УДК 539.3+624.131.522

# НАПРЯЖЕНИЯ В ВЕСОМОЙ ПОЛУПЛОСКОСТИ, СОДЕРЖАЩЕЙ ПОЛУКРУГЛУЮ ВЫЕМКУ

А. Д. Заикин

Новосибирский государственный университет, 630090 Новосибирск

Исследуется влияние рельефа поверхности на напряженное состояние горного массива. Для находящейся в поле силы тяжести упругой полуплоскости, содержащей выемку в форме полуокружности, построено распределение напряжений. Установлено, что в зависимости от коэффициента Пуассона дно выемки может находиться в состоянии как растяжения, так и сжатия. На оси симметрии приведена полиномиальная зависимость давления от глубины.

Напряженное состояние геологического разреза зависит от рельефа сейсмических границ [1]. Для анализа напряжений, обусловленных рельефом поверхности, рассмотрим полуплоскость, ослабленную выемкой в форме полуокружности.

**1.** В поле силы тяжести находится однородная упругая полуплоскость, граница которой имеет выемку в форме полукруга единичного радиуса. Уравнения равновесия имеют вид

$$\frac{\partial\sigma_{ik}}{\partial x_k} + \rho g_i = 0, \tag{1.1}$$

где $\rho$ — плотность; $g_i$ — компонента вектора ускорения свободного падения. Граничными условиями является отсутствие нагрузок на границе полуплоскости и контуре выемки.

Решение задачи для полуплоскости в отсутствие выемки записывается в виде

$$\sigma^0_{xx} = y\rho g\nu/(1-\nu), \qquad \sigma^0_{yy} = y\rho g, \qquad \sigma^0_{xy} = 0, \tag{1.2}$$

где $\nu$ — коэффициент Пуассона.

Общее решение (1.1) для полуплоскости с выемкой можно записать как сумму частного решения (1.2) и общего решения однородного уравнения равновесия $\sigma_{ij} = \sigma^0_{ij} + \sigma^1_{ij}$. Дополнительное поле напряжений $\sigma^1_{ij}$ должно компенсировать нагрузки $P_i = \sigma_{ij}n_j$, создаваемые частным решением (1.2) на контуре полуокружности.

Полагая, что ось $x$ совпадает с границей полуплоскости, а ось $y$ направлена вверх, на полуокружности проекции вектора нормали $n_x = -x$, $n_y = -y$ и, следовательно, $P^0_x = -yx\rho g\nu/(1-\nu)$, $P^0_y = -y^2\rho g$. На комплексной плоскости $x = (z+\bar z)/2$, $y = (z-\bar z)/(2i)$, тогда

$$P^0_x + iP^0_y = -\frac{i\rho g}{4}\Big(2 - \frac{1}{1-\nu}\,z^2 - \frac{1-2\nu}{1-\nu}\,\bar z^2\Big), \qquad |z| = 1, \qquad \operatorname{Im} z < 0.$$

Для нормальной и касательной составляющих вектора нагрузок, компенсирующего на контуре полуокружности частное решение (1.2), имеем $N - iT = (P^0_x - iP^0_y)z$. Для $\sigma^1_{ij}$ граничное условие на контуре полуокружности запишем в виде

$$N - iT = \frac{i\rho g}{4}\Big(2z - \frac{1}{1-\nu}\,\bar z - \frac{1-2\nu}{1-\nu}\,z^3\Big), \qquad |z| = 1, \qquad \operatorname{Im} z < 0. \tag{1.3}$$

Продолжим (1.3) в область $\operatorname{Im} z > 0$. Полученные нагрузки антисимметричны относительно оси $x$.

**2.** Рассмотрим неограниченную плоскость с вырезанной окружностью единичного радиуса, к контуру которой приложены нагрузки (1.3). Если (1.3) представить в виде комплексного ряда Фурье

$$N - iT = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} A_k \mathrm{e}^{ik\theta}, \tag{2.1}$$

то отличными от нуля будут только коэффициенты $A_1 = i\rho g/2$, $A_{-1} = -i\rho g/(4(1-\nu))$, $A_3 = -i\rho g(1-2\nu)/(4(1-\nu))$.

Пусть $\Phi(z)$ и $\Psi(z)$ — гомогенные вне окружности $|z| = 1$ функции, разложение которых в ряд Лорана имеет вид $\Phi(z) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k z^{-k}$, $\Psi(z) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} b_k z^{-k}$. Тогда согласно [2] коэффициенты $a_k$ и $b_k$ связаны с коэффициентами разложения (2.1) соотношениями

$$a_0 = \Gamma, \qquad a_1 = \bar{A}_1/(1+æ), \qquad a_2 = \bar{\Gamma}' + \bar{A}_2, \qquad a_n = \bar{A}_n,$$

$$b_0 = \Gamma', \quad b_1 = -æA_1/(1+æ), \quad b_2 = 2\Gamma - A_0, \quad b_n = (n-1)a_{n-2} - A_{-n+2}, \quad n \geqslant 3,$$

где в случае плоской деформации $æ = 3-4\nu$; $\Gamma$, $\Gamma'$ — заданные величины, характеризующие распределение напряжений на бесконечности.

