

О ПЕРЕНОСЕ ТЕПЛА И МАССЫ В ДИСПЕРСНОЙ СРЕДЕ

Ю. А. Буевич, Ю. А. Корнеев

(Москва)

Сформулированы макроскопические уравнения сохранения тепла (или массы диффундирующей примеси) в сплошной среде, содержащей распределенные частицы дисперсной фазы, в пренебрежении влиянием случайных пульсаций среды и частиц на процесс переноса. Сформулирована также задача о конвективной теплопроводности или диффузии вблизи отдельной частицы, решение которой позволяет вычислить все параметры, входящие в указанные уравнения. Эта задача решена в частном случае малых чисел Пекле, характеризующих теплообмен в окрестности одной частицы,

1. Во многих реальных ситуациях пространственный масштаб L полей температуры или концентрации примеси в дисперсной системе значительно превышает масштаб l внутренней структуры системы (например, среднее расстояние между соседними частицами дисперсной фазы), и основной интерес представляют лишь глобальные «макроскопические» характеристики переноса тепла или массы на расстояния, сравнимые с L и значительно превышающие указанный структурный масштаб l . В таких случаях удобно рассматривать дисперсную систему как суперпозицию некоторых сосуществующих континуумов [1], каждый из которых характеризуется отдельными значениями средних скорости, температуры и т. д., причем изменение последних величин описывается соответствующими усредненными уравнениями сохранения. Первоочередная задача состоит, очевидно, в строгом выводе таких уравнений.

Уравнения сохранения массы, импульса и момента импульса континуумов, имитирующих фазы монодисперсной суспензии, были получены в [2]. Ниже методы, развитые в [2], применяются к выводу уравнений сохранения тепла в этих континуумах. В частном случае, когда обе фазы дисперсной среды неподвижны, эти уравнения будут описывать перенос тепла в композитном зернистом материале. Ясно, что все результаты, полученные для описания теплопереноса, применимы также в анализе процесса переноса массы примеси, диффундирующей в дисперсной среде.

Пусть $C(t, \mathbf{r})$ и $T(t, \mathbf{r})$ — функции, описывающие поля скорости и температуры в дисперсной системе, а $\theta(t, \mathbf{r})$ — функция, равная единице в точках, расположенных в непрерывной фазе системы, и нулю в точках, находящихся внутри частиц. Средние скорости $\mathbf{v}(t, \mathbf{r})$, $\mathbf{w}(t, \mathbf{r})$ и температуры $\tau_0(t, \mathbf{r})$, $\tau_1(t, \mathbf{r})$ непрерывной и дисперсной фаз соответственно определим следующим образом:

$$(1.1) \quad \begin{cases} \mathbf{v}(t, \mathbf{r}) \\ \tau_0(t, \mathbf{r}) \end{cases} = \frac{1}{\varepsilon(t, \mathbf{r})b} \int_b \theta(t, \mathbf{r} + \mathbf{r}') \begin{cases} C(t, \mathbf{r} + \mathbf{r}') \\ T(t, \mathbf{r} + \mathbf{r}') \end{cases} d\mathbf{r}'$$

$$\begin{cases} \mathbf{w}(t, \mathbf{r}) \\ \tau_1(t, \mathbf{r}) \end{cases} = \frac{1}{\rho(t, \mathbf{r})b} \int_b [1 - \theta(t, \mathbf{r} + \mathbf{r}')] \begin{cases} C(t, \mathbf{r} + \mathbf{r}') \\ T(t, \mathbf{r} + \mathbf{r}') \end{cases} d\mathbf{r}'$$

Здесь интегрирование распространено на малый физический объем среды b , содержащий достаточно большое число частиц, центр тяжести которого расположен в точке \mathbf{r} , а $\rho(t, \mathbf{r})$ и $\varepsilon(t, \mathbf{r})$ — объемная концентра-

ция дисперсной фазы и пористость («порозность») системы, определяемые аналогично [2]

$$(1.2) \quad \varepsilon(t, r) = \frac{1}{b} \int_b \theta(t, r + r') dr'$$

$$\rho(t, r) = \frac{4}{3} \pi a^3 n(t, r) = 1 - \varepsilon(t, r)$$

где $n(t, r)$ — счетная (числовая) концентрация частиц, a — радиус частицы.

