Из сопоставления экспериментальных и расчетных значений видно, что между ними имеется удовлетворительное согласие в пределах ошибок эксперимента.

Поступила 12 VIII 1977

ЛИТЕРАТУРА

1. **Коньков А. А., Ильметов А. В.** Экспериментальное исследование состояния среды за мощными ударными волнами в двуокиси углерода.— ТВТ, 1977, т. 15, № 2.
2. **Ильметов А. В.** Измерение давления за отраженными волнами в смеси гелия с аргоном.— В кн.: Физика горения и методы ее исследования. Чебоксары, изд. Чебоксарск. ун-та, 1975.
3. **Коньков А. А., Ильметов А. В.** Экспериментальное изучение давления за отраженными ударными волнами в аргоне при числах Маха 10—35.— «Инж.-физ. журн.», 1975, т. 28, № 4.
4. **Плешанов И. В.** К расчету параметров химически реагирующего газа за падающей и отраженной ударной волной.— В кн.: Теплофизические свойства и газодинамика высокотемпературных сред. М., «Наука», 1972.

УДК 533.601.1

ОБ ОДНОМ НЕСТАЦИОНАРНОМ ОСЕСИММЕТРИЧНОМ ДВИЖЕНИИ ГАЗА

В. А. Дворников

(*Томск*)

Осесимметричные нестационарные безвихревые движения газа могут быть описаны системой уравнений [1]

$$(1)\quad r\frac{\partial a}{\partial t}+Nr\frac{\partial a}{\partial r}+T\frac{\partial a}{\partial \theta}+(\gamma-1)a\left[\frac{\partial (Nr)}{\partial r}+\frac{\partial T}{\partial \theta}+N+T\operatorname{ctg}\theta\right]=0,$$

$$\frac{\partial N}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial r}[(N^2+T^2)/2+a/(\gamma-1)]=0,$$

$$\frac{\partial N}{\partial \theta}-\frac{\partial}{\partial r}(Tr)=0,\quad a=\frac{dp}{d\rho},\quad p=A\rho^{\gamma},$$

где N, T — соответственно радиальная, тангенциальная компоненты скорости газа; a — квадрат скорости звука; r, θ — сферические координаты.

Найдем класс решений системы (1) при условии, что компоненты скорости N, T зависят только от угла θ и времени t. Из третьего уравнения (1) следует

$$(2)\qquad N=f(\theta,t),\quad T=f'_{\theta}(\theta,t).$$

Подставив N, T из (2) во второе уравнение (1), получим выражение квадрата скорости звука через функцию $f(\theta, t)$

$$(3)\qquad a=-(\gamma-1)\left[rf'_t+\psi(\theta,t)\right],$$

где $\psi(\theta, t)$—произвольная функция. С учетом (2), (3) первое уравнение (1) сводится к следующей системе:

$$f = t\varphi(\theta) + x(\theta),\ \ \psi + A(\theta)\, t^2/2 + B(\theta)\, t + \mu(\theta) = 0, \tag{4}$$

$$(\gamma - 1)\, \psi \left(2f + f'_\theta \operatorname{ctg} \theta + f''_{\theta\theta}\right) + f'_\theta \psi'_\theta = 0,$$

где $A(\theta) = (2\gamma - 1)\, \varphi^2 + (\gamma - 1)\, \varphi''_{\theta\theta}\varphi + \varphi'^2 + (\gamma - 1)\, \varphi\varphi'_\theta \operatorname{ctg}\theta;$

$$B(\theta) = (2\gamma - 1)\, x\varphi + (\gamma - 1)\, x''_{\theta\theta}\varphi + x'_\theta\varphi'_\theta + (\gamma - 1)\varphi x'_\theta \operatorname{ctg} \theta;$$

$\mu(\theta)$ — произвольная функция.
Так как θ и t — независимые переменные, то из (4) получим переопределенную систему уравнений для нахождения $\varphi(\theta)$, $x(\theta)$, $\mu(\theta)$

$$(\gamma - 1)\left(2\varphi + \varphi'_\theta \operatorname{ctg} \theta + \varphi''_{\theta\theta}\right) A + \varphi'_\theta A'_\theta = 0, \tag{5}$$

$$(\gamma - 1)\left(2x + x'_\theta \operatorname{ctg} \theta + x''_{\theta\theta}\right) A + x'_\theta A'_\theta + 2B(\gamma - 1)\left(2\varphi + \varphi'_\theta \operatorname{ctg} \theta + \varphi''_{\theta\theta}\right) + {} $$
$$+ 2\varphi'_\theta B'_\theta = 0,$$

$$(\gamma - 1)\left(2\varphi + \varphi'_\theta \operatorname{ctg} \theta + \varphi''_{\theta\theta}\right) \mu + \varphi'_\theta \mu'_\theta + B(\gamma - 1)\left(2x + x'_\theta \operatorname{ctg} \theta + {}\right.$$
$$\left. + x''_{\theta\theta}\right) + x'_\theta B'_\theta = 0,$$

$$(\gamma - 1)\left(2x + x'_\theta \operatorname{ctg} \theta + x''_{\theta\theta}\right) \mu + x'_\theta \mu'_\theta = 0.$$