В данном случае отличны от нуля только коэффициенты

$$a_1 = -\frac{i\rho g}{8(1-\nu)}, \quad a_3 = \frac{i\rho g(1-2\nu)}{4(1-\nu)}, \quad b_1 = -\frac{i\rho g(3-4\nu)}{8(1-\nu)}, \quad b_5 = \frac{i\rho g(1-2\nu)}{1-\nu}.$$

Тогда потенциалы можно записать в виде

$$\Phi(z) = -\frac{i\rho g}{8(1-\nu)}\Big(\frac{1}{z} - \frac{2(1-2\nu)}{z^3}\Big), \qquad \Psi(z) = -\frac{i\rho g}{8(1-\nu)}\Big(\frac{3-4\nu}{z} - \frac{8(1-2\nu)}{z^5}\Big).$$

Поскольку тензор напряжений определяется из соотношений

$$\sigma_{xx} + \sigma_{yy} = 4\mathrm{Re}\,\Phi(z), \qquad \sigma_{yy} - \sigma_{xx} + 2i\sigma_{xy} = 2(\bar{z}\Phi'(z) + \Psi(z)),$$

окончательно получаем

$$\begin{gathered}
\sigma^1_{yy} = \frac{\rho g}{8(1-\nu)}\Big(-(5-4\nu)\frac{\sin\varphi}{r} + \frac{\sin 3\varphi}{r} + 4(1-2\nu)\frac{\sin 3\varphi}{r^3} - 6(1-2\nu)\frac{\sin 5\varphi}{r^3} + 8(1-2\nu)\frac{\sin 5\varphi}{r^5}\Big),\\
\sigma^1_{xy} = \frac{\rho g}{8(1-\nu)}\Big(\frac{\cos 3\varphi}{r} - (3-4\nu)\frac{\cos\varphi}{r} - 6(1-2\nu)\frac{\cos 5\varphi}{r^3} + 8(1-2\nu)\frac{\cos 5\varphi}{r^5}\Big),\\
\sigma^1_{xx} = \frac{\rho g}{8(1-\nu)}\Big((1-4\nu)\frac{\sin\varphi}{r} - \frac{\sin 3\varphi}{r} + 4(1-2\nu)\frac{\sin 3\varphi}{r^3} + 6(1-2\nu)\frac{\sin 5\varphi}{r^3} - 8(1-2\nu)\frac{\sin 5\varphi}{r^5}\Big),
\end{gathered} \tag{2.2}$$

где $r = \sqrt{x^2+y^2}$; $\varphi$ — полярный угол. Для перехода от окружности единичного радиуса к окружности радиуса $R$ необходимо в (2.2) заменить $\rho g$ на $\rho g R$, а $r$ на $r/R$.

Нетрудно проверить, что полученное решение (2.2) совместно с (1.2) обеспечивает на контуре окружности нулевые нагрузки. На действительной оси имеем

$$\sigma^1_{xy} = -\frac{1-2\nu}{4(1-\nu)}\Big(\frac{1}{x} + \frac{3}{x^3} - \frac{4}{x^5}\Big)\rho g, \qquad \sigma^1_{xx} = \sigma^1_{yy} = 0. \tag{2.3}$$

Таким образом, решение (2.2) не удовлетворяет граничным условиям, налагаемым на дополнительное поле $\sigma^1_{ij}$ на действительной оси. Построим решение $\sigma^2_{ij}$, обеспечивающее на контуре окружности нулевые нагрузки, а на действительной оси — касательные нагрузки, компенсирующие (2.3).

**3.** Пусть в точке $z_1 = (x_1, 0)$ ($|z_1| > 1$), расположенной на действительной оси плоскости с вырезанной окружностью единичного радиуса, свободной от нагрузок, приложена сосредоточенная сила $(P_x, P_y)$.

Потенциалы сосредоточенной силы, приложенной в произвольной точке $z_1$ неограниченной плоскости, имеют вид

$$\varphi(z) = -P\ln(z - z_1), \qquad \psi(z) = æ\bar{P}\ln(z - z_1) + \bar{z}_1 P/(z - z_1), \tag{3.1}$$

где $P = (P_x + iP_y)/b$; $b = 2\pi(1 + æ)$. Если $X$, $Y$ — проекции нагрузок, приложенных к контуру $s$, то на контуре выполняется предельное соотношение [2]

$$\varphi(z) + z\overline{\varphi'(z)} + \overline{\psi(z)} = i\int\limits_0^z (X + iY)\,ds = f(z). \tag{3.2}$$

Подставляя потенциалы сосредоточенной силы (3.1) в (3.2), имеем

$$f(\sigma) = -P\Big(\ln(\sigma - x_1) - æ\ln\Big(\frac{1}{\sigma} - x_1\Big)\Big) + \bar{P}\Big(\frac{x_1\sigma}{1 - x_1\sigma} - \frac{\sigma^2}{1 - x_1\sigma}\Big), \qquad |\sigma| = 1. \tag{3.3}$$

Для того чтобы разгрузить контур окружности, приложим к нему нагрузки $-f(\sigma)$. Решение для неограниченной плоскости с вырезанной окружностью, к контуру которой приложена нагрузка, представим в форме [2]

$$\varphi(z) = -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\sigma|=1}\frac{f(\sigma)}{\sigma - z}\,d\sigma, \qquad \psi(z) = -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\sigma|=1}\frac{\overline{f(\sigma)}}{\sigma - z}\,d\sigma - \frac{\varphi'(z)}{z}. \tag{3.4}$$

Запишем сопряженное граничное условие в виде

$$\overline{f(\sigma)} = -\bar{P}\Big(\ln\Big(\frac{1}{\sigma} - x_1\Big) - æ\ln(\sigma - x_1)\Big) + P\Big(\frac{x_1}{\sigma - x_1} - \frac{1}{\sigma(\sigma - x_1)}\Big), \qquad |\sigma| = 1.$$

