прочность материала не оказывает стабилизирующего влияния на развитие возмущений, которые хотя и имеют в начальной стадии движения оболочки ту же форму, что и у стальной оболочки, но из-за превалирующего влияния инерционных сил трансформируются в струи. Отметим, что результаты численных расчетов [4], несмотря на другой вид детерминированных возмущений, качественно не противоречат полученным экспериментальным данным по влиянию прочности материала оболочки на поведение возмущений у ВГО при ее схождении к центру симметрии.

Таким образом, установлено, что при разгоне сравнительно тонких многослойных цилиндрических оболочек с помощью энергии взрыва при наличии детерминированных возмущений на внутренней границе нижней сходящейся оболочки поведение последних не описывается упрощенной линейной теорией. В частности, отсутствует колебательный характер развития возмущений. Сдвиговая прочность материала оболочки оказывает существенное стабилизирующее действие на развитие возмущений. Полученные результаты могут быть использованы для отработки двумерных программ численного счета рассмотренного типа движения.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Дерентович Г.** Сильное сжатие вещества при помощи кумуляции энергии взрывчатого вещества // ПМТФ.— 1989.— № 1.
2. **Огородников В. А., Иванов А. Г.** Особенности откольного разрушения пластин при синхронном инициировании заряда ВВ в нескольких точках // ФГВ.— 1984.— № 3.
3. **Овсянников Л. В.** Общие уравнения и примеры // Задача о неустановившемся движении жидкости со свободной границей.— Новосибирск: Наука, 1967.
4. **Elliott L. A.** Calculation of the growth of interface instabilities by a lagrangian mesh method // 4th Symp. (Intern.) on detonation, White Oak, USA, Oct. 1965: Proc.— Wash., 1967.
5. **Борисевич В. К., Сабелькин В. П., Солодянкин С. Н. и др.** Динамические характеристики некоторых металлов и сплавов // Импульсная обработка металлов давлением: Сб. ст./Харьк. авиац. ин-т.— 1981.— Вып. 9.
6. **Malatynski M., Klepaczko J.** Experimental investigation of plastic properties of lead over a wide range of strain rates // Intern. J. Mech. Sci.— 1980.— V. 22, N 3.

г. Арзамас *Поступила 18/VI 1991 г., в окончательном варианте — 16/VIII 1991 г.*

УДК 539.3 : 534.1

В. В. Новиков, Ш. М. Хасанов

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ НЕЛИНЕЙНЫХ ИЗГИБНЫХ ВОЛН В ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧКАХ

В слабонелинейной постановке задачи уравнения цилиндрической оболочки [1] для осесимметричного случая приводятся к уравнениям в нормальных переменных, с помощью которых выводится нелинейное уравнение Шредингера для изгибных волн, на его основе рассматривается вопрос о модуляционной неустойчивости волн. Определена область значений волновых чисел, в которой стационарная структура нелинейной волны может быть разрушена за счет эффектов распадной неустойчивости.

Нелинейные уравнения (при учете только геометрической нелинейности) цилиндрической оболочки для осесимметричного случая в предположении, что длина волны много больше толщины оболочки, имеют вид

$$(1)\qquad c^{-2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\mu k_0\frac{\partial w}{\partial x}=\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2;$$

(2) $$c^{-2}\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + k_0^2 w + h^2\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} - \mu k_0\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{2}\mu k_0\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + $$
$$+\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial w}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x} - \mu k_0 w\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^3\right].$$

Здесь $u(x,\ t)$, $w(x,\ t)$ — продольные и радиальные смещения срединной поверхности от недеформированного состояния; $c^{-2} = \rho(1 - \mu^2)E^{-1}$; ρ — плотность; μ — коэффициент Пуассона; E — модуль Юнга; $k_0 = R^{-1}$; $h^2 = h_1^2/12$; R и h_1 — радиус и толщина оболочки.

Следуя [2], введем нормальные переменные. Для этого сделаем замену $\partial/\partial t \to p$ и выполним преобразование Фурье

$$\begin{pmatrix} u_k \\ w_k \end{pmatrix} = \frac{1}{2\pi}\int\begin{pmatrix} u \\ w \end{pmatrix}\exp(-ikx)\,dx.$$

Тогда система (1), (2) примет операторный вид

(3) $$(p^2 + c^2k^2)u_k + i\mu c^2k_0kw_k = c^2f_{1k};$$

(4) $$-i\mu c^2k_0ku_k + \left(p^2 + c^2\varkappa_k^2\right)w_k = c^2f_{2k},$$

где $f_{1,2k}$ — фурье-образы правых частей уравнений (1), (2) соответственно; $\varkappa_k^2 = k_0^2 + h^2k^4$.