Исследуем (5) на совместность. Считая $\varphi'_\theta \neq 0$, $x'_\theta \neq 0$, исключим из (5) A'_θ, B'_θ, μ'_θ. В результате приходим к соотношению между x и φ

$$\left[A x'_\theta/\varphi'_\theta + 2\mu\varphi'_\theta/x'_\theta - 2B\right]\left[\Phi/\varphi'_\theta - X/x'_\theta\right] = 0, \tag{6}$$

где $\Phi = (2\varphi + \varphi'_\theta \operatorname{ctg} \theta + \varphi''_{\theta\theta})(\gamma - 1)$; $X = (2x + x'_\theta \operatorname{ctg} \theta + x''_{\theta\theta})(\gamma - 1)$.

Приравнивая нулю второй сомножитель, получим дифференциальную связь между x и φ

$$x = \varphi\left[c_1 \int \varphi^{-2} R\, d\varphi + c_2\right], \text{ где } R = \exp\left[2 \int \varphi\, (\varphi'_\theta)^{-1} d\theta\right]. \tag{7}$$

Система (5) при условии (7) имеет следующий вид:
при $A \neq 0$

$$A\Phi + \varphi'_\theta A'_\theta = 0,\ \ B = c_3 A,\ \ \mu = c_4 A; \tag{8}$$

при $A = 0$

$$(2\gamma - 1)\, \varphi^2 + (\gamma - 1)\, \varphi''_{\theta\theta}\varphi + \varphi'^2_\theta + (\gamma - 1)\, \varphi\varphi'_\theta \operatorname{ctg} \theta = 0, \tag{9}$$

$$\Phi B + \varphi'_\theta B'_\theta = 0,\ \ \Phi\mu + \varphi'_\theta \mu'_\theta = 0.$$

Второе уравнение (8) накладывает дополнительную дифференциальную связь на x и φ, которая с учетом выражений A и B (4) может быть представлена в виде

$$A\left[c_3 - x'_\theta/\varphi'_\theta\right] - \varphi\left[x - \varphi x'_\theta/\varphi'_\theta\right] = 0. \tag{10}$$

Подставляя в (10) значение x из (7), придем к уравнению для φ

$$A\left[\frac{c_3 - c_2}{c_1} - \int \varphi^{-2} R\, d\varphi - R/\varphi\right] - \varphi R = 0.$$

Дифференцируя это уравнение по θ, получим первое уравнение (8)

$$A\Phi + \varphi_\theta' A_\theta' = 0.$$

Таким образом, система (5) при условии (7) будет совместной.

Исследуем систему (9). Дополнительную дифференциальную связь между x и φ в системе (9) определяет второе уравнение. Выражение B из (4) при условии (7) и $A = 0$ будет иметь вид

$$B = -c_1\varphi R.$$

Подставляя это значение B во второе уравнение (9), получим

$$R\left[(2\gamma - 1)\varphi^2 + (\gamma - 1)\varphi_{\theta\theta}''\varphi + \varphi_\theta'^2 + (\gamma - 1)\varphi_\theta'\varphi\operatorname{ctg}\theta\right] = 0,$$

откуда следует совместность (9). При этом $\mu = c_3\varphi R$.

Рассмотрим случай, когда первый сомножитель в (6) равен нулю, т. е.

$$\mu = Bx_\theta'/\varphi_\theta' - (x_\theta'^2 A)/(2\varphi_\theta'^2). \tag{11}$$

Подставляя (11) в последние два уравнения (5), приходим к системе для x и φ

$$2B\left[X + F_\theta' x_\theta'/F\right] - A\left[FX + 2F_\theta' x_\theta' - \Phi F x_\theta'/\varphi_\theta'\right] + 2B_\theta' x_\theta' = 0, \tag{12}$$
$$B\left[\Phi F + \varphi_\theta' F_\theta' + X\right] - A\varphi_\theta' F F_\theta' + 2B_\theta' x_\theta' = 0,$$

где $F = x_\theta'/\varphi_\theta'$. Вычитая из второго уравнения первое, получим

$$\left[Ax_\theta'/\varphi_\theta' - B\right]\left[(x_{\theta\theta}''\varphi_\theta' - x_\theta'\varphi_{\theta\theta}'')/\varphi_\theta' + X - \Phi x_\theta'/\varphi_\theta'\right] = 0. \tag{13}$$

