

AMS subject classification: 14F35, 26A33, 35R11

Аналитический подход к решению дифференциального уравнения в частных производных дробного порядка методом оптимального q -гомотопного анализа

Р. Даржи¹, Б. Агели²

¹Department of Mathematics, Neka Branch, Islamic Azad University, Neka, Iran

²Department of Mathematics, Qaemshahr Branch, Islamic Azad University, Qaemshahr, Iran

E-mails: r.darzi@iauneka.ac.ir (Даржи Р.), b.agheli@yahoo.com (Агели Б.)

Даржи Р., Агели Б. Аналитический подход к решению дифференциального уравнения в частных производных дробного порядка методом оптимального q -гомотопного анализа // Сиб. журн. вычисл. математики / РАН. Сиб. отд-ние. — Новосибирск, 2018. — Т. 21, № 2. — С. 171–183.

Метод оптимального q -гомотопного анализа используется для решения дифференциальных уравнений в частных производных (ДУЧП) с дробной производной по времени. Для иллюстрации простоты и возможностей предлагаемого подхода приведены конкретные и ясные примеры. Все численные расчеты данной статьи выполнены с использованием пакета Mathematica.

DOI: 10.15372/SJNM20180204

Ключевые слова: *нелинейное дифференциальное уравнение в частных производных дробного порядка, метод оптимального q -гомотопного анализа, производная Капуто.*

Darzi R., Agheli B. Analytical approach to solution fractional partial differential equation by optimal q -homotopy analysis method // Siberian J. Num. Math. / Sib. Branch of Russ. Acad. of Sci. — Novosibirsk, 2018. — Vol. 21, № 2. — P. 171–183.

The optimal q -homotopy analysis method is employed in order to solve partial differential equations (PDEs) featuring a time-fractional derivative. Then, in order to illustrate the simplicity and ability of the suggested approach, some specific and clear examples are given. All numerical calculations in this manuscript have been carried out with Mathematica package.

Keywords: *nonlinear fractional partial differential equation, optimal q -homotopy analysis method, Caputo derivative.*

1. Введение

В данном исследовании предложен метод оптимального q -гомотопного анализа для решения дифференциального уравнения в частных производных дробного порядка. Наша цель — использование метода гомотопного анализа (МГА), приведенного в статье Ляо [1], для решения нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных с дробной производной по времени. В МГА имеется специальный вспомогательный параметр h , обеспечивающий простой подход к корректировке и управлению областью сходимости и скоростью сходимости решения в виде ряда. Кроме того, используя так называемую h -кривую [1], легко определить действительные области h для получения

сходящегося решения в виде ряда. Таким образом, вспомогательный параметр h играет важную роль в МГА. Эл-Тавил и Хусеен [2] предложили метод, называемый методом q -гомотопного анализа (q -МГА), который считается более общим методом, чем МГА. Метод q -МГА имеет два параметра: n и h , тогда как МГА имеет только параметр h . Введение дополнительного параметра n в q -МГА дает большую гибкость, чем у МГА, при корректировке и управлении областью сходимости и скоростью сходимости решений в виде ряда.

Недавно был введен новый метод, называемый методом оптимального q -гомотопного анализа (О q -МГА), который был развит Хусееном [3]. Преимущество этого метода перед МГА и q -МГА состоит в том, что в этом методе не нужно определять h -кривую.

Заинтересованный читатель может обратиться к другим книгам, посвященным дробному исчислению [4, 5]. Следует отметить, что нет точных аналитических решений большинства дифференциальных уравнений в частных производных дробного порядка. Следовательно, для таких уравнений нам нужно использовать некоторые прямые и итерационные методы. В последние годы используются различные методы для решения дробных дифференциальных уравнений (ДДУ) и дробных дифференциальных уравнений в частных производных (ДДУЧП). Некоторые известные методы: метод разложения Адомяна (МРА) [6, 7], вариационный итерационный метод (ВИМ) [8, 9], метод гомотопных возмущений (МГВ) [10–12], метод гомотопного анализа (МГА) [13, 14] и т. д. [15–17].

Метод О q -МГА используется для решения следующего дифференциального уравнения в частных производных дробного порядка по времени:

$$D_t^\mu v(x, t) + \mathfrak{R}(v(x, t)) = f(x, t), \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad (1.1)$$

в котором D^μ означает производную Капуто порядка $l - 1 < \mu \leq l$ и $\mathfrak{R}(v(x, t))$ содержит функцию $v(x, t)$ и частные производные этой функции $v(x, t)$ по x .

Статья организована следующим образом. В пункте 2 дано определение дробного исчисления. В п. 3 представлена основная идея метода оптимального q -гомотопного анализа. В п. 4 проводится исследование сходимости предлагаемого метода. В п. 5 иллюстрируется применение О q -МГА к дифференциальному уравнению в частных производных дробного порядка по времени и представлены некоторые численные примеры. И наконец, в п. 6 даны некоторые выводы относительно предлагаемого метода.

2. Дробное исчисление

В данном пункте мы представим дробный интеграл Римана–Лиувилля и дробную производную Капуто из [4].

Определение 2.1. Считается, что вещественная функция $f(x)$, $x > 0$, находится в пространстве C_ν , $\nu \in \mathbb{R}$, если существует вещественное число $n (> \nu)$ такое, что $f(x) = x^n f_1(x)$, где $f_1(x) \in C[0, \infty)$, и говорят, что она — в пространстве C_ν^k , если и только если $f^{(k)} \in C_\nu$, $k \in \mathbb{N}$.