Из системы (3), (4) получаем выражения

(5) $$u_k = \frac{\Delta_u(p)}{\Delta(p)},\quad w_k = \frac{\Delta_w(p)}{\Delta(p)}.$$

Здесь

$$\Delta_u = c^2\left[\left(p^2 + c^2\varkappa_k^2\right)f_{1k} - i\mu c^2k_0kf_{2k}\right];$$

$$\Delta_w = c^2\left[i\mu c^2k_0kf_{1k} + (p^2 + c^2k^2)f_{2k}\right];\quad \Delta = \left(p^2 + \Omega_1^2(k)\right)\left(p^2 + \Omega_2^2(k)\right),$$

где

(6) $$\Omega_{1,2}^2(k) = \frac{c^2}{2}\left(k^2 + \varkappa_k^2 \pm r_k\right)\left(r_k = \sqrt{\left(k^2 - \varkappa_k^2\right)^2 + 4\mu^2k_0^2k^2}\right)$$

представляют собой дисперсионные соотношения соответственно для продольных и изгибных волн. Качественное поведение дисперсионных кривых $\Omega_{1,2}(k)$ показано на рисунке.

Нормальные переменные вводятся путем разложения правых частей выражений (5) на простейшие дроби:

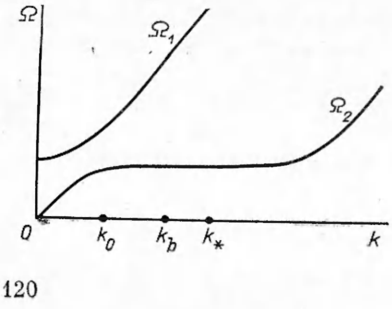
$$u_k = \sum_s\left(d_k^s - i\beta_kb_k^s\right),\quad w_k = \sum_s\left(i\alpha_kd_k^s + b_k^s\right).$$

Здесь индекс s принимает значения $+$ и $-$;

(7) $$d_k^s = \frac{\Delta_u(-is\Omega_1)}{\Delta'(-is\Omega_1)(p + is\Omega_1)};$$

(8) $$b_k^s = \frac{\Delta_w(-is\Omega_2)}{\Delta'(-is\Omega_2)(p + is\Omega_2)},\quad \Delta' \equiv \frac{d\Delta}{dp}.$$

Нормальным переменным d_k^s и b_k^s отвечают продольная и изгибная моды колебаний. Коэффициенты



$$\alpha_k = \frac{\mu c^2k_0k}{c^2\varkappa_k^2 - \Omega_1^2(k)},\quad \beta_k = \frac{c^2\varkappa_k^2 - \Omega_2^2(k)}{\mu c^2k_0k}$$

характеризуют соответственно вклады продольной моды в радиальные смещения и изгибной моды в продольные смещения. Отметим, что при переходе от оболочки к пластине ($k_0 \to 0$) α_k, $\beta_k \to 0$.

Нормальные переменные, согласно (7), (8), подчиняются уравнениям

$$\dot{d}_k^s + is\Omega_1(k)\,d_k^s = \frac{\Delta_u(-is\Omega_1)}{\Delta'(-is\Omega_1)}, \quad \dot{b}_k^s + is\Omega_2(k)\,b_k^s = \frac{\Delta_w(-is\Omega_2)}{\Delta'(-is\Omega_2)}.$$

В дальнейшем рассматриваются лишь процессы нелинейного самовоздействия изгибных волн ($d_k^s \equiv 0$), уравнение для которых с учетом правой части лишь кубичных членов, обеспечивающих резонансный вклад, примет вид

$$(9) \qquad \dot{b}_k + i\omega_k b_k = i\int \{V_{kk_1k_2} b_{k_1} b_{k_2} d\lambda_{kk_1k_2} + 2V_{kk_1-k_2} b_{k_1}\bar{b}_{k_2} d\lambda_{kk_1-k_2} +$$

$$+ V_{k-k_1-k_2}\bar{b}_{k_1}\bar{b}_{k_2} d\lambda_{k-k_1-k_2}\} + 3i\int T_{kk_1k_2-k_3} b_{k_1} b_{k_2}\bar{b}_{k_3} d\lambda_{kk_1k_2-k_3},$$