Подставим (3.3) и полученное выражение в (3.4). Интегралы из (3.4) вычисляются на основе теоремы и интегральной формулы Коши. После вычисления интегралов имеем

$$\begin{gathered}\varphi(z) = -Pæ\ln\Big(1 - \frac{1}{x_1 z}\Big) - \bar{P}\Big(\frac{1}{1 - x_1 z} - \frac{1}{x_1^2(1 - x_1 z)}\Big),\\ \psi(z) = \bar{P}\,\ln\Big(1 - \frac{1}{x_1 z}\Big) - P\,\frac{1}{x_1 z} - \frac{\varphi'(z)}{z}, \quad |z| > 1.\end{gathered} \tag{3.5}$$

Объединяя (3.1) и (3.5), получаем потенциалы, соответствующие сосредоточенной силе, приложенной в точке действительной оси плоскости с вырезанной окружностью, контур которой свободен от нагрузок:

$$\varphi(z) = W_1(z, x_1)P_x + iW_2(z, x_1)P_y, \qquad \psi(z) = W_3(z, x_1)P_x + iW_4(z, x_1)P_y, \tag{3.6}$$

где

$$bW_1(z, x_1) = -\ln(z - x_1) - æ\ln\Big(1 - \frac{1}{x_1 z}\Big) + \frac{1 - x_1^2}{x_1^2(1 - x_1 z)},$$

$$bW_2(z, x_1) = -\ln(z - x_1) - æ\ln\Big(1 - \frac{1}{x_1 z}\Big) - \frac{1 - x_1^2}{x_1^2(1 - x_1 z)},$$

$$bW_3(z, x_1) = æ\ln(z - x_1) + \frac{x_1}{z - x_1} + \ln\Big(1 - \frac{1}{x_1 z}\Big) - \frac{1 - x_1^2}{x_1 z(1 - x_1 z)^2} - \frac{æ}{z^2(1 - x_1 z)} - \frac{1}{x_1 z},$$

$$bW_4(z,x_1) = -æ\ln(z-x_1) + \frac{x_1}{z-x_1} - \ln\Big(1-\frac{1}{x_1 z}\Big) + \frac{1-x_1^2}{x_1 z(1-x_1 z)^2} - \frac{æ}{z^2(1-x_1 z)} - \frac{1}{x_1 z}.$$

На оси абсцисс потенциалам (3.6) наряду с сосредоточенной силой соответствует и распределенная нагрузка.

**4.** Пусть на границе $L$, состоящей из лучей $[-\infty,-1]$ и $[1,\infty]$, принадлежащих действительной оси, заданы непрерывные функции $p(t)$ и $\tau(t)$. Тогда потенциалам

$$\varphi(z) = \int\limits_L (W_1(z,t)\tau(t) + iW_2(z,t)p(t))\,dt, \qquad \psi(z) = \int\limits_L (W_3(z,t)\tau(t) + iW_4(z,t)p(t))\,dt,$$

гомогенным вне единичной окружности, соответствуют нулевые нагрузки на ее контуре. Из построенных потенциалов образуем функционал

$$\varphi(z) + z\overline{\varphi'(z)} + \overline{\psi(z)} = \int\limits_L (\Omega_1(z,t)\tau(t) + i\Omega_2(z,t)p(t))\,dt, \tag{4.1}$$

где

$$b\Omega_1(z,t) = -\ln(z-t) + æ\ln(\bar z - t) - æ\ln\Big(1-\frac{1}{tz}\Big) + \ln\Big(1-\frac{1}{t\bar z}\Big) - \frac{z-t}{\bar z - t} +$$
$$+\Big(z-\frac{1}{\bar z}\Big)\Big(\frac{1-t^2}{t(1-t\bar z)^2} + \frac{æ}{\bar z(1-t\bar z)}\Big) + \frac{1-t^2}{t^2(1-tz)} - \frac{1}{t\bar z},$$

$$b\Omega_2(z,t) = -\ln(z-t) + æ\ln(\bar z - t) - æ\ln\Big(1-\frac{1}{tz}\Big) + \ln\Big(1-\frac{1}{t\bar z}\Big) + \frac{z-t}{\bar z - t} +$$
$$+\Big(z-\frac{1}{\bar z}\Big)\Big(\frac{1-t^2}{t(1-t\bar z)^2} - \frac{æ}{\bar z(1-t\bar z)}\Big) - \frac{1-t^2}{t^2(1-tz)} + \frac{1}{t\bar z},$$

Продифференцируем (4.1) по $x$ на действительной оси. В силу (3.2) для левой части равенства (4.1) имеем

$$\frac{d}{dx}\,(\varphi(z) + z\overline{\varphi'(z)} + \overline{\psi(z)}) = iX - Y. \tag{4.2}$$

Значение подынтегрального выражения правой части (4.1) зависит от того, из какой полуплоскости осуществляется предельный переход на действительную ось. В выражении вида $\lim\limits_{y\to\pm 0}(d\Omega_k(z,t)/dx)$ многозначными являются члены, содержащие логарифмическую функцию, так как $\lim\limits_{y\to 0}(d\ln(x\pm iy - t)/dx) = 1/(x-t) \mp i\pi\delta(x-t)$. Верхний знак соответствует переходу из верхней полуплоскости.