Определение 2.2. Оператор дробного интеграла Римана–Лиувилля порядка $\mu > 0$ функции $f \in C_\nu$, $\nu \geq -1$, задается следующим образом:

$$I_a^\mu f(x) = \frac{1}{\Gamma(\mu)} \int_a^x (x-r)^{\mu-1} f(r) dr,$$

$$I^\mu f(x) = I_0^\mu f(x), \quad I^0 f(x) = f(x).$$

Определение 2.3. Дробная производная Капуто f определяется следующим образом:

$$D^\mu f(x) = I^{k-\mu} D^k f(x) = \frac{1}{\Gamma(k-\mu)} \int_0^x (x-r)^{k-\mu-1} f^{(k)}(r) dr, \quad x > 0,$$

где $f \in C_{-1}^k$, $k-1 < \mu \leq k$ и $k \in \mathbb{N}$.

Свойство. Для $k-1 < \mu \leq k$, $k \in \mathbb{N}$, $f \in C_\nu^k$, $\nu \geq -1$ и $x > 0$ имеют место следующие свойства:

- i) $D_a^\mu I_a^\mu f(x) = f(x)$;
- ii) $I_a^\mu D_a^\alpha f(x) = f(x) - \sum_{j=0}^{k-1} f^{(j)}(a^+) \frac{(x-a)^j}{j!}$.

3. Описание метода оптимального q -гомотопного анализа

Для описания основных идей О q -МГА для ДУЧП с дробной производной по времени рассмотрим

$$N[v(x, t)] = f(x, t), \quad (3.1)$$

где N включает линейный и нелинейный операторы уравнения (1.1), x и t обозначают независимые переменные, а $v(x, t)$ — неопределенная функция. Сначала построим уравнение деформации нулевого порядка, которое можно записать в виде

$$(1 - mq)L[\phi(x, t; q) - v_0(x, t)] = qhH(x, t)\{N[\phi(x, t; q)] - f(x, t)\}, \quad (3.2)$$

где

- $m > 1$,
- $h \neq 0$ — вспомогательный параметр,
- $v_0(x, t)$ — первичная оценка,
- $H(x, t) \neq 0$ — вспомогательная функция,
- $\phi(x, t; p)$ — функция, которая должна удовлетворять начальным условиям,
- $q \in \left[0, \frac{1}{m}\right]$ — параметр вложения,
- L (в данной статье $L = D_t^\mu$) — вспомогательный линейный оператор и $L(c) = 0$, где c — постоянная.

Благодаря линейному свойству дифференциального оператора L ($L(0) = 0$) и вследствие того, что $v_0(x, t)$ удовлетворяет начальным условиям, очевидно, что при $q = 0$ мы имеем $\phi(x, t; 0) = v_0(x, t)$. Кроме того, при $\frac{1}{m}$ уравнение (3.2) трансформируется в $\phi\left(x, t; \frac{1}{m}\right)$. Таким образом, q увеличивается от 0 до $\frac{1}{m}$, решение $\phi(x, t; q)$ переходит от начального предположения $v_0(x, t)$ к решению $v(x, t)$. Если $v_0(x, t)$, L , h и $H(x, t)$ выбраны правильно, решение $\phi\left(x, t; \frac{1}{m}\right)$ существует для $q \in \left[0, \frac{1}{m}\right]$.

Теперь рассмотрим разложение $\phi(x, t; q)$ в ряд Тейлора по q :

$$\varphi(x, t; q) = \sum_{n=0}^{\infty} v_n(x, t) q^n, \quad (3.3)$$

где

$$v_n(x, t) = \frac{1}{n!} \left. \frac{\partial^n \varphi(x, t; q)}{\partial q^n} \right|_{q=0}. \quad (3.4)$$

Предполагается, что вспомогательный линейный оператор, начальное предположение, вспомогательный параметр h и вспомогательная функция $H(x, t)$ выбраны таким образом, что ряд (3.3) сходится при $q \rightarrow \frac{1}{m}$. Тогда приближенное решение (3.3) можно представить в виде

$$v(x, t) = \varphi\left(x, t; \frac{1}{m}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} v_n(x, t) \left(\frac{1}{m}\right)^n. \quad (3.5)$$

Теперь мы можем определить вектор

$$\vec{v}_m(t) = \{v_0(x, t), v_1(x, t), v_2(x, t), \dots, v_m(x, t)\}. \quad (3.6)$$

Продифференцировав уравнение (3.2) n раз по q и положив $q = 0$, получим уравнение деформации n -го порядка [1]:

$$L[v_n(x, t) - \chi_n v_{n-1}(x, t)] = h H(x, t) \mathcal{R}_n(\vec{v}_{n-1}(x, t)) \quad (3.7)$$

с начальными условиями:

$$v_n^{(k)}(x, 0) = 0, \quad k = 0, 1, 2, \dots, n-1, \quad (3.8)$$

где

$$\mathcal{R}_n(\vec{v}_{n-1}(x, t)) = -\left(f(x, t) - \frac{\chi_n}{m} f(x, t)\right) + \frac{1}{(n-1)!} \left. \frac{\partial^{n-1} N[\phi(x, t; q)]}{\partial q^{n-1}} \right|_{q=0} \quad (3.9)$$

и

$$\chi_n = \begin{cases} 0, & n \leq 1, \\ m, & n > 1. \end{cases} \quad (3.10)$$

В данной статье мы имеем $L = D_t^\mu$. Применим интегральный оператор Римана–Лиувилля I^μ к обеим частям (3.7) и используем свойство из п. 2. Тогда мы получим следующее соотношение:

$$v_n(x, t) = \chi_n v_{n-1}(x, t) - \chi_n \left(\sum_{k=0}^{n-1} v_{n-1}^{(k)}(x, 0^+) \frac{t^k}{k!} \right) + h I^\mu H(x, t) \mathcal{R}_n(\vec{v}_{n-1}(x, t)). \quad (3.11)$$

Замечание 3.1. Значение $v_n(x, t)$ для $n \geq 1$ определяется линейным уравнением (3.7) с граничными условиями, получаемыми из начальной задачи. Поскольку существует множитель $\left(\frac{1}{m}\right)^n$, вероятность сходимости увеличится или даже мы сможем достичь более быстрой сходимости, чем при использовании стандартного МГА.

