УДК 532.582

О ДВИЖЕНИИ ВКЛЮЧЕНИЯ В ОДНОРОДНО И НЕОДНОРОДНО КОЛЕБЛЮЩЕЙСЯ ЖИДКОСТИ

В. Л. Сенницкий

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, 630090 Новосибирск
E-mail: svovl@hydro.nsc.ru

Осуществлен подход к построению количественных характеристик неоднородности колебаний жидкости. Рассмотрена новая задача о движении включения в колеблющейся жидкости.

Ключевые слова: жидкость, включение, однородные и неоднородные колебания жидкости.

1. Имеется значительное число работ (см., например, [1–18]), посвященных экспериментальным и теоретическим исследованиям движения твердого и газового включений (тел) в колеблющейся жидкости. Под колеблющейся (вибрирующей) жидкостью обычно подразумевается жидкость, течение которой происходит вследствие того, что она подвергается колебательным воздействиям.

В работах [8, 9] (см. также [10]) введены в рассмотрение понятия однородно и неоднородно колеблющейся жидкости. Данное в [8–10] определение однородных и неоднородных колебаний жидкости состоит в следующем. Пусть включения в жидкости (движение которых исследуется) отсутствуют; тогда, если все частицы жидкости движутся с одной и той же скоростью, колебания жидкости являются однородными, если не все частицы жидкости движутся с одной и той же скоростью, колебания жидкости являются неоднородными. Движение включений в однородно и неоднородно колеблющейся жидкости может быть качественно различным [2, 3, 8–10, 12, 13, 17, 18]. Ввиду этого разделение колебаний жидкости на однородные и неоднородные представляет собой начало их содержательной классификации. Естественное развитие исследований в направлении, намеченном работами [2, 3, 8, 12, 17, 18], связано с изучением вопросов о том, какими параметрами можно количественно характеризовать неоднородность колебаний жидкости и при каких значениях этих параметров движение включений в колеблющейся жидкости претерпевает качественные изменения.

В данной работе предложен способ количественно характеризовать неоднородность колебаний жидкости: введены в рассмотрение коэффициент и средний коэффициент неоднородности колебаний жидкости. Поставлена и решена новая задача о движении твердого включения в колеблющейся жидкости. Найдены условия, при выполнении которых имеет место неизвестное ранее состояние отсутствия среднего движения включения в колеблющейся жидкости. Установлено, что поведение включения в однородно и неоднородно колеблющейся жидкости может быть качественно различным, сколь бы слабой ни была неоднородность колебаний жидкости.

2. Рассмотрим следующее построение. Имеется жидкость, которая может окружать одно или несколько тел и быть частично или полностью окруженной одной или несколькими стенками. Жидкость является колеблющейся: течение жидкости происходит вследствие того, что она подвергается колебательным воздействиям, которые могут оказываться на нее телами и стенками, а также могут проявляться в том, что жидкость на бесконечности совершает колебания.

Пусть Ω — область пространства, занимаемая жидкостью; Γ — граница области Ω (включая бесконечность, если область Ω является не ограниченной или частично ограниченной извне); $\hat{V}_\Gamma$ — наибольшее значение модуля скорости жидкости на границе Γ; η — точка пространства, принадлежащая области Ω в любой момент времени; $\hat{V}_\eta$ — наибольшее значение модуля скорости жидкости в точке η; ω — замкнутая область пространства, принадлежащая области Ω в любой момент времени; v — объем области ω.

Будем называть коэффициентом неоднородности колебаний жидкости в точке η и средним коэффициентом неоднородности колебаний жидкости по области ω соответственно величины

$$k_{\text{т}}(\eta) = 1 - \hat{V}_\eta/\hat{V}_\Gamma; \tag{1}$$

$$k_{\text{о}}(\omega) = \frac{1}{v} \iiint\limits_{\omega} k_{\text{т}}\, d\omega. \tag{2}$$

Отметим, что если колебания жидкости являются однородными, что, например, имеет место в задаче, рассмотренной в [2], то