Осуществив переход на действительную ось, получим

$$b\,\frac{d}{dx}\,\Omega_i(x,t) = \pm i\pi(1+æ)\delta(x-t) - \frac{1-æ}{x-t} + K_i(x,t), \tag{4.3}$$

где

$$K_1(x,t) = \frac{1}{1-tx}\Big(\frac{2æ}{x^3} - \frac{1-æ}{x}\Big) + \frac{1}{tx^2} + \frac{2(1-t^2)}{(1-tx)^3}\Big(x-\frac{1}{x}\Big) -$$
$$- \frac{1}{(1-tx)^2}\Big(2t - \frac{2}{t} - \frac{1}{tx^2} + \frac{t}{x^2} - æt + \frac{æt}{x^2}\Big),$$

$$K_2(x,t) = \frac{1}{1-tx}\Big(-\frac{2æ}{x^3} - \frac{1-æ}{x}\Big) - \frac{1}{tx^2} + \frac{2(1-t^2)}{(1-tx)^3}\Big(x-\frac{1}{x}\Big) + \frac{1}{(1-tx)^2}\Big(\frac{1}{tx^2} - \frac{t}{x^2} - æt + \frac{æt}{x^2}\Big).$$

Из (4.1)–(4.3) после разделения действительной и мнимой частей для функций $p(t)$ и $\tau(t)$ получаем сингулярные уравнения с ядрами типа Коши

$$\begin{gathered}\pm\pi(1+\varkappa)\tau(x)-(1-\varkappa)\int\limits_L\frac{p(t)}{x-t}\,dt+\int\limits_L K_2(x,t)p(t)\,dt=bX^{\pm},\\ \pm\pi(1+\varkappa)p(x)+(1-\varkappa)\int\limits_L\frac{\tau(t)}{x-t}\,dt-\int\limits_L K_1(x,t)\tau(t)\,dt=bY^{\pm}.\end{gathered}\qquad(4.4)$$

Таким образом, надлежащим выбором функций $p(t)$ и $\tau(t)$ можно удовлетворить заданным нагрузкам на $L$.

**5.** Если в (3.1) положить $\varkappa=1$, $b=2\pi$, то получим потенциалы сосредоточенной силы, приложенной к границе полуплоскости [2]. После такой подстановки потенциалы (3.6) можно рассматривать как потенциалы сосредоточенной силы, приложенной к границе полуплоскости, имеющей выемку в виде полуокружности, контур которой свободен от нагрузок. В этом случае (4.4) преобразуется к виду

$$\tau(x)-\int\limits_L K_2(x,t)p(t)\,dt=X,\qquad p(x)+\int\limits_L K_1(x,t)\tau(t)\,dt=Y,\qquad(5.1)$$

где

$$2\pi K_1(x,t)=\frac{2}{(1-tx)x^3}+\frac{1}{tx^2}+\frac{2(1-t^2)}{(1-tx)^3}\Big(x-\frac{1}{x}\Big)+\frac{1}{(1-tx)^2}\Big(-t+\frac{2}{t}+\frac{1}{tx^2}-\frac{2t}{x^2}\Big),$$

$$2\pi K_2(x,t)=-\frac{2}{(1-tx)x^3}-\frac{1}{tx^2}+\frac{2(1-t^2)}{(1-tx)^3}\Big(x-\frac{1}{x}\Big)+\frac{1}{(1-tx)^2}\Big(\frac{1}{tx^2}-t\Big).$$

Знак проекций нагрузок $X$, $Y$ изменен, поскольку при движении по действительной оси в положительном направлении область остается справа, а не слева. В отличие от (4.3) ядра $K_1(x,t)$ и $K_2(x,t)$ включают множитель $2\pi$.

Запишем ядра полученных уравнений в виде рядов по степеням $x$

$$2\pi K_1(x,t)=\sum_{k=2}^{\infty}S_k^1x^{-k},\qquad 2\pi K_2(x,t)=\sum_{k=2}^{\infty}S_k^2x^{-k},$$

где $S_2^1=2t^{-1}$, $S_3^1=4t^{-2}-2t^{-4}$, $S_k^1=(k-1)(k-2)(-t^{-1}+2t-t^3)t^{-k}$, $S_2^2=-2t^{-3}$, $S_3^2=4t^{-2}-6t^{-4}$, $S_k^2=(k-1)(-kt^{-1}+2(k-2)t-(k-4)t^3)t^{-k}$, $k\geqslant 4$.

С учетом структуры ядер и равенства

$$\int\limits_L t^{-n}\,dt=\begin{cases}2/(n-1), & n=0,2,4,\ldots,2k,\\ 0, & n=1,3,5,\ldots,2k+1,\end{cases}\quad L=[-\infty,-1]\cup[1,\infty]$$

можно показать, что если $X$ — нечетная, а $Y$ — четная функции относительно $x$, то $\tau(x)=-\tau(-x)$, $p(x)=p(-x)$. Плотности потенциалов будем искать в виде

$$\tau(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha_{2n+1}}{x^{2n+1}},\qquad p(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\beta_{2n}}{x^{2n}}.\qquad(5.2)$$

Тогда уравнения (5.1) можно переписать следующим образом:

$$X=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha_{2n+1}}{x^{2n+1}}-\frac{1}{2\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{x^{2k+1}}\sum_{m=0}^{\infty}\beta_{2m}\int\limits_L S_{2k+1}^2(t)t^{-2m}\,dt,\qquad(5.3)$$

$$Y = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\beta_{2n}}{x^{2n}} + \frac{1}{2\pi} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{x^{2k}} \sum_{m=0}^{\infty} \alpha_{2m+1} \int\limits_L S^1_{2k}(t) t^{-2m-1}\, dt.$$