Замечание 3.2. Что касается теории, Ляо [1] и Ябушита с соавторами [18] предложили метод оптимизации для нахождения оптимальных параметров контроля сходимости путем минимизации квадратичной ошибки невязки, интегрируемой во всей области, имеющей физическое значение.

Предположим, что $\Delta(h)$ обозначает квадратичную ошибку невязки определяющего уравнения (3.1) и выражается следующим образом:

$$\Delta(h) = \int_{\Omega} (N[v_M(x, t)])^2 d\Omega, \quad (3.12)$$

где Ω — вся область, имеющая физическое значение, и

$$v_M(x, t) = \sum_{i=0}^M v_i(x, t). \quad (3.13)$$

Оптимальное значение вспомогательного параметра h задается посредством нелинейного алгебраического уравнения

$$\frac{d}{dh} \Delta(h) = 0. \quad (3.14)$$

Используем квадратичную ошибку невязки (3.12), интегрируемую во всей представляющей интерес области Ω , с порядком аппроксимации M .

4. Анализ сходимости

В данном пункте обсуждается сходимость Оq-МГА. Приводимые здесь теоремы доказывают, что сходимость Оq-МГА лучше, чем сходимость МГА.

Теорема 4.1 [19]. *Решение уравнений (3.2) и (3.1) существует в виде степенного ряда по q , т.е.*

$$\varphi(x, t; q) = \sum_{n=0}^{\infty} v_n(x, t) q^n,$$

если нелинейный оператор сохраняет степенной ряд по q .

Теорема 4.2 [19]. *Рассмотрим банахово пространство $(A, \|\cdot\|)$ с $A \subset \mathbb{R}$. Предположим, что исходная оценка $v_0(x, t)$ остается внутри шара решения $v(x, t)$. Если $r \in \mathbb{R}$ — постоянная, то для оптимизированного значения h и $0 < r < m$, если для всех n*

$$V_{n+1}(x, t; m) \leq \frac{r}{m} \|V_n(x, t; m)\|,$$

где $V_n(x, t; m) = v_n(x, t) \left(\frac{1}{m}\right)^n$, тогда $\sum_{n=0}^{\infty} V_n(x, t; m) = \sum_{n=0}^{\infty} v_n(x, t) \left(\frac{1}{m}\right)^n$ сходится в области определения t .

Теорема 4.3 [19]. *Предположим, что решение $\sum_{n=0}^{\infty} V_n(x, t; m) = \sum_{n=0}^{\infty} v_n(x, t) \left(\frac{1}{m}\right)^n$ сходится к решению $v(x, t)$, которое является заданным значением h . Если усеченный ряд*

$$\sum_{n=0}^N V_n(x, t; m) = \sum_{n=0}^N v_n(x, t) \left(\frac{1}{m}\right)^n$$

является аппроксимацией решения $v(x, t)$ из (3.1), то верхняя граница ошибки $E_N(x, t)$ оценивается следующим образом:

$$E_N(x, t) \leq \left(\frac{r}{m}\right)^{N+1} \left(\frac{m}{m-r}\right) \|V_0(x, t; m)\|,$$

где $E_N(x, t) = \|v(x, t) - s_N(x, t)\|$, и $s_m(x, t)$ обозначает последовательность частичных сумм ряда $\sum_{n=0}^N v_n(x; t) \left(\frac{1}{m}\right)^n$ и $v(x, t) = \lim_{m \rightarrow \infty} s_m(x, t)$.

Замечание 4.1. Следует отметить, что по мере увеличения n верхняя граница ошибки E_N уменьшается. Следовательно, сходимость Оq-МГА быстрее, чем сходимость МГА (Оq-МГА; $h = -1, m = 1$).

5. Тестовые примеры

Используем оптимальный q-МГА для решения нелинейного дробного по времени дифференциального уравнения адвекции в частных производных, дробного по времени гиперболического уравнения и дробного по времени уравнения Фишера. Все графики и вычисления для этих уравнений выполнены с использованием пакета программ Mathematica.