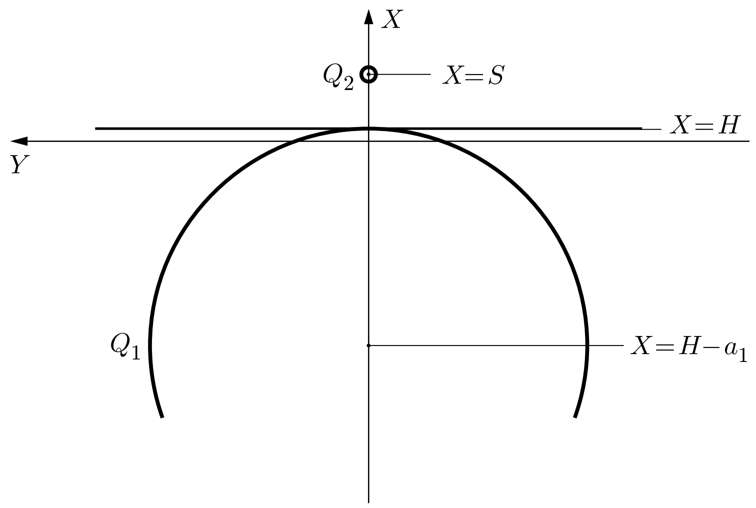
$$k_{\text{т}}(\eta) = 0, \qquad k_{\text{о}}(\omega) = 0$$

для любых η, ω.

3. Рассмотрим первую вспомогательную задачу. Имеется идеальная несжимаемая не ограниченная извне жидкость, содержащая абсолютно твердый бесконечно длинный круговой цилиндр Q_1 радиусом a_1 (см. рисунок). В начальный момент времени t, при $t = 0$, цилиндр и жидкость покоятся относительно инерциальной прямоугольной системы координат X, Y, Z; ось цилиндра параллельна оси Z и проходит через точку $(-a_1, 0, 0)$. При $t > 0$ цилиндр совершает заданные периодические с периодом T поступательные колебания вдоль оси X; положение цилиндра определяется радиусом-вектором $(H - a_1)\boldsymbol{e}_X$ точки пересечения оси цилиндра с осью X. Здесь

$$H = A(1 - \cos(2\pi t/T))$$

($A > 0$ — постоянная); $\boldsymbol{e}_X = (1, 0, 0)$. Требуется определить потенциальное плоское течение жидкости.



Система координат, расположение цилиндра Q_1, стенки с проницаемой для жидкости границей и цилиндра Q_2

Потенциал $\varphi_{\text{ц}}$ скорости жидкости удовлетворяет уравнению

$$\Delta\varphi_{\text{ц}} = 0 \qquad (a_1 < R_1 < \infty) \tag{3}$$

и условиям

$$\frac{\partial\varphi_{\text{ц}}}{\partial R_1} = \frac{dH}{dt}\cos\Theta_1 \qquad \text{при} \quad R_1 = a_1; \tag{4}$$

$$\nabla\varphi_{\text{ц}} \to 0 \qquad \text{при} \quad R_1 \to \infty; \tag{5}$$

$$\varphi_{\text{ц}} = 0 \qquad \text{при} \quad t = 0, \tag{6}$$

где R_1, Θ_1 — полярные координаты в плоскости $Z = 0$, связанные с X, Y соотношениями

$$X = H - a_1 + R_1\cos\Theta_1, \qquad Y = R_1\sin\Theta_1.$$

Задача (3)–(6) имеет решение

$$\varphi_{\text{ц}} = -a_1^2\,\frac{dH}{dt}\,\frac{X - H + a_1}{(X - H + a_1)^2 + Y^2}. \tag{7}$$

4. Рассмотрим вторую вспомогательную задачу. Имеется идеальная несжимаемая не ограниченная изнутри жидкость, соприкасающаяся с абсолютно твердой плоской стенкой. Граница стенки проницаема для жидкости. При $t = 0$ стенка и жидкость покоятся относительно системы координат X, Y, Z; граница стенки совпадает с плоскостью $X = 0$; занимаемая жидкостью область вне стенки содержится в полупространстве $X \geqslant 0$. При $t > 0$ стенка совершает заданные периодические поступательные колебания вдоль оси X; положение стенки определяется радиусом-вектором $H\boldsymbol{e}_X$ точки пересечения границы стенки с осью X; на границе стенки в направлении оси X жидкость движется со скоростью $(\partial\varphi_{\text{ц}}/\partial X)\big|_{X=H}$. Требуется определить потенциальное плоское течение жидкости вне стенки.