где $b_k \equiv b_k^+$; $\omega_k \equiv \omega(k) \equiv \Omega_2(k)$; $d\lambda_{kk_1k_2} = \delta(k - k_1 - k_2)\,dk_1dk_2$; $d\lambda_{kk_1k_2k_3} = \delta(k - k_1 - k_2 - k_3)\,dk_1dk_2dk_3$ и учтено равенство $b_{-k}^- = \bar{b}_k^+$, вытекающее из условия вещественности $w_{-k} = \bar{w}_k$.

Вычисления приводят к следующим выражениям для коэффициентов нелинейного взаимодействия:

$$V_{kk_1k_2} = \frac{1}{4\omega_k r_k}\{\mu c^2 k_0 k^2 k_1 k_2 + (c^2k^2 - \omega_k^2)[\mu k_0(k^2 - k_1k_2) -$$

$$- kk_1k_2(\beta_{k_1} + \beta_{k_2})]\}, \quad T_{kk_1k_2k_3} = \frac{1}{4\omega_k r_k}(c^2k^2 - \omega_k^2)\,kk_1k_2k_3.$$

Уравнение (9) для спектрально-узкого пакета с основным волновым числом q с помощью процедуры [3] можно привести к нелинейному уравнению Шредингера (в системе отсчета, движущейся с групповой скоростью) для огибающей волнового пакета $\psi(x, t)$:

$$i\frac{\partial\psi}{\partial t} + \frac{1}{2}\nu\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \sigma|\psi|^2\psi = 0.$$

Здесь $\nu(q) = \dfrac{d^2\omega(q)}{dk^2}$; $\sigma(q) = 4\dfrac{\omega_{2q}V_{q-q2q}V_{2qqq}}{\omega_{2q}^2 - 4\omega_q^2} + 3T_{qqq-q} + \delta_q$; $\delta_q = (1-\mu^2)\times$ $\times\dfrac{v_0^2(c^2q^2 - \omega_q^2)\,q^4}{2\omega_q r_q(v_0^2 - v_q^2)}$; $v_0 = \dfrac{d\omega(0)}{dk}$; $v_q = \dfrac{d\omega(q)}{dk}$.

Известно [4], что волновой пакет неустойчив и возможно образование солитонов огибающей при $\nu\sigma > 0$. В общем случае выражения для ν и σ достаточно сложны. Однако в двух частных случаях ($q^2 \ll k_0^2$ (длинные волны) и $q^2 \gg k_0^2$ (короткие)) можно провести аналитическое исследование.

Для длинных волн пакет неустойчив, так как

$$\omega_q = c\sqrt{1-\mu^2}\,q\left(1 - \frac{1}{2}\mu^2q^2/k_0^2\right), \quad \nu(q) < 0, \quad \sigma(q) = -\sqrt{1-\mu^2}\,cq^3/24 < 0.$$

Для коротких волн с учетом предположения $h^2q^2 \ll 1$, которое необходимо для правомерности уравнений (1), (2), имеют место соотношения

$$(10) \qquad \omega_q^2 = c^2D_q^2, \quad D_q^2 = (1-\mu^2)\,k_0^2 + h^2q^4, \quad \nu(q) > 0,$$

$$\sigma(q) = \frac{c^2q^2}{4\omega_q r_q}\left\{\frac{\mu^2k_0^2(D_{2q}^2 - 16D_q^2)^2}{16(D_{2q}^2 - 4D_q^2)} - (1 + 2\mu^2)\,q^4\right\}.$$

Здесь коэффициент $\sigma(q)$ отрицателен, за исключением достаточно узкой области (k_*, q_0), где $k_*^2 = \frac{1}{2}\sqrt{1-\mu^2}\,k_0h^{-1}$, $q_0 = k_*[1 + 4\mu^2k_0^2h^2/(1 + 2\mu^2)]$. При $q \to k_* - 0$ $\sigma \to -\infty$, при $q \to k_* + 0$ $\sigma \to +\infty$, а в точке $q = q_0$ $\sigma(q_0) = 0$. Малая окрестность точки k_* ($|q - k_*| < a$, где $a < q_0 - k_*$), внутри которой нарушается условие слабонелинейной постановки задачи, должна быть исключена из рассмотрения. Особенность в точке $q = k_*$ обусловлена синхронизмом между основной и удвоенной гармониками: $\omega(2k_*) - 2\omega(k_*) = 0$. Можно показать, что корень этого уравнения, вычисленный с помощью точного выражения (6), лежит именно в коротковолновой области волновых чисел. Таким образом, стационарная структура коротких волн будет нарушаться в области $|q - k_*| < a$ вследствие взаимодействия со вторичной волной, а в диапазоне $k_* + a < q < q_0$ — за счет эффектов модуляционной неустойчивости.