Пример 5.1. Мы предлагаем следующее дробное по времени дифференциальное уравнение адвекции в частных производных:

$$D_t^\mu v(x, t) + v(x, t) v_x(x, t) = x(1 + t^2), \quad t > 0, x \in \mathbb{R}, 0 < \mu \leq 1, \quad (5.1)$$

с начальным условием

$$v(x, 0) = 0. \quad (5.2)$$

Из уравнений (3.11) и (5.1), (5.2) мы получим

$$\begin{aligned} v_0(x, t) &= 0, \\ v_1(x, t) &= -\frac{hxt^\mu ((\mu + 1)(\mu + 2) + 2t^2)}{\Gamma(\mu + 3)}, \\ v_2(x, t) &= -\frac{hmtx^\mu ((\mu + 1)(\mu + 2) + 2t^2)}{\Gamma(\mu + 3)} + \\ &\quad \frac{h^4 t^{3\mu} x^2 \mu + 2 (-16 t^4 2\mu + 3 (2(\mu + 3)(2\mu + 5)t^2)}{3\Gamma(\mu + 3)^2 \Gamma(3\mu + 3) \Gamma(3\mu + 7)} + \\ &\quad \frac{3(\mu + 2)(3\mu + 5)(\mu(\mu + 3) + 3) \Gamma(2\mu + 2) \Gamma(3\mu + 4)}{3\Gamma(\mu + 3)^2 \Gamma(3\mu + 3) \Gamma(3\mu + 7)} - \\ &\quad \frac{3(\mu + 1)^2 \Gamma(2\mu + 1) \Gamma(3\mu + 7) (9\mu^2(\mu + 3) + 20\mu)}{3\Gamma(\mu + 3)^2 \Gamma(3\mu + 3) \Gamma(3\mu + 7)} + \\ &\quad \frac{2(2\mu + 1)(\mu(\mu + 3) + 6)t^2 + 4}{3\Gamma(\mu + 3)^2 \Gamma(3\mu + 3) \Gamma(3\mu + 7)}, \\ &\dots \end{aligned}$$

Положив $m = 1$ в первых трех решениях, мы получим следующую оценку решения уравнения (5.1):

$$\begin{aligned}
 v(x, t) \approx & -\frac{hxt^\mu ((\mu + 1)(\mu + 2) + 2t^2)}{\Gamma(\mu + 3)} - \frac{hxt^\mu ((\mu + 1)(\mu + 2) + 2t^2)}{\Gamma(\mu + 3)} + \\
 & \frac{h^4 t^{3\mu} x^2 \mu + 2 \left(-16 t^4 2\mu + 3 [2(\mu + 3)(2\mu + 5)t^2 \right.}{3\Gamma(\mu + 3)^2 \Gamma(3\mu + 3) \Gamma(3\mu + 7)} + \\
 & \left. \frac{3(\mu + 2)(3\mu + 5)(\mu(\mu + 3) + 3) \Gamma(2\mu + 2) \Gamma(3\mu + 4)}{3\Gamma(\mu + 3)^2 \Gamma(3\mu + 3) \Gamma(3\mu + 7)} - \right. \\
 & \left. \frac{3(\mu + 1)^2 \Gamma(2\mu + 1) \Gamma(3\mu + 7) (9\mu^2(\mu + 3) + 20\mu)}{3\Gamma(\mu + 3)^2 \Gamma(3\mu + 3) \Gamma(3\mu + 7)} + \right. \\
 & \left. \frac{2(2\mu + 1)(\mu(\mu + 3) + 6)t^2 + 4}{3\Gamma(\mu + 3)^2 \Gamma(3\mu + 3) \Gamma(3\mu + 7)}. \tag{5.3}
 \end{aligned}$$

В таблице 1 представлены оценки решений при $\mu = 1$, полученные для различных значений x и t с использованием МРА, ВИМ, МГВ, ВГВИМ [20] и Оq-МГА.

Таблица 1. Приближенный результат тестового примера 5.1

t	x	$v_{\text{ВИМ}}$	$v_{\text{МРА}}$	$v_{\text{МГВ}}$	$v_{\text{ВГВИМ}}$	$v_{\text{Оq-МГА}}$	$v_{\text{точн}}$
0.2	0.25	0.050309	0.050000	0.0499876	0.0499876	0.50318	0.050000
	0.50	0.100619	0.100000	0.099978	0.0999746	0.01040	0.100000
	0.75	0.150928	0.150001	0.149968	0.149962	0.150025	0.150000
	1.0	0.201237	0.200001	0.199957	0.199951	0.20100	0.200000
0.4	0.25	0.101894	0.100023	0.099645	0.0995290	0.09609	0.100000
	0.50	0.203787	0.200046	0.199290	0.199059	0.20370	0.200000
	0.75	0.305681	0.300069	0.298935	0.298588	0.300009	0.300000
	1.0	0.407575	0.400092	0.398580	0.398118	0.400001	0.400000
0.6	0.25	0.153094	0.150411	0.147158	0.145690	0.153001	0.150000
	0.50	0.306188	0.300823	0.294317	0.291380	0.300088	0.300000
	0.75	0.459282	0.451234	0.441475	0.437070	0.450207	0.450000
	1.0	0.612376	0.601646	0.588634	0.582759	0.600633	0.600000