Полагая равным нулю первый сомножитель, найдем

$$B = Ax_\theta'/\varphi_\theta'. \tag{14}$$

Подставляя B из (14) во второе уравнение (12), приходим к выражению

$$A\left[F^2\Phi - FX + 2F_\theta' x_\theta'\right] = 0. \tag{15}$$

Из равенства $A = 0$ и (14), (11) следует $B = 0$, $\mu = 0$, что соответствует частному случаю условия (7). Из равенства нулю второго сомножителя в (15) получим уравнение для x

$$(\gamma - 3)\left(x_{\theta\theta}''\varphi_\theta' - \varphi_{\theta\theta}'' x_\theta'\right) + 2(\gamma - 1)\left(x\varphi_\theta' - \varphi x_\theta'\right) = 0,$$

второе уравнение для φ имеем из (14). Совместное решение этих двух уравнений дает $x = c\varphi$, что также соответствует частному случаю условия (7).

Полагая равным нулю второй сомножитель в (13), получим дифференциальную связь между x и φ, учитывая которую, второе уравнение (12) приводим к виду

$$\left(x_\theta'\varphi - x\varphi_\theta'\right)\left[(1 - 2\gamma)A + (3\gamma - 2)^2\varphi^2/\gamma\right] = 0.$$

Из равенства нулю первого сомножителя следует $x = c\varphi$. Эта зависимость x от φ была ранее рассмотрена. Из равенства нулю второго сомножителя приходим к уравнению для φ

$$\left[2\gamma - 1 - (3\gamma - 2)^2/(2\gamma^2 - \gamma)\right]\varphi^2 + \varphi_\theta'^2 + (\gamma - 1)\varphi_{\theta\theta}''\varphi + (\gamma - 1)\varphi\varphi_\theta'\operatorname{ctg}\theta = 0,$$

которое с первым уравнением (5) допускает совместное решение только в виде $\varphi = 0$.

Рассмотрим теперь случай, когда $\varphi'_\theta = 0$, $x'_\theta = 0$. При $\varphi'_\theta = 0$ из уравнения (5) следует $\varphi = 0$. Учитывая (4), получим стационарный режим течения

$$N = x(\theta),\ T = x'_\theta(\theta),\ a^2 = (\gamma - 1)\mu(\theta).$$

В условиях стационарного режима из системы (1) следует интеграл Бернулли—Эйлера, который налагает дифференциальную связь между x и μ в виде $(x^2 + x'^2_\theta)/2 + \mu = \mathrm{const}$. Учитывая это уравнение и последнее уравнение (5), систему (1) сведем к одному уравнению для функции $x(\theta)$

$$x''_{\theta\theta}(a^2 - x'^2_\theta) + (2a^2 - x'^2_\theta)x + a^2 x'_\theta \operatorname{ctg}\theta = 0,$$
$$a^2 = -(\gamma - 1)(x^2 + x'^2_\theta)/2 + c,$$

которое описывает осесимметричные конические течения газа и рассмотрено в работах [2, 3]. Случай $x'_\theta = 0$ $(x \neq 0)$ приводит к $\mu = 0$, $B = 0$, $A = 0$. При $x = 0$ имеем $B = 0$, $\mu = c_1 A$.

Таким образом, полностью исследована система (5) на совместность, в случае нестационарного режима течений искомый класс движений газа будет описываться следующими функциями переменных r, θ, t:

$$N(\theta, t) = \varphi\left[t + c_2 + c_1 \int \varphi^{-2} R\, d\varphi\right],$$
$$T(\theta, t) = \varphi'_\theta\left[t + c_2 + c_1\left(\int \varphi^{-2} R\, d\varphi + \varphi^{-1} R\right)\right],$$
$$a(\theta, t) = -(\gamma - 1)\left[\varphi r + (c_3 t^2/2 + c_4 t + c_5)/(R\varphi'_\theta \sin\theta)^{(\gamma-1)}\right],$$

где φ находится из уравнения

$$\begin{aligned}(16)\qquad & [(2\gamma - 1)\varphi^2 + (\gamma - 1)\varphi\varphi'_\theta \operatorname{ctg}\theta + \varphi'^2_\theta + (\gamma - 1)\varphi\varphi''_{\theta\theta}]\Phi + \\ & + [(2\gamma - 1)\varphi^2 + (\gamma - 1)\varphi\varphi'_\theta \operatorname{ctg}\theta + \varphi'^2_\theta + (\gamma - 1)\varphi\varphi''_{\theta\theta}]'_\theta \varphi'_\theta = 0.\end{aligned}$$