Если $X_{2k+1}$, $Y_{2k}$ — коэффициенты разложения нагрузок в ряды, аналогичные (5.2), то, приравнивая в (5.3) слагаемые при одинаковых степенях $x$, получаем бесконечную систему линейных алгебраических уравнений относительно $\alpha_k$ и $\beta_k$

$$\begin{aligned} \alpha_{2k+1} - \sum_{m=1}^{\infty} \beta_{2m} B^{2k+1}_{2m} &= X_{2k+1}, \qquad k = 0,\, 1,\, 2, \dots, \infty, \\ \beta_{2k} + \sum_{m=0}^{\infty} \alpha_{2m+1} A^{2k}_{2m+1} &= Y_{2k}, \qquad k = 1,\, 2,\, 3, \dots, \infty, \end{aligned} \tag{5.4}$$

где

$$\pi A^2_{2m+1} = \frac{2}{2m+1}, \qquad B^1_{2m} = 0, \qquad \pi B^3_{2m} = \frac{4}{2m+1} - \frac{6}{2m+3},$$

$$\pi A^{2k}_{2m+1} = (2k-1)(2k-2)\Big( -\frac{1}{2m+2k+1} + \frac{2}{2m+2k-1} - \frac{1}{2m+2k-3} \Big),$$

$$\pi B^{2k+1}_{2m} = 2k\Big( -\frac{2k+1}{2m+2k+1} + \frac{2(2k-1)}{2m+2k-1} - \frac{2k-3}{2m+2k-3} \Big), \quad k \geqslant 2.$$

Для того чтобы компенсировать на $L$ напряжения (2.3), положим в правой части (5.4) отличными от нуля коэффициенты $X_1 = 1$, $X_3 = 3$, $X_5 = -4$. Тогда коэффициенты $\alpha_k$ и $\beta_k$ будут зависеть только от индекса $k$, а характеристики среды войдут в решение (5.2) в виде множителя $h = 0{,}25\rho g(1-2\nu)/(1-\nu)$.

Если в бесконечной системе (5.4) оставить только первые $M$ членов разложения (5.2), то ее решение, например методом Гаусса с выбором главного элемента, не вызывает затруднений. При $M \to \infty$ решение сходится, а начиная с пятого-шестого члена $\alpha_k$ и $\beta_k$ уменьшаются как $M^{-1}$.

**6.** Зная $\alpha_k$ и $\beta_k$, можно определить напряженное состояние в каждой точке полуплоскости. При этом удобнее перейти к потенциалам $\Phi(z) = \varphi'(z)$ и $\Psi(z) = \psi'(z)$:

$$\Phi(z) = \int\limits_L (U_1(z,t)\tau(t) + iU_2(z,t)p(t))\, dt, \quad \Psi(z) = \int\limits_L (U_3(z,t)\tau(t) + iU_4(z,t)p(t))\, dt, \tag{6.1}$$

где

$$2\pi U_1(z,t) = \frac{1}{t-z} + \frac{1}{z(1-zt)} + \frac{1-t^2}{t(1-zt)^2}, \qquad 2\pi U_2(z,t) = \frac{1}{t-z} + \frac{1}{z(1-zt)} - \frac{1-t^2}{t(1-zt)^2},$$

$$2\pi U_3(z,t) = -\frac{1}{t-z} - \frac{t}{(z-t)^2} - \frac{1}{z(1-zt)} + \\ + \frac{2}{z^3(1-tz)} + \frac{1-t^2}{tz^2(1-tz)^2} - \frac{t}{z^2(1-tz)^2} - \frac{2(1-t^2)}{z(1-tz)^3} + \frac{1}{tz^2},$$

$$2\pi U_4(z,t) = \frac{1}{t-z} - \frac{t}{(z-t)^2} + \frac{1}{z(1-zt)} + \frac{2}{z^3(1-tz)} - \frac{1}{tz^2(1-tz)^2} + \frac{2(1-t^2)}{z(1-tz)^3} + \frac{1}{tz^2}.$$

Определим следующие интегралы [3]:

$$I_{2n+1} = \int\limits_L \frac{dt}{t^{2n+1}(t-z)} = \frac{1}{z^{2n+1}}\Big( \ln\Big(\frac{z+1}{z-1}\Big) - i\pi\Big) - \sum_{k=1}^{n} \frac{2}{(2n-2k+1)z^{2k}},$$

$$I_{2n} = \int\limits_L \frac{dt}{t^{2n}(t-z)} = \frac{1}{z^{2n}}\Big(\ln\Big(\frac{z+1}{z-1}\Big) - i\pi\Big) - \sum_{k=1}^{n} \frac{2}{(2n-2k+1)z^{2k-1}},$$

$$J_{2n+1} = \int\limits_L \frac{dt}{t^{2n+1}(1-zt)} = -z^{2n}\ln\Big(\frac{z+1}{z-1}\Big) + \sum_{k=1}^{n} \frac{2z^{2k-1}}{2n-2k+1},$$

$$J_{2n} = \int\limits_L \frac{dt}{t^{2n}(1-zt)} = -z^{2n-1}\ln\Big(\frac{z+1}{z-1}\Big) + \sum_{k=1}^{n} \frac{2z^{2k-2}}{2n-2k+1}, \qquad n = 0,\, 1,\, 2,\, \ldots, \infty,$$

$$R_0 = 2/(z^2-1), \quad Q_0 = -2/(z^2-1), \quad H_0 = -2/(z^2-1)^2, \quad H_{-1} = -2z/(z^2-1)^2,$$

$$R_n = \int\limits_L \frac{dt}{t^n(1-zt)^2} = nz^{n-1}\Big(\frac{2z}{z^2-1} - \ln\Big(\frac{z+1}{z-1}\Big)\Big) - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{nz^{k-1}}{(n-k)(n-k+1)}\Big(\frac{(-1)^{n-k}}{1+z} - \frac{1}{1-z}\Big), \tag{6.2}$$