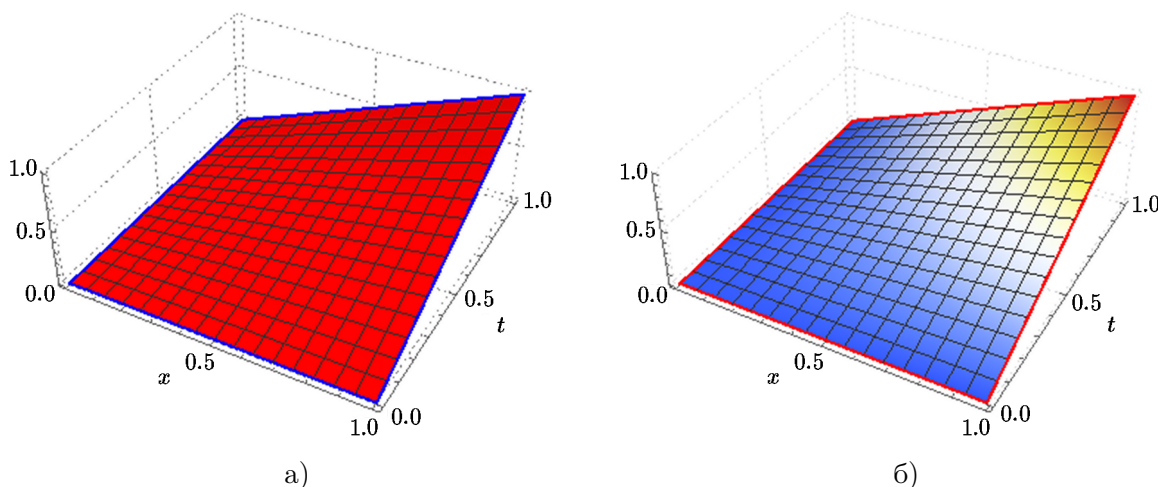


Рис. 1. а) точное решение, б) оценка решения при $\mu = 1.0$

Согласно замечанию 3.2 для (5.3), при $\mu = 1$, $m = 1$, $0 \leq x \leq 1$ и $0 \leq t \leq 1$ оптимальное значение h определяется путем решения алгебраического уравнения (3.13), имеющего минимальное значение при $h = -1.93343$. На рис. 2 изображена h -кривая третьего порядка аппроксимации О q -МГА для различных значений $0 \leq x \leq 1$ и $0 \leq t \leq 1$ при фиксированных $m = 1$ и $\mu = 1$.

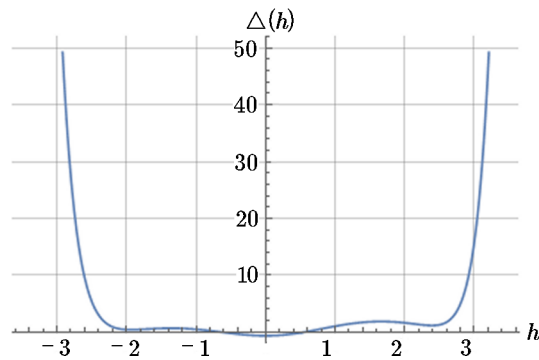


Рис. 2. h -кривая третьего порядка аппроксимации О q -МГА

Пример 5.2. Рассмотрим следующее дробное по времени гиперболическое уравнение:

$$D_t^\mu v(x, t) = \frac{\partial}{\partial x} (v(x, t)v_x(x, t)), \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad 1 < \mu \leq 2, \quad (5.4)$$

с начальным условием

$$v(x, 0) = x^2, \quad v_t(x, 0) = -2x^2. \quad (5.5)$$

Из (3.11) и (5.4), (5.5) получим

$$v_0(x, t) = x^2(1 - 2t),$$

$$v_1(x, t) = -\frac{6hx^2t^\mu}{\Gamma(\mu + 3)} ((\mu + 1)(\mu + 2) + 8t^2 - 4(\mu + 2)t),$$

$$v_2(x, t) = -\frac{6hx^2t^\mu}{\Gamma(\mu + 1)\Gamma(\mu + 3)\Gamma(3\mu + 5)} \left(36h^2t^{2\mu} [-128(2\mu + 1)(2\mu + 3)(3\mu + 4)t^3 + \right. \\ \left. (\mu + 1)(2\mu + 1)(2\mu + 3)(3\mu + 4)t^2 - 24(\mu + 1)(\mu + 2)(2\mu + 1)(3\mu + 2)(3\mu + 4)t + \right. \\ \left. 3(\mu + 1)^2(\mu + 2)(3\mu + 1)(3\mu + 2)(3\mu + 4) + 256(4\mu(\mu + 2) + 3)t^4] \Gamma(2\mu + 1) + \right. \\ \left. \Gamma(\mu + 1)\Gamma(3\mu + 5)(h + m)[(\mu + 1)(\mu + 2) + 8t^2 - 4(\mu + 2)t] \right),$$

...

Положив $m = 1$ в первых трех решениях, мы получим следующую оценку решения уравнения (5.4):

$$v(x, t) \approx x^2(1 - 2t) - \frac{6hx^2t^\mu}{\Gamma(\mu + 3)} ((\mu + 1)(\mu + 2) + 8t^2 - 4(\mu + 2)t) - \\ \frac{6hx^2t^\mu}{\Gamma(\mu + 1)\Gamma(\mu + 3)\Gamma(3\mu + 5)} \left(36h^2t^{2\mu} [-128(2\mu + 1)(2\mu + 3)(3\mu + 4)t^3 + \right. \\ \left. (\mu + 1)(2\mu + 1)(2\mu + 3)(3\mu + 4)t^2 - 24(\mu + 1)(\mu + 2)(2\mu + 1)(3\mu + 2)(3\mu + 4)t + \right.$$

$$3(\mu + 1)^2(\mu + 2)(3\mu + 1)(3\mu + 2)(3\mu + 4) + 256(4\mu(\mu + 2) + 3)t^4] \Gamma(2\mu + 1) + \Gamma(\mu + 1)\Gamma(3\mu + 5)(h + 1)[(\mu + 1)(\mu + 2) + 8t^2 - 4(\mu + 2)t]. \quad (5.6)$$

Решение, полученное для $\mu = 2$, соответствует точному решению $v(x, t) = xt$.

В табл. 2 представлены оценки решения для $\mu = 2$, полученные для различных значений x и t с использованием МРА, ВИМ, МГВ, ВГВИМ [20] и Оq-МГА.