Потенциал $\varphi_{\text{с}}$ скорости жидкости удовлетворяет уравнению

$$\Delta\varphi_{\text{с}} = 0 \qquad (H < X < \infty) \tag{8}$$

и условиям

$$\frac{\partial\varphi_{\text{с}}}{\partial X} = \frac{\partial\varphi_{\text{ц}}}{\partial X} \qquad \text{при} \quad X = H; \tag{9}$$

$$\nabla\varphi_{\text{с}} \to 0 \qquad \text{при} \quad X^2 + Y^2 \to \infty, \quad X \geqslant H. \tag{10}$$

Задача (8)–(10) имеет решение

$$\varphi_{\text{с}} = \varphi_{\text{ц}} + f, \tag{11}$$

где f — функция t.

В соответствии с (7), (11) жидкость в области $H < X < \infty$ является неоднородно колеблющейся.

Пусть $a_2 > 0$, $l > 0$, S_0 $(S_0 > 2A + a_2)$ — постоянные; η_0 — точка $(S_0, 0, 0)$; ω_0 — замкнутая область $[(X - S_0)^2 + Y^2]^{1/2} \leqslant a_2$, $0 \leqslant Z \leqslant l$.

Будем предполагать, что значения $\delta = S_0/a_1$ и $\varepsilon = a_2/S_0$ малы по сравнению с единицей; значения $\varkappa = A/a_2$ не велики по сравнению с единицей.

Используя (1), (2), (7), (11), с точностью до величин, малых по сравнению с δ, найдем

$$k_{\text{т}}(\eta_0) = k_{\text{о}}(\omega_0) = k, \tag{12}$$

где

$$k = 2\delta. \tag{13}$$

Согласно (12), (13) значения $k_{\text{т}}(\eta_0)$ и $k_{\text{о}}(\omega_0)$, совпадая в указанном приближении друг с другом, тем меньше и соответственно колебания жидкости тем ближе к однородным, чем больше a_1 и чем меньше S_0.

5. Перейдем к основной задаче. Имеется идеальная несжимаемая жидкость, содержащая абсолютно твердый бесконечно длинный круговой цилиндр Q_2 радиусом a_2 и соприкасающаяся с абсолютно твердой плоской стенкой. Граница стенки проницаема для жидкости. При $t = 0$ цилиндр, стенка и жидкость покоятся относительно системы координат X, Y, Z; ось цилиндра параллельна оси Z и проходит через точку η_0; граница стенки совпадает с плоскостью $X = 0$; занимаемая жидкостью область вне стенки содержится в полупространстве $X \geqslant 0$. При $t > 0$ стенка совершает заданные периодические поступательные колебания вдоль оси X; положение стенки определяется радиусом-вектором $H\boldsymbol{e}_X$ точки пересечения границы стенки с осью X; на границе стенки в направлении оси X жидкость движется со скоростью $(\partial\varphi_{\text{с}}/\partial X)\big|_{X=H}$; течение жидкости вне стенки потенциальное плоское; цилиндр совершает поступательное движение вдоль оси X под действием сил давления жидкости; положение цилиндра определяется радиусом-вектором

$$\boldsymbol{S} = S\boldsymbol{e}_X \tag{14}$$

точки пересечения оси цилиндра с осью X ($S > H + a_2$). Требуется установить, как движется цилиндр, т. е. определить зависимость $\boldsymbol{S}$ от t.

Пусть Φ — потенциал скорости жидкости, P — давление в жидкости, R_2, Θ_2 — полярные координаты в плоскости $Z = 0$, связанные с X, Y соотношениями

$$X = S + R_2\cos\Theta_2, \qquad Y = R_2\sin\Theta_2;$$

$$F = -a_2 l\int\limits_0^{2\pi} P\big|_{R_2=a_2}\cos\Theta_2\,d\Theta_2 \text{ —} \tag{15}$$

сила, действующая в направлении оси X со стороны жидкости на часть цилиндра, при $t = 0$ занимающую область ω_0; $\rho_{\text{в}}$ — плотность цилиндра; $\rho_{\text{ж}}$ — плотность жидкости; I — функция t.