$$Q_n = \int\limits_L \frac{dt}{t^n(z-t)^2} = -\frac{n}{z^n}\Big(\frac{2}{z^2-1} + \frac{1}{z}\Big(\ln\Big(\frac{z+1}{z-1}\Big) - i\pi\Big)\Big) - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{n}{(n-k)(n-k+1)z^k}\Big(\frac{(-1)^{n-k}}{z+1} - \frac{1}{z-1}\Big),$$

$$H_n = \int\limits_L \frac{dt}{t^n(1-zt)^3} = \frac{n(n+1)z^{n-1}}{2}\Big(\frac{2z(z^2-2)}{(z^2-1)^2} - \ln\Big(\frac{z+1}{z-1}\Big)\Big) - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{n(n+1)(n-k)^{-1}z^{k-1}}{(n-k+1)(n-k+2)}\Big(\frac{(-1)^{n-k}}{(1+z)^2} - \frac{1}{(1-z)^2}\Big), \quad n = 1,\, 2, \ldots, \infty.$$

В выражениях для $J_n$, $R_n$, $H_n$ содержатся разности степенных функций $z^n$. Для больших $z$ и $n$ расчеты при конечнозначной арифметике становятся невозможными вследствие стремительно растущих погрешностей. Поэтому для $z > 1$ применим другие выражения, полученные из (6.2) разложением в ряды:

$$J_{2n+1} = -2\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{-2k-1}}{2n+2k+1}, \qquad J_{2n} = -2\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{-2k-2}}{2n+2k+1},$$

$$R_{2n+1} = 2\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2k+2)z^{-2k-3}}{2n+2k+3}, \qquad R_{2n} = 2\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2k+1)z^{-2k-2}}{2n+2k+1},$$

$$H_{2n+1} = -\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2k+1)(2k+2)z^{-2k-3}}{2n+2k+3}, \qquad H_{2n} = -\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2k+2)(2k+3)z^{-2k-4}}{2n+2k+3}.$$

Подставляя (5.2) в (6.1) и учитывая (6.2), получаем искомые потенциалы

$$\frac{2\pi}{h}\,\Phi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_{2n+1}\Big(I_{2n+1} + \frac{J_{2n+1}}{z} + R_{2n+2} - R_{2n}\Big) + i\sum_{n=1}^{\infty} \beta_{2n}\Big(I_{2n} + \frac{J_{2n}}{z} - R_{2n+1} + R_{2n-1}\Big),$$

$$\frac{2\pi}{h}\,\Psi(z) = i\sum_{n=1}^{\infty}\beta_{2n}\Big(I_{2n} - Q_{2n-1} + \Big(\frac{1}{z} + \frac{2}{z^3}\Big)J_{2n} - \frac{R_{2n+1}}{z^2} + \frac{2}{z}\,(H_{2n} - H_{2n-2})\Big) + \qquad (6.3)$$

$$+\sum_{n=0}\alpha_{2n+1}\Big(-I_{2n+1} - Q_{2n} - \Big(\frac{1}{z} - \frac{2}{z^3}\Big)J_{2n+1} + \frac{1}{z^2}\,(R_{2n+2} - 2R_{2n}) - \frac{2}{z}\,(H_{2n+1} - H_{2n-1}) + \frac{2}{z^2(2n+1)}\Big).$$

Таким образом, напряжения в упругой полуплоскости с выемкой в форме полукруга, находящейся в поле силы тяжести, есть сумма напряжений (1.2), (2.2) и (6.3). Из симметрии задачи следует, что $\sigma_{xx}$ и $\sigma_{yy}$ — четные функции относительно $x$, а $\sigma_{xy}$ — нечетная.

**7.** Полные напряжения представим в виде $\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^0 + \sigma_{ij}^1 + \sigma_{ij}^2$, где $\sigma_{ij}^2$ — напряжения, вычисленные по (6.3). Расчеты проводились для выемки с радиусом $R$; координаты отнесены к радиусу, а напряжения — к $\rho g R$.

На рис. 1 приведены напряжения $\sigma_{xx}^2$ (кривая *1*) и $\sigma_{xy}^1$ (кривая *2*) на границе $y = 0$. Напряжения отнесены к $2h$ (здесь $2h = 0{,}5\rho g R(1-2\nu)/(1-\nu)$) и не зависят от характеристик среды. В силу граничных условий напряжения $\sigma_{yy}^2$ равны нулю, а $\sigma_{xy}^2(x,0) = -\sigma_{xy}^1(x,0)$. С учетом (1.2) и (2.2) получаем, что кривая *1* (рис. 1) соответствует единственной отличной от нуля на этой границе компоненте тензора полных напряжений.

Погрешность вычислений по (6.3) связана в основном с тем, что при решении бесконечной системы (5.4) приходится ограничиваться конечным числом неизвестных. Однако заметной эта погрешность становится лишь в окрестности угловых точек $(\pm R, 0)$.

При расчетах в системе (5.4) удерживалось 200 членов. Начиная с $M = 25$ распределения напряжений фактически не зависят от числа удерживаемых членов, за исключением компоненты $\sigma_{xx}^2$ в интервале $-1{,}32R \leqslant x \leqslant -R$. При увеличении размерности системы решение медленно сходится к значению $\sigma_{xx}^2(-R,0) = 0$, которое следует из граничных условий на полуокружности. В указанном интервале проведена полиномиальная интерполяция.