Таблица 2. Приближенный результат тестового примера 5.2

t	x	$v_{\text{ВИМ}}$	$v_{\text{МРА}}$	$v_{\text{МГВ}}$	$v_{\text{ВГВИМ}}$	$v_{\text{Оq-МГА}}$	$v_{\text{Точн}}$
0.2	0.25	0.043400	0.0433951	0.043400	0.0432049	0.043001	0.043403
	0.50	0.173600	0.173580	0.173600	0.172820	0.173609	0.173611
	0.75	0.390600	0.390556	0.390600	0.388844	0.390004	0.390625
	1.0	0.694400	0.694321	0.694400	0.691278	0.693244	0.694444
0.4	0.25	0.031779	0.031567	0.031779	0.0299125	0.0333335	0.031888
	0.50	0.127118	0.126268	0.127118	0.119650	0.127001	0.127551
	0.75	0.286015	0.284103	0.286015	0.269212	0.296190	0.286990
	1.0	0.508471	0.505072	0.508471	0.478600	0.499600	0.508471
0.6	0.25	0.023665	0.022005	0.023665	0.0188604	0.035446	0.024414
	0.50	0.094660	0.088018	0.094660	0.0754415	0.096678	0.097656
	0.75	0.212984	0.198040	0.212984	0.169743	0.292801	0.219727
	1.0	0.378638	0.352071	0.378638	0.301766	0.400323	0.390625

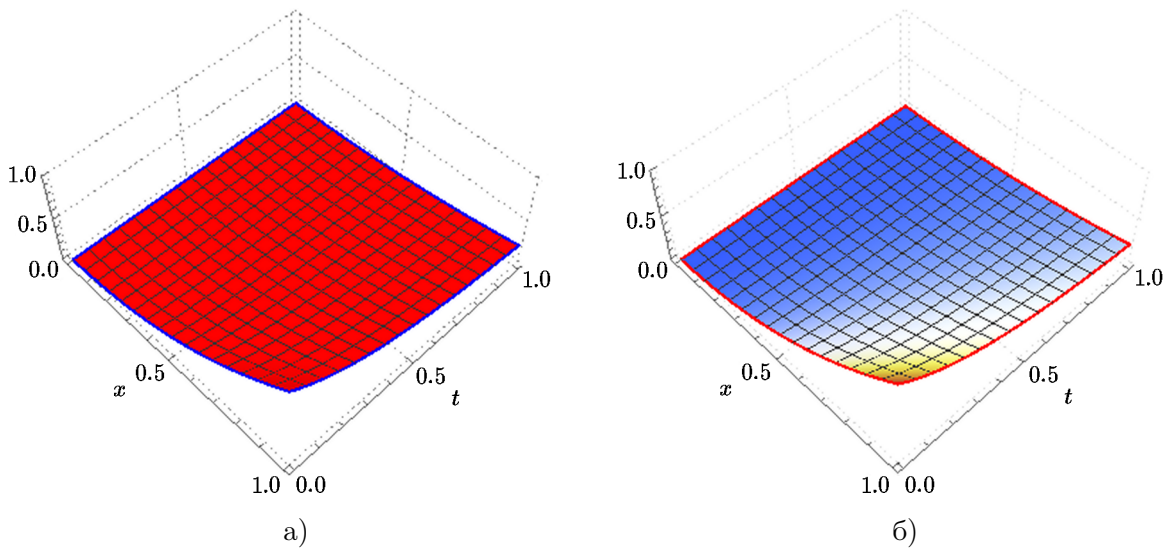


Рис. 3. а) точное решение, б) оценка решения при $\mu = 2.0$

Согласно замечанию 3.2 для (5.6), при $\mu = 2, m = 1, 0 \leq x \leq 1$ и $0 \leq t \leq 1$ оптимальное значение h определяется путем решения нелинейного алгебраического уравнения (3.13), имеющего минимальное значение при $h = -0.0942761$. Рис. 4 показывает h -кривую с третьим порядком аппроксимации Оq-МГА для различных значений $0 \leq x \leq 1$ и $0 \leq t \leq 1$ при фиксированных $m = 1$ и $\mu = 2$.

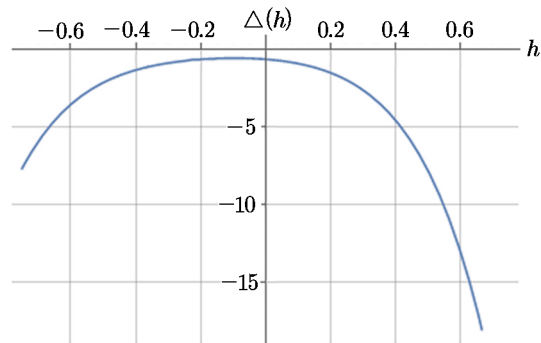


Рис. 4. h -кривая с третьим порядком аппроксимации Оq-МГА

Пример 5.3. В этом примере дробное по времени уравнение Фишера

$$D_t^\mu v(x, t) = v_{xx}(x, t) + 6v(x, t)(1 - v(x, t)), \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad 0 < \mu \leq 1, \quad (5.7)$$