Для уравнения (16) можно указать два частных решения. Первое $\varphi = c_6 \cos(\theta + c_7)$. Второе находим из условия

$$(17)\qquad (2\gamma - 1)\varphi^2 + (\gamma - 1)\varphi\varphi'_\theta \operatorname{ctg}\theta + \varphi'^2_\theta + (\gamma - 1)\varphi\varphi''_{\theta\theta} = 0.$$

С помощью замены $\varphi = y^{(\gamma-1)/\gamma}$ (17) сводится к уравнению Лежандра. Для него получено общее решение [4], которое для φ запишется в виде

$$\varphi = \left[c_6 F\left(-\frac{\nu}{2}, \frac{1+\nu}{2}, \frac{1}{2}, \cos^2\theta\right) + \right.$$
$$\left. + c_7 \cos\theta \cdot F\left(\frac{1-\nu}{2}, 1 + \frac{\nu}{2}, \frac{3}{2}, \cos^2\theta\right)\right]^{\frac{\gamma-1}{\gamma}},$$

где $\nu = (3\gamma - 2)/2(\gamma - 1)$; F — гипергеометрическая функция.

Поступила 22 IX 1977

ЛИТЕРАТУРА

1. **Кочин Н. Е., Кибель И. А., Розе Н. В.** Теоретическая гидромеханика. Ч. 1. М., 1955.
2. **Булах Б. М.** Нелинейные конические течения газа. М., «Наука, 1970.
3. **Ферри А.** Аэродинамика сверхзвуковых течений. М.— Л., Гостехиздат, 1952.
4. **Камке Э.** Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М., «Наука», 1971.

УДК 533.6.011.5+532.582.3

ОБТЕКАНИЕ ЗАТУПЛЕННЫХ КОНУСОВ И СЕГМЕНТАЛЬНЫХ ТЕЛ

В. П. Карягин, А. Б. Лошаков, А. И. Швец

(*Москва*)

На основе результатов экспериментальных исследований выполнен анализ аэродинамических характеристик различных модификаций затупленных тел малого удлинения. Эксперименты проводили на аэродинамической установке в диапазоне чисел $M = 0{,}4$—3 при числах $\mathrm{Re} = 7\cdot10^5$—$3\cdot10^6$, рассчитанных по диаметру миделя моделей и параметрам набегающего потока. Испытывали модели сегментальных тел (фиг. 1, *а*, относительные радиусы $R/D = 1{,}46$ и $1{,}18$, где R — радиус сферы, D — диаметр донного среза; центральные углы равны соответственно 40 и 50°) и затупленных конусов (фиг. 1, *б*) с большими углами полураствора ($\theta = 60$ и $70°$) и степенью затупления $d/D = 0{,}25$ (где d — диаметр сферического затупления). Получены аэродинамические характеристики различных вариаций затупленных конусов: со скошенными основаниями (фиг. 1, *б*, $\theta = 60°$, $d/D = 0{,}25$, $\gamma = 5$ и $10°$; $\theta = 70°$, $d/D = 0{,}25$, $\gamma = 40', 1°, 1°30'$); с параллельно срезанными кромками (фиг. 1, *в*, $\theta = 60°$, $d/D = 0$, $d'/D = 0{,}96$; $0{,}93$; $0{,}87$, d' — расстояние между кромками); с цилиндрическими выточками на конической части (фиг. 1, *г*, радиус выточки равен радиусу донного среза), которые срезают кормовую часть двенадцатью гранями ($\theta = 77°$, $d/D = 0{,}25$).

В качестве параметров при вычислении аэродинамических коэффициентов брали максимальный диаметр миделева сечения модели и площадь миделева сечения. Суммарная среднеквадратичная погрешность измерений аэродинамических коэффициентов тангенциальной силы c_τ, нормальной силы c_n и момента тангажа m_z не превышала 6% для дозвуковых и 3% для сверхзвуковых скоростей.

Коэффициент сопротивления c_x затупленных тел малого удлинения по мере роста M сначала повышается при околозвуковой скорости, несколько снижается при малой сверхзвуковой скорости и достигает максимального значения при $M = 2$—3 (фиг. 1, *1* — сегментальное тело $R/D = 1{,}5$; *2* — затупленный конус $\theta = 60°$; *3* — затупленный конус с цилиндрическими выточками $\theta = 77°$; *4* (штриховая линия) — сегмент $R/D = 1$ [1]; *5* (штриховая линия) — конус $\theta = 60°$ [2]). Уменьшение относительного радиуса сегментального тела от $R/D = 1{,}46$ до $1{,}18$ приводит к понижению сопротивления на 5—7% во всем исследованном диапазоне чисел Маха. Влияние величины угла скоса донного среза γ на