]. Новосибирск: Ин-т теплофизики СО РАН, 2010. 1 электрон. опт. диск (CD ROM).
2. **Soua W., Kaiss A., Tadrist L., Kabov O.** Hydrodynamic and heat transfer of a falling liquid film on a horizontal heated tube: simulation and experimentation // Proc. of the 3th Intern. topical team workshop on two-phase systems for ground and space applications, Brussels (Belgium), 10–12 Sept., 2008. Brussels: Univ. Libre de Bruxelles, 2008. P. 50.
3. **Pukhnachov V. V.** Thermocapillary convection under law gravity // Fluid Dynamics Trans. 1989. V. 14. P. 145–204.
4. **Napolitano L. G.** Thermodynamics and dynamics of surface phases // Acta Astronaut. 1979. V. 6, N 5/6. P. 1093–1112.
5. **Batishchev V. A., Kuznetsov V. V., Pukhnachov V. V.** Marangoni boundary layers // Progr. Aerospace Sci. 1989. V. 26. P. 353–370.
6. **Пухначев В. В., Дубинкина С. Б.** Модель деформации и разрыва пленки под действием термокапиллярных сил // Изв. РАН. Механика жидкости и газа. 2006. № 5. С. 89–107.
7. **Meleshko S. V., Pukhnachev V. V., Pukhnacheva T. P.** Traveling waves and self-similar solutions in model of free non-isothermal liquid film // Adv. Math. Sci. Appl. 2004. V. 14, N 1. P. 25–40.
8. **Андреев В. К.** Устойчивость неизотермических жидкостей / В. К. Андреев, В. Б. Бекежанова. Красноярск: Изд-во Сиб. федер. ун-та, 2010.
9. **Годунов С. К.** О численном решении краевых задач для систем линейных обыкновенных дифференциальных уравнений // Успехи мат. наук. 1961. Т. 16, № 3. С. 171–174.

Поступила в редакцию 20/V 2013 г.