взято с начальным условием

$$v(x, 0) = \frac{1}{(1 + e^x)^2}. \quad (5.8)$$

Из уравнения (3.11) и (5.7), (5.8) получим

$$\begin{aligned} v_0(x, t) &= \frac{1}{(1 + e^x)^2}, \\ v_1(x, t) &= -\frac{10he^x t^\mu}{(e^x + 1)^3 \Gamma(\mu + 1)}, \\ v_2(x, t) &= \frac{10he^x t^\mu}{(e^x + 1)^6} \left(\frac{h(e^x + 1)(5e^x(2e^x + 1) + 7)t^\mu}{\Gamma(2\mu + 1)} + \right. \\ &\quad \left. \frac{1}{\Gamma(\mu + 1)} \left(\frac{15 \cdot 4^{\mu+1} h^2 e^x \Gamma(\mu + \frac{1}{2}) t^{2\mu}}{\sqrt{\pi} \Gamma(3\mu + 1)} - (e^x + 1)^3 (h + m) \right) \right), \\ &\dots \end{aligned}$$

Положив $m = 1$ в первых трех решениях, мы получим следующую оценку решения уравнения (5.7):

$$\begin{aligned} v(x, t) \approx & \frac{1}{(1 + e^x)^2} - \frac{10he^x t^\mu}{(e^x + 1)^3 \Gamma(\mu + 1)} + \\ & \frac{10he^x t^\mu}{(e^x + 1)^6} \left(\frac{h(e^x + 1)(5e^x(2e^x + 1) + 7)t^\mu}{\Gamma(2\mu + 1)} + \right. \\ & \left. \frac{1}{\Gamma(\mu + 1)} \left(\frac{15 \cdot 4^{\mu+1} h^2 e^x \Gamma(\mu + \frac{1}{2}) t^{2\mu}}{\sqrt{\pi} \Gamma(3\mu + 1)} - (e^x + 1)^3 (h + 1) \right) \right). \end{aligned}$$

Решение, полученное здесь для $\mu = 1$, соответствует точному решению $v(x, t) = 1/(1 + e^{x-5t})^2$.

Приближенные решения для $\mu = 1$, полученные для различных значений x и t с использованием МРА, ВИМ, МГВ, ВГВИМ [20] и Оq-МГА, представлены в табл. 3.

Таблица 3. Приближенный результат тестового примера 5.3

t	x	$v_{\text{ВИМ}}$	$v_{\text{МРА}}$	$v_{\text{МГВ}}$	$v_{\text{ВГВИМ}}$	$v_{\text{Оq-МГА}}$	$v_{\text{Точн}}$
0.2	0.25	0.043400	0.0433951	0.043400	0.0432049	0.0431104	0.043403
	0.50	0.173600	0.173580	0.173600	0.172820	0.173544	0.173611
	0.75	0.390600	0.390556	0.390600	0.388844	0.390009	0.390625
	1.0	0.694400	0.694321	0.694400	0.691278	0.694986	0.694444
0.4	0.25	0.031779	0.031567	0.031779	0.0299125	0.031001	0.031888
	0.50	0.127118	0.126268	0.127118	0.119650	0.127763	0.127551
	0.75	0.286015	0.284103	0.286015	0.269212	0.288334	0.286990
	1.0	0.508471	0.505072	0.508471	0.478600	0.500001	0.508471
0.6	0.25	0.023665	0.022005	0.023665	0.0188604	0.0198699	0.024414
	0.50	0.094660	0.088018	0.094660	0.0754415	0.099086	0.097656
	0.75	0.212984	0.198040	0.212984	0.169743	0.218873	0.219727
	1.0	0.378638	0.352071	0.378638	0.301766	0.391123	0.390625

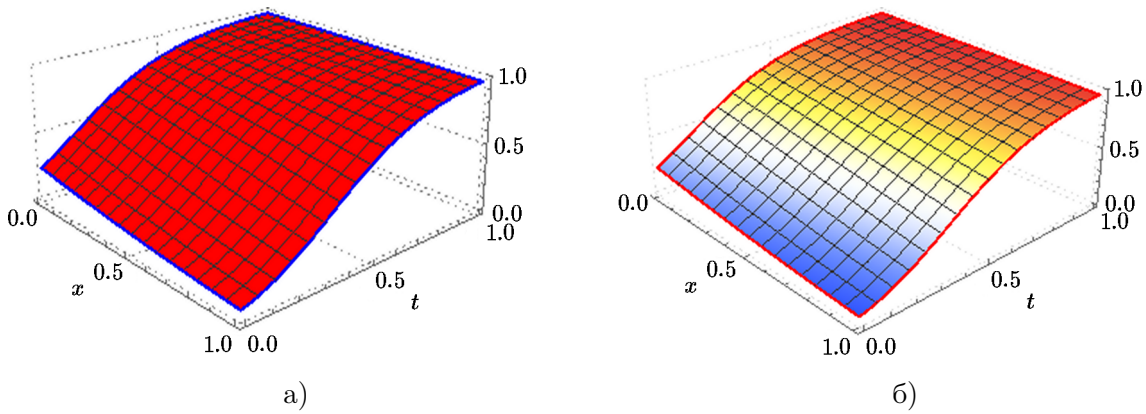


Рис. 5. а) точное решение, б) оценка решения при $\mu = 1.0$

Согласно замечанию 3.2 для (5.3), при $\mu = 1, m = 1, 0 \leq x \leq 1$ и $0 \leq t \leq 1$ оптимальное значение h определяется путем решения нелинейного уравнения (3.13), имеющего минимальное значение при $h = -0.229602$. Рис. 6 показывает h -кривую с третьим порядком аппроксимации Оq-МГА для различных значений $0 \leq x \leq 1$ и $0 \leq t \leq 1$ при фиксированных $m = 1$ и $\mu = 1$.

