УДК 539.375

РАСПРОСТРАНЕНИЕ ТРЕЩИНЫ СДВИГА В СТОХАСТИЧЕСКИ НЕОДНОРОДНОМ ТЕЛЕ

В. В. Бортникова, Н. Б. Ромалис

(*Воронеж*)

Рассматривается распространение трещины в стохастически неоднородном теле в условиях продольного сдвига (в борновском приближении). Показано, что средние напряжения в вершине трещины имеют особенность порядка $(r)^{-1/2}$. Введен эффективный коэффициент интенсивности напряжений. Известно, что распространение трещины в однородном теле носит локальный характер, т. е. расход энергии на рост трещины полностью определяется коэффициентом интенсивности напряжений — локальной характеристикой. Математически эквивалентность силового и энергетического подходов выражается формулой Ирвина [1].

В рассматриваемом случае стохастически неоднородного тела получен аналог формулы Ирвина.

Рассмотрим упругое неоднородное тело, содержащее трещину, расположенную вдоль оси x, находящееся в состоянии продольного сдвига. В этом случае $u=v=0$; $w=w(x, y)\neq 0$; $\sigma_x=\sigma_y=\tau_{xy}=\sigma_z=0$; $\tau_{xz}\neq 0$; $\tau_{zy}\neq 0$. Уравнение равновесия и закон Гука записываются в виде

$$\frac{\partial\tau_{xz}}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{yz}}{\partial y}=0;\quad \tau_{xz}=\mu\frac{\partial w}{\partial x};\ \tau_{yz}=\mu\frac{\partial w}{\partial y} \tag{1}$$

при граничном условии $\tau_{xz}\cos nx+\tau_{yz}\cos ny=f$.

Критерий разрушения Гриффита в интегральной форме приведен в работах [2, 3] и применительно к случаю продольного сдвига записывается в виде

$$\frac{\delta W}{\delta l}=\frac{1}{2}R\int_0^{2\pi}\left(W_0\cos\theta-\tau_{xz}\frac{\partial w}{\partial x}\cos\theta-\tau_{yz}\frac{\partial w}{\partial x}\sin\theta\right)d\theta=G,$$

где W_0 — удельный упругий потенциал; R — радиус окружности, охватывающей вершину трещины.

Пусть модуль сдвига μ является случайной функцией координат x, y и не зависит от z. Можно представить модуль сдвига в виде $\mu=\langle\mu\rangle+\mu'$ и предположить малость в среднеквадратичном пульсаций μ' по сравнению с $\langle\mu\rangle$. Если ввести обозначения $u=\langle w\rangle$ и $v=w-u$, то после подстановки выражения для μ в формулу (1) получится статистически нелинейная задача, которая может быть линеаризована, если ее решение представить в виде ряда по степеням некоторого параметра $\varkappa$ [4].

Ограничиваясь двумя членами разложения перемещений w, полагая $\varkappa=1$, можно показать, что среднее значение приращения упругой энергии на единицу длины трещины имеет вид

$$\begin{aligned}\frac{\delta\langle W\rangle}{\delta l}=R\int_0^{2\pi}\Bigg[\frac{1}{2}\Bigg(&-\langle\mu\rangle\varepsilon_{xz}^2+\langle\mu\rangle\left\langle\frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}\right\rangle-\\&-\langle\mu\rangle\left\langle\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x}\right\rangle-2\left\langle\mu'\frac{\partial v}{\partial x}\right\rangle\varepsilon_{xz}+\langle\mu\rangle\varepsilon_{yz}^2+\\&+2\left\langle\mu'\frac{\partial v}{\partial y}\right\rangle\varepsilon_{yz}\Bigg)\cos\theta-\left(\langle\mu\rangle\varepsilon_{xz}\varepsilon_{yz}+\langle\mu\rangle\left\langle\frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x}\right\rangle+\right.\\&\left.+\left\langle\mu'\frac{\partial v}{\partial y}\right\rangle\varepsilon_{xz}+\left\langle\mu'\frac{\partial v}{\partial x}\right\rangle\varepsilon_{yz}\right)\sin\theta\Bigg]d\theta,\end{aligned} \tag{2}$$

$$\varepsilon_{xz}=\frac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial x},\quad \varepsilon_{yz}=\frac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial y}.$$