Численный счет коэффициентов ν и σ при $R/h = 1600$ ($R/h_1 = 462$), $\mu = 0{,}3$ подтверждает результаты аналитического исследования для длинных и коротких волн.

Для изучения устойчивости в промежуточной области волновых чисел ($q \sim k_0$) проводился численный счет коэффициентов ν и σ при тех же значениях R/h и μ. Показано, что $\sigma(q) < 0$, а $\nu(q) < 0$ при $q < k_b$ и $\nu(q) > 0$ при $q > k_b$, где $k_b \approx 7k_0$ — точка перегиба дисперсионной кривой $\Omega_2(k)$ (см. рисунок). Значит, в этом диапазоне волновой пакет неустойчив при $q < k_b$.

Исследование устойчивости волнового пакета требует также учета возможности нелинейных трехволновых взаимодействий. При возбуждении в цилиндрической оболочке пакета изгибных волн с частотой $\omega(q)$ последний будет неустойчив к процессам взаимодействия с парой волн (с частотами $\omega_1(q_1)$, $\omega_2(q_2)$, каждая из которых может относиться как к изгибной, так и к продольной модам), если в соответствии с дисперсионными соотношениями (6) выполняются условия синхронизма

$$\omega(q) = \omega_1(q_1) + \omega_2(q_2); \tag{11}$$

$$q = q_1 + q_2. \tag{12}$$

В этом случае имеет место распадная неустойчивость [5]. Из анализа дисперсионных кривых (6) вытекает, что выполнение условий (11), (12) возможно при $q > 2k_*$. В частности, при $k_0 < q_1 < k_*$ (пусть $q_1 \leqslant q_2$) для изгибной ветви ($\omega_1(q) \equiv \Omega_2(q)$, при этом также $\omega_2(q) \equiv \Omega_2(q)$) можно считать $\omega_1(q_1) \approx \omega_0 = c^2(1 - \mu^2) k_0^2$. Тогда из (11), (12), используя (10), находим $\omega_2 = \omega - \omega_0$, $q_2 = (\omega^2 - 2\omega\omega_0)^{1/4}(ch)^{-1/2}$, $q_1 = q - q_2$. Если для этой же области значений q_1 взять $q < 2k_*$, учитывая, что $\omega(q) < \omega(2k_*) \approx 2\omega_0$, то получим $\omega_1 + \omega_2 > \omega$. Для значений $q_1 < k_0$ таких, что $\omega_1(q_1) < \omega_0$, выполнение (11), (12) возможно лишь при $q \gg k_*$. Аналогичная ситуация возникает и в том случае, если в качестве первой волны выбирается продольная мода ($\omega_1(q) \equiv \Omega_1(q)$).

В заключение, суммируя полученные результаты, можно сделать вывод, что пакет изгибных волн в цилиндрической оболочке неустойчив в следующих областях волновых чисел: $0 < q < k_b$, $k_* - a < q < q_0$, $q > 2k_*$.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Вольмир А. С.** Нелинейная динамика пластин и оболочек.— М.: Наука, 1972.
2. **Иостников Л. В.** К вопросу отыскания и исследования квазигармонических колебаний в слабонелинейных системах // Изв. вузов. Радиофизика.— 1971.— Т. 14, № 11.
3. **Захаров В. Е.** Устойчивость периодических волн конечной амплитуды на поверхности глубокой жидкости // ПМТФ.— 1968.— № 2.
4. **Заславский Г. М., Сагдеев Р. З.** Введение в нелинейную физику.— М.: Наука, 1988.
5. **Рабинович М. И., Трубецков Д. И.** Введение в теорию колебаний и волн.— М.: Наука, 1984.

г. Нижний Новгород *Поступила 27/IV 1990 г., в окончательном варианте — 27/III 1991 г.*