Координата S, давление P и потенциал Φ удовлетворяют следующим уравнениям и условиям:

$$\pi a_2^2 l\rho_{\text{в}}\,\frac{d^2S}{dt^2} = F; \tag{16}$$

$$S = S_0, \qquad \frac{dS}{dt} = 0 \qquad \text{при} \quad t = 0; \tag{17}$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial t} + \frac{1}{2}\,(\nabla\Phi)^2 + \frac{P}{\rho_{\text{ж}}} = I; \tag{18}$$

$$\Delta\Phi = 0; \tag{19}$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial X} = \frac{\partial\varphi_{\text{с}}}{\partial X} \qquad \text{при} \quad X = H; \tag{20}$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial R_2} = \frac{dS}{dt}\,\cos\Theta_2 \qquad \text{при} \quad R_2 = a_2; \tag{21}$$

$$\nabla\Phi \to 0 \quad \text{при} \quad X^2 + Y^2 \to \infty, \qquad X \geqslant H; \tag{22}$$

$$\Phi = 0 \qquad \text{при} \quad t = 0. \tag{23}$$

Задачей (16)–(23) моделируется движение твердого включения — цилиндра Q_2 — в неоднородно колеблющейся жидкости, колебательные воздействия на которую оказываются твердым вибратором — цилиндром Q_1.

6. Сделаем в (19)–(23) подстановку

$$X = x + H, \qquad Y = y, \qquad \Phi = \chi + \varphi_{\text{c}}. \tag{24}$$

В результате получим уравнение

$$\Delta\chi = 0 \tag{25}$$

и условия

$$\frac{\partial\chi}{\partial x} = 0 \qquad \text{при} \quad x = 0; \tag{26}$$

$$\frac{\partial\chi}{\partial r} = \frac{dS}{dt}\cos\theta - \frac{\partial\varphi_{\text{c}}}{\partial r} \qquad \text{при} \quad r = a_2; \tag{27}$$

$$\nabla\chi \to 0 \quad \text{при} \quad x^2 + y^2 \to \infty, \qquad x \geqslant 0; \tag{28}$$

$$\chi = c \qquad \text{при} \quad t = 0, \tag{29}$$

где r, θ — полярные координаты в плоскости $Z = 0$, связанные с x, y соотношениями

$$x = S - H + r\cos\theta, \qquad y = r\sin\theta;$$

$c = -\varphi_{\text{c}}\big|_{t=0}$ — постоянная.

Будем предполагать, что значения $\lambda = \delta/\varepsilon^2$ не малы и не велики по сравнению с единицей.

Применяя реализованный, в частности, в [12] метод определения потенциала скорости жидкости, найдем решение задачи (25)–(29), которое точно удовлетворяет (25), (26), (28), (29) и приближенно, с точностью до величин, пропорциональных $a_2\,dH/dt$ и $a_2\,dS/dt$, малых соответственно по сравнению с $\varepsilon^3 a_2\,dH/dt$ и $\varepsilon^3 a_2\,dS/dt$, удовлетворяет (27). Используя (15), (18), (24) и указанное решение задачи (25)–(29), получим

$$F = \frac{\pi a_2^2 l\rho_{\text{ж}} S_0}{T^2}\Big\{2\varepsilon\Big[1 + \frac{\varepsilon^2}{4s^2}\Big(1 + 2\varepsilon\,\frac{h}{s}\Big) - 2\lambda\varepsilon^2 s\Big(1 - \varepsilon\,\frac{h}{s}\Big)\Big]\frac{d^2h}{d\tau^2} + \frac{\varepsilon^4}{2s^3}\Big(\frac{dh}{d\tau}\Big)^2 - \\ - \frac{\varepsilon^3}{s^3}\Big(1 + 3\varepsilon\,\frac{h}{s}\Big)\frac{dh}{d\tau}\,\frac{ds}{d\tau} - \Big[1 + \frac{\varepsilon^2}{2s^2}\Big(1 + 2\varepsilon\,\frac{h}{s} + 3\varepsilon^2\,\frac{h^2}{s^2}\Big)\Big]\frac{d^2s}{d\tau^2} + \\ + \frac{\varepsilon^2}{2s^3}\Big(1 + 3\varepsilon\,\frac{h}{s} + 6\varepsilon^2\,\frac{h^2}{s^2}\Big)\Big(\frac{ds}{d\tau}\Big)^2\Big\}, \tag{30}$$