Материал вблизи границы находится в состоянии сжатия, поскольку $\sigma_{kk} < 0$. При $x \approx -1{,}74R$ сжатие достигает максимальных значений $\sigma_{xx} \approx -0{,}2\rho g R(1-2\nu)/(1-\nu)$. Если $x \to \infty$, то $\sigma_{xx} \sim -(R/x)^2$.

В построенном решении $\sigma_{ij}^2$, сумма $\sigma_{ij}^0$ и $\sigma_{ij}^1$ на контуре полуокружности дают нулевые нагрузки, а значит, в полярной системе координат отличной от нуля будет только компонента тензора напряжений $\sigma_{\varphi\varphi}$, зависимость которой от полярного угла $\varphi$ приведена на рис. 2 (кривая *1* — $\sigma_{\varphi\varphi}^2$, кривая *2* — $\sigma_{\varphi\varphi}^0 + \sigma_{\varphi\varphi}^1$, кривая *3* — сумма напряжений (1.2), (2.2) и (6.3)).

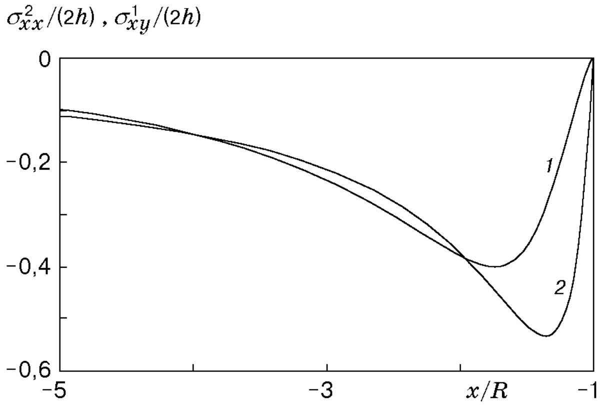


Рис. 1

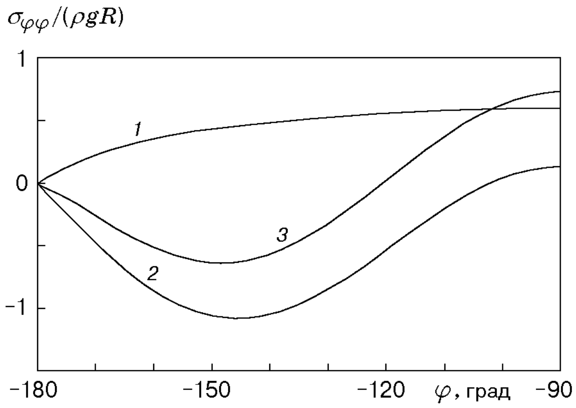


Рис. 2

В расчетах коэффициент Пуассона полагался равным 0,2. При отклонении $\pm 30^\circ$ от вертикали контур выемки находится в состоянии растяжения, остальные участки контура — в состоянии сжатия.

На дне выемки в точке $(0, -R)$ решение (6.3) дает единственную отличную от нуля компоненту тензора напряжений $\sigma^2_{xx}/(2h) = 1{,}59$. Для полного тензора напряжений (суммы (1.2), (2.2) и (6.3)) можно записать

$$\sigma_{xx} = 0{,}5\rho gR((1 - 4\nu) + 1{,}59(1 - 2\nu))/(1 - \nu), \qquad \sigma_{yy} = \sigma_{xy} = 0.$$

Концентрация напряжений в данной точке достигает значительной величины и определяется коэффициентом Пуассона. Дно выемки может быть в состоянии как растяжения ($\sigma_{xx} = 1{,}04\rho gR$ при $\nu = 0{,}1$), так и сжатия ($\sigma_{xx} = -0{,}235\rho gR$ при $\nu = 0{,}4$). Смена типов напряжений происходит при $\nu = 0{,}361$.

Среднее нормальное напряжение имеет вид $P = -(\sigma_{xx} + \sigma_{yy})/2$. Применяя полиномиальную аппроксимацию к результатам расчета по (6.3) и учитывая вклад напряжений (1.2) и (2.2), средние нормальные напряжения на прямой $x = 0$ представим в виде

$$P(\xi) = -\frac{\rho gR}{2(1-\nu)}\Big(\xi - \frac{1}{2\xi} - \frac{1-2\nu}{\xi^3} - (1-2\nu)\Big(\frac{0{,}494}{\xi} - \frac{1{,}301}{\xi^2} - \frac{2{,}239}{\xi^3} - \frac{2{,}133}{\xi^4} - \frac{1{,}194}{\xi^5} - \frac{0{,}3}{\xi^6}\Big)\Big),$$

где $\xi = y/R$. При $\nu < 0{,}361$ в окрестности дна выемки возникает зона растягивающих напряжений, в которой $P < 0$. Глубина этой зоны довольно существенна, при $\nu = 0{,}1$ она достигает значения $-1{,}275R$, а при $\nu = 0{,}25$ — значения $-1{,}135R$.

Напряжение (1.2) возрастает по линейному закону с увеличением глубины. На (1.2) накладывается дополнительное поле напряжений $(\sigma^1_{ij} + \sigma^2_{ij})$, убывающее по мере удаления от выемки не медленнее, чем $r^{-1}$. На рис. 3,*а*–*в* приведены изолинии дополнительного поля напряжений $\sigma_{xx}$, $\sigma_{yy}$, $\sigma_{xy}$. Вычисления проводились при $\nu = 0{,}2$. Как и ранее, напряжения отнесены к $\rho gR$.