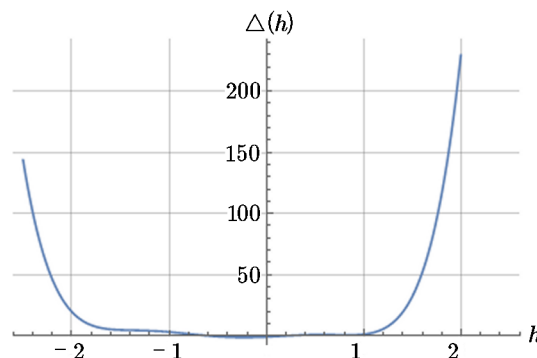


Рис. 6. h -кривая с третьим порядком аппроксимации Оq-МГА

6. Выводы

Мы успешно применили Q_q -МГА для получения решения в виде ряда дифференциального уравнения в частных производных с дробной производной по времени. Результаты показывают, что использование нескольких итераций Q_q -МГА приводит к полезным решениям.

В заключение следует добавить, что предлагаемый подход имеет потенциал, который может использоваться для решения других аналогичных нелинейных задач с дифференциальными уравнениями в частных производных дробного порядка.

Литература

1. **Liao S.J.** The proposed homotopy analysis technique for the solution of nonlinear problems: PhD thesis. — Shanghai Jiao Tong University, 1992.
2. **El-Tawil M.A., Huseen S.N.** The q -homotopy analysis method (q -HAM) // *Int. J. Appl. Math. and Mechanics.* — 2012. — Vol. 8, № 15. — P. 51–75.
3. **Huseen S.N., Grace S.R., and El-Tawil M.A.** The optimal q -homotopy analysis method (Q_q -HAM) // *Int. J. Comp. & Technology.* — 2012. — Vol. 11, № 8. — P. 2859–2866.
4. **Kilbas A.A., Srivastava H.M., and Trujillo J.J.** *Theory and Applications of Fractional Differential Equations.* — Netherlands: Elsevier BV, 2006.
5. **Miller K.S., Ross B.** *An Introduction to the Fractional Calculus and Fractional Differential Equations.* — New York: John Wiley and Sons, 1993.
6. **Momani S., Shawagfeh N.** Decomposition method for solving fractional Riccati differential equations // *Appl. Math. Comput.* — 2006. — Vol. 182. — P. 1083–1092.
7. **Wang Q.** Numerical solutions for fractional KdV-Burgers equation by Adomian decomposition method // *Appl. Math. Comput.* — 2006. — Vol. 182. — P. 1048–1055.
8. **Inc M.** The approximate and exact solutions of the space- and time-fractional Burgers equations with initial conditions by variational iteration method // *J. Math. Anal. Appl.* — 2008. — Vol. 345. — P. 476–484.
9. **Yang X.J., Baleanu D., Khan Y., and Mohyud-Din S.T.** Local fractional variational iteration method for diffusion and wave equations on Cantor sets // *Rom. J. Phys.* — 2014. — Vol. 59. — P. 36–48.
10. **Momani S., Odibat Z.** Homotopy perturbation method for nonlinear partial differential equations of fractional order // *Phys. Lett. A.* — 2007. — Vol. 365. — P. 345–350.
11. **Odibat Z., Momani S.** Modified homotopy perturbation method: application to quadratic Riccati differential equation of fractional order // *Chaos Soliton. Fract.* — 2008. — Vol. 36. — P. 167–174.
12. **Hosseinnia S., Ranjbar A., and Momani S.** Using an enhanced homotopy perturbation method in fractional differential equations via deforming the linear part // *Comput. Math. Appl.* — 2008. — Vol. 56. — P. 3138–3149.
13. **Hashim I., Abdulaziz O., and Momani S.** Homotopy analysis method for fractional IVPs // *Commun. Nonlinear Sci.* — 2009. — Vol. 14. — P. 674–684.
14. **Zurigat M., Momani S., and Alawneh A.** Analytical approximate solutions of systems of fractional algebraic-differential equations by homotopy analysis method // *Comput. Math. Appl.* — 2010. — Vol. 59. — P. 1227–1235.
15. **Kumar P., Agrawal O.P.** An approximate method for numerical solution of fractional differential equations // *Sign. Proc.* — 2006. — Vol. 86. — P. 2602–2610.

16. **Yang X.J., Baleanu D., and Zhong W.P.** Approximation solutions for diffusion equation on Cantor space-time // Proc. Romanian Academy. Series A.— 2013.— Vol. 14.— P. 127–133.
17. **Yuste S.B.** Weighted average finite difference methods for fractional diffusion equations // J. Comput. Phys.— 2006.— Vol. 216.— P. 264–274.
18. **Yabushita K., Yamashita M., and Tsuboi K.** An analytic solution of projectile motion with the quadratic resistance law using the homotopy analysis method // J. Phys. A: Math. and Theor.— 2007.— Vol. 40, № 29.— P. 8403–8416.
19. **El-Tawil M.A., Huseen S.N.** On convergence of the q-homotopy analysis method // Int. J. Contemporary Mathematical Sciences.— 2013.— Vol. 8, № 10.— P. 481–497.
20. **Neamaty A., Agheli B., and Darzi R.** Variational iteration method and he's polynomials for time-fractional partial differential equations // Progr. Fract. Differ. Appl.— 2015.— Vol. 1, № 1.— P. 47–55.

*Поступила в редакцию 29 сентября 2016 г.,
в окончательном варианте 1 августа 2017 г.*