где $\tau = t/T$; $h = H/a_2$; $s = S/S_0$.

Предположим, что при $\varepsilon \to 0$

$$s \sim s_0 + \varepsilon s_1 + \ldots + \varepsilon^4 s_4. \tag{31}$$

Из (16), (17), (30), (31) следуют задачи для $s_0, s_1, \ldots, s_4$. Решая эти задачи, найдем

$$s_0 = 1, \quad s_1 = \tilde{s}_1, \quad s_2 = 0, \quad s_3 = \tilde{s}_3, \quad s_4 = -\frac{\pi^2}{2}\,\varkappa^2\frac{\rho - 1}{(\rho + 1)^2}\Big(\frac{\rho - 1}{\rho + 1} + 8\lambda\Big)\tau^2 + \tilde{s}_4, \tag{32}$$

где $\rho = \rho_{\text{в}}/\rho_{\text{ж}}$; $\tilde{s}_1, \tilde{s}_3, \tilde{s}_4$ — периодические функции τ. Используя (13), (31), (32), получим

$$s = 1 + \Xi\tau^2 + \tilde{s}, \tag{33}$$

где

$$\Xi = -\frac{\pi^2}{2}\,\varepsilon^4\varkappa^2\frac{\rho - 1}{(\rho + 1)^2}\Big(\frac{\rho - 1}{\rho + 1} + \frac{4k}{\varepsilon^2}\Big); \tag{34}$$

$\tilde{s}$ — периодическая функция τ.

7. Формулами (14), (33), (34) приближенно определяется зависимость $\boldsymbol{S}$ от t. Включение совершает колебания и среднее, монотонное движение вдоль оси X.

Рассмотрим среднее движение включения.

Согласно (33), (34) имеет место следующее.

1. Если $\rho > 1$, то $\Xi < 0$, включение движется к вибратору.

2. Если $\rho = 1$, то $\Xi = 0$, включение не совершает среднего движения.

3. Если $0 \leqslant \rho < 1$, то:

3.1. $\Xi < 0$, включение движется к вибратору при $k = 0$ (при однородных колебаниях жидкости) и при $0 < k < k^*$ (когда реализуется “слабая” неоднородность колебаний жидкости).

3.2. $\Xi = 0$, включение не совершает среднего движения при $k = k^*$.

3.3. $\Xi > 0$, включение движется от вибратора при $k > k^*$ (когда реализуется “сильная” неоднородность колебаний жидкости).

В утверждениях 3.1–3.3

$$k^* = \frac{\varepsilon^2}{4} \frac{1-\rho}{1+\rho}.$$

Произведем качественное сопоставление поведения (среднего движения) включения в основной задаче данной работы с поведением включения в задачах, рассмотренных в [2], где колебания жидкости являются однородными, и в [3], где колебания жидкости являются неоднородными. Утверждения 1, 2 имеют место и при однородных, и при неоднородных колебаниях жидкости [2, 3]. Утверждение 3.1 согласуется с установленным в [2]. Утверждение 3.3 согласуется с установленным в [3]. Таким образом, имеется соответствие с результатами работ [2, 3]. Кроме того, согласно утверждению 3.2 существует новое, неизвестное ранее состояние отсутствия среднего движения включения, которое осуществляется при $0 \leqslant \rho < 1$ и “промежуточной” неоднородности колебаний жидкости, когда $k_{\text{т}}(\eta_0) = k^*$, $k_{\text{о}}(\omega_0) = k^*$. Это состояние разделяет два других состояния качественно различного поведения включения, в одном из которых включение приближается к вибратору, а в другом удаляется от него.