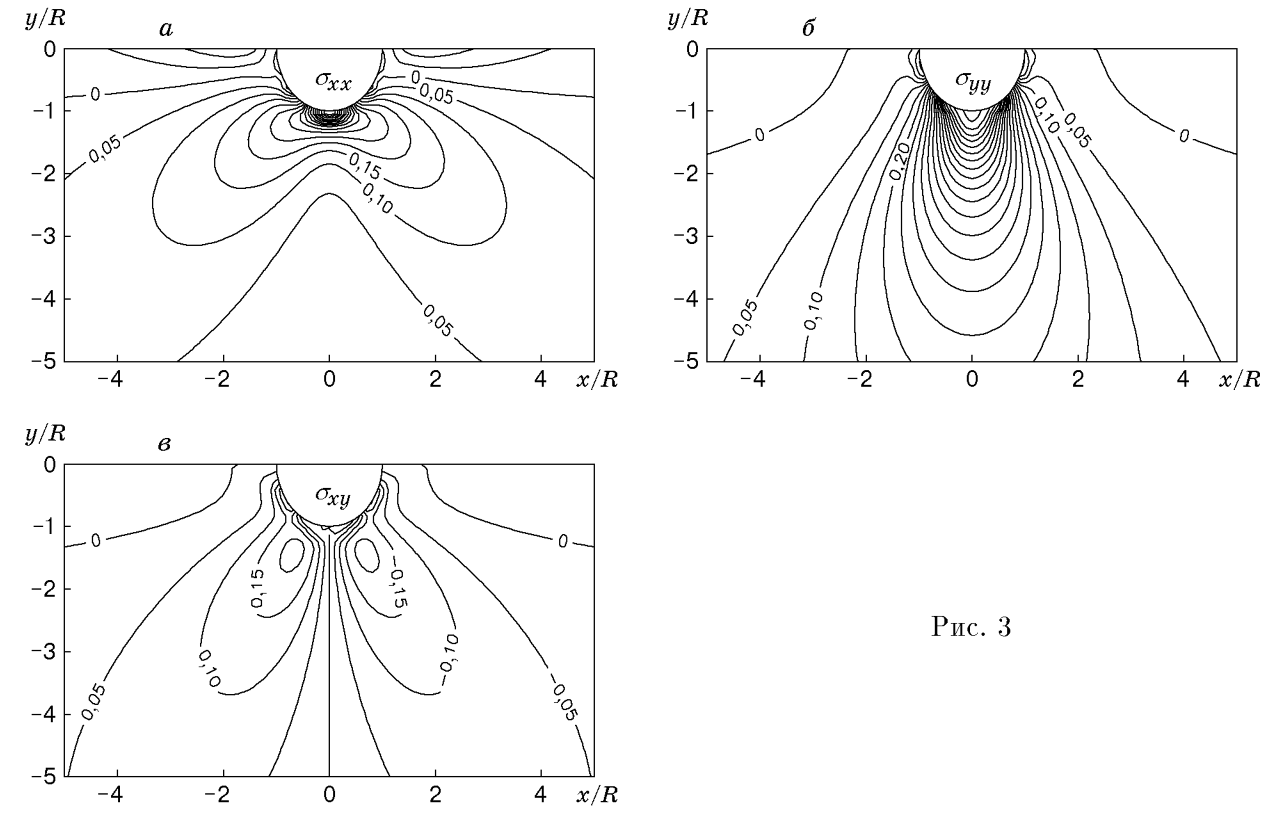


Рис. 3

В узких зонах, примыкающих к границе $y = 0$, осуществляется сжатие в горизонтальном направлении ($\sigma^1_{xx}+\sigma^2_{xx} < 0$), в остальной полуплоскости — растяжение ($\sigma^1_{xx}+\sigma^2_{xx} > 0$) (рис. 3,*а*). Влияние выемки быстро уменьшается при удалении от нее. Максимальные значения напряжения $\sigma_{xx}$ достигаются на дне выемки и на лучах, расположенных под углами $\pi/4$ и $-\pi/4$ к осям координат.

Под выемкой происходит локализация напряжений $\sigma_{yy}$ дополнительного поля (рис. 3,*б*) и вследствие этого растяжение материала в вертикальном направлении ($\sigma^1_{yy} + \sigma^2_{yy} > 0$). Максимальное значение $\sigma_{yy}$, достигаемое на дне выемки, в соответствии с граничными условиями равно $\rho g R$.

Лепестки изолиний напряжений $\sigma_{xy}$ дополнительного поля вытянуты под углами $\pi/3$ и $-\pi/3$ (рис. 3,*в*). Максимальное значение $\sigma_{xy} = 0{,}28\rho g R$ достигается не на контуре выемки, а в точках с координатами ($\pm 0{,}7R$; $-1{,}46R$).

Таким образом, выемка является концентратором напряжений. Влияние выемки на напряженное состояние горных пород локально, на глубине $5R$ вклад в средние нормальные напряжения составляет 3,3 %, что, например, при $\rho = 2{,}55$ г/см$^3$ и $R = 200$ м равно 5 МПа. Такие градиенты могут стать причиной перераспределения флюидов, насыщающих продуктивные пласты, создавая для них своего рода потенциальные ловушки.

## ЛИТЕРАТУРА

1. **Сибиряков Б. П., Заикин А. Д.** Многоволновая сейсморазведка и прикладная геодинамика в нефтегазоносных областях // Геология и геофизика. 1994. № 5. С. 49–55.
2. **Мусхелишвили Н. И.** Некоторые основные задачи математической теории упругости. М.: Наука, 1966.
3. **Градштейн И. С., Рыжик И. М.** Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Наука, 1971.

*Поступила в редакцию 16/IV 1998 г.,*
*в окончательном варианте — 23/IX 1998 г.*