Усреднение по объему $b \sim l_b^3$ можно заменить усреднением по произвольно ориентированной поверхности $s \sim l_b^2$, играющей роль малой физической поверхности.

Далее рассмотрим сохранение тепла в объеме $B \gg b$, ограниченном поверхностью S . Объем и поверхность всех частиц внутри S обозначим через B_* и S_* . Такие же обозначения b_* и s_* введем для частиц внутри поверхности s , ограничивающей малый физический объем b .

Локальное производство тепла на единицу объема описываем при помощи функции $H(t, r)$, определенной в точках, занятых как непрерывной, так и дисперсной фазами. Локальные уравнения конвективной теплопроводности имеют вид

$$(1.3) \quad c_i(\partial/\partial t + \mathbf{C}\nabla)T = -\nabla\mathbf{Q}^{(i)} + H, \quad \mathbf{Q}^{(i)} = -\lambda_i\nabla T \quad (i=0,1)$$

Здесь \mathbf{Q} — поток тепла, обусловленный молекулярной теплопроводностью, а c и λ — удельная теплоемкость и коэффициент молекулярной теплопроводности. Значения индекса $i=0$ и $i=1$ в (1.3) относятся здесь и ниже к непрерывной и дисперсной фазам соответственно. Функция $H(t, r)$ может представлять собой как внешние источники тепла, практически не зависящие от поля температуры (например, производство тепла за счет вязкой диссипации энергии течения), так и источники, интенсивность которых существенно определяется этим полем (например, производство тепла в результате химических реакций). В последнем случае уравнения (1.3) могут быть нелинейными.

Условия баланса количества тепла в дисперсной системе и в ее непрерывной фазе внутри B имеют вид

$$(1.4) \quad \frac{\partial}{\partial t} \int_B cT dr + \int_S (cTC + \mathbf{Q})\mathbf{n} dr - \int_B H dr = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_B cT\theta dr + \int_S (cTC + \mathbf{Q})\theta\mathbf{n} dr + \int_{S_*} \mathbf{Q}\mathbf{n} dr - \int_B H\theta dr = 0$$

где \mathbf{n} — единичный вектор нормали, внешней по отношению к объемам, занятым системой или непрерывной фазой. Интегралы по B и S во втором соотношении (1.4) могут быть заменены интегралами по $B-B_*$ и по части поверхности S , проходящей в непрерывной фазе, соответственно.

Нетрудно показать аналогично [2], что с точностью до членов порядка $N^{-1/3}$, где N — число частиц в B , имеют место равенства

$$(1.5) \quad \int_S \mathbf{Q}\mathbf{n}\theta dr + \int_{S_*} \mathbf{Q}\mathbf{n} dr = \int_{S+S_*} \mathbf{Q}\mathbf{n} dr = \int_{S+S_*} \mathbf{Q}\mathbf{n} dr$$

где S_*' — поверхность всех частиц, целиком лежащих в B (т. е. не пересекаемых S). Кроме того, в соответствии с методом в [2] представляем B и S в виде суперпозиции малых физических объемов b и поверхностей s и проводим интегрирование в (1.4) и (1.5) в две этапа — сначала интегрируем по отдельным b и s , а затем суммируем результаты. Рассматривая

такие выражения, как интегральные суммы, и пренебрегая появляющимися членами, квадратичными по случайным отклонениям локальных величин от их средних значений, определенных в (1.1) и (1.2), получаем

$$(1.6) \quad \begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \int_B (c_0 \varepsilon \tau_0 + c_1 \rho \tau_1) d\mathbf{r} + \int_S (c_0 \varepsilon \tau_0 \mathbf{v} + c_1 \rho \tau_1 \mathbf{w}) \mathbf{n} d\mathbf{r} + \\ & + \int_S \mathbf{q} \mathbf{n} d\mathbf{r} - \int_B (\varepsilon h_0 + \rho h_1) d\mathbf{r} = 0 \\ & \frac{\partial}{\partial t} \int_B c_0 \varepsilon \tau_0 d\mathbf{r} + \int_S c_0 \varepsilon \tau_0 \mathbf{v} \mathbf{n} d\mathbf{r} + \int_S \mathbf{q} \mathbf{n} d\mathbf{r} + \int_B (\psi - \varepsilon h_0) d\mathbf{r} = 0 \end{aligned}$$