Пусть

$$\rho^* = \frac{1 - 4k/\varepsilon^2}{1 + 4k/\varepsilon^2}$$

для $0 < k < \varepsilon^2/4$. Согласно (33), (34) имеет место также следующее:

1) $\Xi < 0$, включение движется к вибратору, если $0 \leqslant \rho < \rho^*$;

2) $\Xi > 0$, включение движется от вибратора, если $\rho^* < \rho < 1$.

Данный результат, в частности, означает, что движение включения в однородно и неоднородно колеблющейся жидкости может быть качественно различным, сколь бы слабой ни была неоднородность колебаний жидкости.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Челомей В. Н.** Парадоксы в механике, вызываемые вибрациями // Докл. АН СССР. 1983. Т. 270, № 1. С. 62–67.
2. **Сенницкий В. Л.** О движении кругового цилиндра в вибрирующей жидкости // ПМТФ. 1985. № 5. С. 19–23.
3. **Сенницкий В. Л.** Движение шара в жидкости, вызываемое колебаниями другого шара // ПМТФ. 1986. № 4. С. 31–36.

4. **Луговцов Б. А., Сенницкий В. Л.** О движении тела в вибрирующей жидкости // Докл. АН СССР. 1986. Т. 289, № 2. С. 314–317.
5. **Сенницкий В. Л.** О движении газового пузыря в вязкой вибрирующей жидкости // ПМТФ. 1988. № 6. С. 107–113.
6. **Сенницкий В. Л.** Преимущественно однонаправленное движение газового пузыря в вибрирующей жидкости // Докл. АН СССР. 1991. Т. 319, № 1. С. 117–119.
7. **Сенницкий В. Л.** Преимущественно однонаправленное движение сжимаемого твердого тела в вибрирующей жидкости // ПМТФ. 1993. № 1. С. 100–101.
8. **Sennitskii V. L.** On motion of inclusions in uniformly and non-uniformly vibrating liquid // Intern. workshop on G-jitter: Proc. Potsdam (USA): Clarkson Univ., 1993. P. 178–186.
9. **Сенницкий В. Л.** Движение включений в вибрирующей жидкости: Автореф. дис. ... д-ра физ.-мат. наук. Новосибирск: Ин-т гидродинамики, 1993.
10. **Сенницкий В. Л.** Движение включений в колеблющейся жидкости // Сиб. физ. журн. 1995. № 4. С. 18–26.
11. **Сенницкий В. Л.** О поведении газового пузыря в вязкой колеблющейся жидкости в присутствии силы тяжести // ПМТФ. 1997. Т. 38, № 5. С. 73–79.
12. **Сенницкий В. Л.** Движение шара в жидкости в присутствии стенки при колебательных воздействиях // ПМТФ. 1999. Т. 40, № 4. С. 125–132.
13. **Lavrenteva O. M.** On the motion of particles in non-uniformly vibrating liquid // Europ. J. Appl. Math. 1999. V. 10, pt 3. P. 251–263.
14. **Сенницкий В. Л.** О движении пульсирующего твердого тела в вязкой колеблющейся жидкости // ПМТФ. 2001. Т. 42, № 1. С. 82–86.
15. **Карева И. Е., Сенницкий В. Л.** О движении кругового цилиндра в колеблющейся жидкости // ПМТФ. 2001. Т. 42, № 2. С. 103–105.
16. **Сенницкий В. Л.** О поведении пульсирующего твердого тела в вязкой жидкости в присутствии силы тяжести // ПМТФ. 2001. Т. 42, № 5. С. 93–97.
17. **Пятигорская О. С., Сенницкий В. Л.** О движении твердого тела в неоднородно колеблющейся жидкости // Вестн. Новосиб. гос. ун-та. Сер. Математика, механика, информатика. 2002. Т. 2, вып. 2. С. 55–59.
18. **Пятигорская О. С., Сенницкий В. Л.** Движение шара в жидкости, вызываемое колебаниями другого шара // ПМТФ. 2004. Т. 45, № 4. С. 102–105.

Поступила в редакцию 17/II 2006 г.