Для вычисления всех входящих в (2) величин необходимо решить краевую задачу для средних перемещений u

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0, \tag{3}$$

$$\langle \mu \rangle(\varepsilon_{xz}\cos nx+\varepsilon_{yz}\cos ny)=f$$

и краевую задачу для пульсаций перемещения

$$\langle\mu\rangle\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right)=-\frac{\partial}{\partial x}(\mu'\varepsilon_{xz})-\frac{\partial}{\partial y}(\mu'\varepsilon_{yz}), \tag{4}$$

$$\langle\mu\rangle\left(\frac{\partial v}{\partial x}\cos nx+\frac{\partial v}{\partial y}\cos ny\right)=-\mu'(\varepsilon_{xz}\cos n x+\varepsilon_{yz}\cos ny).$$

Решение задачи (3) известно, решение задачи (4) может быть представлено через функцию Грина $G(x, y, x_0, y_0)$ задачи однородной теории упругости (3) [4]

$$v(x, y)=\frac{1}{\langle\mu\rangle}\int\limits_S G(x, y, x_0, y_0)\left\{\frac{\partial}{\partial x_0}[\mu'(x_0, y_0)\varepsilon_{xz}(x_0, y_0)]+\right.$$

$$\left.+\frac{\partial}{\partial y_0}[\mu'(x_0, y_0)\varepsilon_{yz}(x_0, y_0)]\right\}dx_0dy_0-\frac{1}{\langle\mu\rangle}\int\limits_L G(x, y, x_0, y_0)\times$$

$$\times\{\mu'(x_0, y_0)[\varepsilon_{xz}(x_0, y_0)\cos nx+\varepsilon_{yz}(x_0, y_0)\cos ny]\}\,dL.$$

Определим средние напряжения по формулам

$$\langle\tau_{xz}\rangle=\langle\mu\rangle\varepsilon_{xz}+\left\langle\mu'\frac{\partial v}{\partial x}\right\rangle;\quad \langle\tau_{yz}\rangle\langle\mu\rangle\varepsilon_{yz}+\left\langle\mu'\frac{dv}{dy}\right\rangle; \tag{5}$$

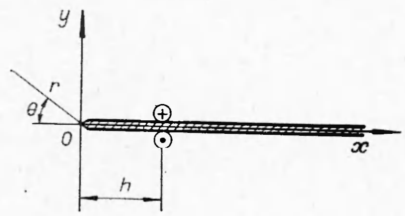
$$\langle\tau_{xz}\rangle=\langle\mu\rangle\varepsilon_{xz}+\frac{1}{\langle\mu\rangle}\int\limits_S f_1\frac{\partial G}{\partial x}dx_0dy_0-\frac{1}{\langle\mu\rangle}\int\limits_L f_2\frac{\partial G}{\partial x}dL;$$

$$\langle\tau_{yz}\rangle=\langle\mu\rangle\varepsilon_{yz}+\frac{1}{\langle\mu\rangle}\int\limits_S f_1\frac{\partial G}{\partial y}dx_0dy_0-\frac{1}{\langle\mu\rangle}\int\limits_L f_2\frac{\partial G}{\partial y}dL;$$

$$f_1=\left\langle\mu'(x, y)\frac{\partial\mu'(x_0, y_0)}{\partial x_0}\right\rangle\varepsilon_{xz}(x_0, y_0)+\left\langle\mu'(x, y)\frac{\partial\mu'(x_0, y_0)}{\partial y_0}\right\rangle\varepsilon_{yz}(x_0, y_0);$$

$$f_2=-\langle\mu'(x, y)\,\mu'(x_0, y_0)\rangle[\varepsilon_{xz}(x_0, y_0)\cos nx+\varepsilon_{yz}(x_0, y_0)\cos ny],$$

где S — область вне разреза; L — линия разреза.



Пусть имеется бесконечное тело с полубесконечной трещиной, нагруженной сосредоточенной силой P на расстоянии h от ее вершины (фигура). Требуется определить функцию Грина гармонической задачи такую, чтобы ее производная $\frac{\partial G(x, y, x_0, y_0)}{\partial n}=0$ на линии разреза. Функция Грина двух переменных $G(x, y, x_0, y_0)$ имеет вид [5]

$$G(x, y, x_0, y_0)=\frac{1}{2\pi}\left[\ln\frac{1}{\rho}+\varphi(x, y, x_0, y_0)\right],$$

$$\rho=\{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2\}^{1/2}.$$

Производные функции Грина, входящие в формулы (5), имеют вид

$$\frac{\partial G}{\partial x} = \frac{1}{2\pi}\left[-\frac{x-x_0}{(x-x_0)^2-(y-y_0)^2}+\frac{\partial\varphi(x,y,x_0,y_0)}{\partial x}\right];$$

$$\frac{\partial G}{\partial y} = \frac{1}{2\pi}\left[-\frac{y-y_0}{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}+\frac{\partial\varphi(x,y,x_0,y_0)}{\partial y}\right].$$

Гармоническая функция $\varphi(x, y, x_0, y_0)$ является действительной частью некоторой аналитической в области, занятой телом, функции $f(z)$

$$\varphi = \mathrm{Re}\{f(z)\};\quad \frac{\partial\varphi}{\partial x} = \mathrm{Re}\{f'(z)\};\quad \frac{\partial\varphi}{\partial y} = -\mathrm{Im}\{f'(z)\}$$

и удовлетворяет граничному условию

$$\mathrm{Im}\{f'(z)\}\Big|_{\substack{y=0\\ x\in[0,\infty]}} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\ln\frac{1}{\rho}\right)\Big|_{\substack{y=0\\ x\in[0,\infty]}}.$$

С помощью формулы Келдыша — Седова [6] функция $f'(z)$ вычисляется по формуле

$$f'(z) = \frac{y_0}{2\pi^2\sqrt{z}}\int_0^\infty\frac{\sqrt{p}\,dp}{(p-z)\left[(p-x_0)^2+y_0^2\right]}.$$

Выражения для ε_{xz}, ε_{yz}, соответствующие однородной задаче, можно получить из [7].

В результате вычислений получим, что в окрестности вершины трещины средние значения напряжений имеют вид

$$\langle\tau_{xz}\rangle = \frac{P\sin\theta/2}{\sqrt{2r}}F;\quad \langle\tau_{yz}\rangle = \frac{P\cos\theta/2}{\sqrt{2r}}F; \tag{6}$$

$$F = \left[\frac{1}{\pi\sqrt{2h}}+\frac{1}{\pi\langle\mu\rangle^2}\int_s\frac{\sqrt{\sqrt{x_0^2+y_0^2}+x_0}}{\sqrt{x_0^2+y_0^2}}\left[\left\langle\mu'(0,0)\frac{\partial\mu'(x_0,y_0)}{\partial x_0}\right\rangle\times\right.\right.$$

$$\left.\times\,\varepsilon_{xz}(x_0,y_0)+\left\langle\mu'(0,0)\frac{\partial\mu'(x_0,y_0)}{\partial y_0}\right\rangle\varepsilon_{yz}(x_0,y_0)\right]dx_0dy_0 -$$

$$-\frac{\sqrt{2}}{\pi\langle\mu\rangle}\int_0^\infty\frac{\delta(x_0-h)\langle\mu'(0,0)\,\mu'(x_0,0)\rangle}{\sqrt{x_0}}dx_0;\quad k_3 = \frac{P}{\pi\sqrt{2h}}.$$

Из формул (6) видно, что напряжения имеют особенность порядка $(r)^{-1/2}$ в окрестности вершины трещины.

Введем эффективный коэффициент интенсивности напряжений k_3' и запишем выражения (6) в виде

$$\langle\tau_{xz}\rangle = \frac{\sin(\theta/2)}{\sqrt{2r}}k_3';\quad \langle\tau_{yz}\rangle = \frac{\cos(\theta/2)}{\sqrt{2r}}k_3'; \tag{7}$$

$$k_3' = PF = k_3 + k_3^*.$$

Первое слагаемое в правой части последней формулы (7) — известное значение коэффициента интенсивности напряжений для однородного тела, второе — представляет собой добавку, обусловленную стохастической неоднородностью тела.

Возвращаясь теперь к формуле (2), считая радиус R малым и используя соотношения (7), получим

$$\varepsilon_{xz}^2 = \frac{\sin^2(\theta/2)}{2\langle\mu\rangle^2 R} k_3^2;\ \varepsilon_{xz}\left\langle\mu' \frac{\partial v}{\partial x}\right\rangle = \frac{\sin^2(\theta/2)}{2\langle\mu\rangle R} k_3 k_3^*;$$

$$\left\langle\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x}\right\rangle = \frac{\sin^2(\theta/2)}{2\langle\mu\rangle^2 R}\left(k_3^* k_3^*\right);$$

где

$$\left\langle\frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}\right\rangle = \frac{\cos^2(\theta/2)}{2\langle\mu\rangle^2 R}\left(k_3^* k_3^*\right),$$

(8)
$$k_3^* k_3^* = \int\limits_S\int\limits_S \frac{\sqrt{\sqrt{x_0^2+y_0^2}+x_0}\sqrt{\sqrt{x_1^2+y_1^2}+x_1}}{\sqrt{x_0^2+y_0^2}\sqrt{x_1^2+y_1^2}}\times$$
$$\times\left[\left\langle\frac{\partial\mu'(x_0,y_0)}{\partial x_0}\frac{\partial\mu'(x_1,y_1)}{\partial x_1}\right\rangle\varepsilon_{xz}(x_0,y_0)\varepsilon_{xz}(x_1,y_1) + \left\langle\frac{\partial\mu'(x_1,y_1)}{\partial y_1}\times\right.\right.$$
$$\left.\times\frac{\partial\mu'(x_0,y_0)}{\partial y_0}\right\rangle\varepsilon_{yz}(x_0,y_0)\varepsilon_{yz}(x_1,y_1) + \left\langle\frac{\partial\mu'(x_0,y_0)}{\partial y_0}\frac{\partial\mu'(x_1,y_1)}{\partial x_1}\right\rangle\varepsilon_{yz}(x_0,y_0)\times$$
$$\left.\times\,\varepsilon_{xz}(x_1,y_1) + \left\langle\frac{\partial\mu'(x_1,y_1)}{\partial y_1}\frac{\partial\mu'(x_0,y_0)}{\partial x_0}\right\rangle\varepsilon_{yz}(x_1,y_1)\varepsilon_{xz}(x_0,y_0)\right]\times$$
$$\times\,dx_0dy_0dx_1dy_1 - \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{h}}\int\limits_S\left\{\left\langle\frac{\partial\mu'(x_0,y_0)}{\partial x_0}\mu'(h,0)\right\rangle\varepsilon_{xz}(x_0,y_0)+\right.$$
$$\left.+\left\langle\frac{\partial\mu'(x_0,y_0)}{\partial y_0}\mu'(h,0)\right\rangle\varepsilon_{yz}(x_0,y_0)\right\}dx_0dy_0.$$

После некоторых преобразований формула (2) примет вид

(9)
$$\frac{\delta\langle W\rangle}{\delta l} = \frac{\pi}{2\langle\mu\rangle}\left\{k_3^2 + 2k_3k_3^* + \left(k_3^*k_3^*\right)\right\} = G.$$

В формулах (8), (9) выражение, стоящее в фигурной скобке, отличается от полного квадрата величины k_3' наличием корреляционной связи между пульсациями упругих постоянных в различных точках тела.

Таким образом, критерий разрушения Гриффита — Ирвина записывается для трещины сдвига в стохастически неоднородном теле в виде (9), т. е. рост трещины начнется тогда, когда функция локальных характеристик, стоящая в фигурной скобке, достигнет величины G.

Поступила 8 XII 1974

ЛИТЕРАТУРА

1. **Irwin I. R.** Fracture. Handbuch der Physik. Bd 6. S. Berlin, Springer, 1958, S. 551.
2. **Sanders I. L.** On the Griffith-Irwin fracture theory.— «J. Appl. Mech.», 1960, vol. 27, N 2, p. 352—35
3. **Черепанов Г. П.** О распространении трещин в сплошной среде.— ПММ, 1967, вып. 3.
4. **Ломакин В. А.** Статистические задачи механики твердых деформируемых тел. М., «Наука», 1970.
5. **Тихонов А. Н., Самарский А. А.** Уравнения математической физики. М., «Наука», 1966.
6. **Лаврентьев М. А., Шабат Б. В.** Методы теории функций комплексного переменного. М., «Наука», 1965.
7. **Sih G. C.** Stress distribution near internal crack tips for longitudinal shear problems.— «J. Appl. Mech.», 1965, N 1.