Здесь введены величины

$$(1.7) \quad \begin{aligned} \psi(t, \mathbf{r}) &= -\frac{1}{b} \sum_j \int_{s_j} \mathbf{Q} \mathbf{n}' d\mathbf{r}', \quad \mathbf{q}(t, \mathbf{r}) = \frac{1}{b} \int_b \mathbf{Q}(t, \mathbf{r} + \mathbf{r}') d\mathbf{r}' \\ h_0(t, \mathbf{r}) &= \frac{1}{\varepsilon(t, \mathbf{r}) b} \int_b \theta(t, \mathbf{r} + \mathbf{r}') H(t, \mathbf{r} + \mathbf{r}') d\mathbf{r}' \\ h_1(t, \mathbf{r}) &= \frac{1}{\rho(t, \mathbf{r}) b} \int_b [1 - \theta(t, \mathbf{r} + \mathbf{r}')] H(t, \mathbf{r} + \mathbf{r}') d\mathbf{r}' \end{aligned}$$

В выражении для $\psi(t, \mathbf{r})$ в (1.7) интегрирование проводится по поверхности j -й частицы, а суммирование — по всем частицам в b ; \mathbf{n}' обозначает единичный вектор нормали, внешней по отношению к частице. Ясно, что

$$(1.8) \quad \psi(t, \mathbf{r}) = -n(t, \mathbf{r}) \oint \langle \mathbf{Q} \rangle \mathbf{n}' d\mathbf{r}$$

где угловые скобки означают усреднение по ансамблю частиц, а интегрирование распространено на поверхность одной частицы.

Для среднего потока тепла $\mathbf{q}(t, \mathbf{r})$, связанного с молекулярной теплопроводностью, из (1.2) и (1.3), (1.7) следует выражение:

$$(1.9) \quad \begin{aligned} \mathbf{q}(t, \mathbf{r}) &= -\frac{1}{b} \left(\lambda_0 \int_{b-b_*} \frac{\partial T}{\partial \mathbf{r}} \Big|_{t, \mathbf{r}+\mathbf{r}'} d\mathbf{r}' + \lambda_1 \int_{b_*} \frac{\partial T}{\partial \mathbf{r}} \Big|_{t, \mathbf{r}+\mathbf{r}'} d\mathbf{r}' \right) = \\ &= -\lambda_0 \frac{1}{b} \int_b \frac{\partial T}{\partial \mathbf{r}} \Big|_{t, \mathbf{r}+\mathbf{r}'} d\mathbf{r}' - (\lambda_1 - \lambda_0) n(t, \mathbf{r}) \oint \langle T \rangle \mathbf{n}' d\mathbf{r} \end{aligned}$$

Наконец, функции $h_0(t, \mathbf{r})$ и $h_1(t, \mathbf{r})$, определяемые путем усреднения функции $H(t, \mathbf{r})$, существенно зависят от конкретного вида этой функции. Ниже считаем эти величины известными. В общем случае они могут зависеть от средних температур $\tau_0(t, \mathbf{r})$ и $\tau_1(t, \mathbf{r})$.

Из первого соотношения (1.6) имеем следующее дифференциальное уравнение переноса тепла в дисперсной среде:

$$(1.10) \quad \partial / \partial t (c_0 \varepsilon \tau_0 + c_1 \rho \tau_1) + \nabla (c_0 \varepsilon \tau_0 \mathbf{v} + c_1 \rho \tau_1 \mathbf{w}) = -\nabla \mathbf{q} + \varepsilon h_0 + \rho h_1$$

Аналогичное уравнение для непрерывной фазы следует из второго соотношения (1.6), а уравнение для дисперсной фазы представляет собой разность (1.10) и уравнения переноса тепла в непрерывной фазе. Таким путем получаем

$$(1.11) \quad \begin{aligned} \partial / \partial t (c_0 \varepsilon \tau_0) + \nabla (c_0 \varepsilon \tau_0 \mathbf{v}) &= -\nabla \mathbf{q} - \psi + \varepsilon h_0 \\ \partial / \partial t (c_1 \rho \tau_1) + \nabla (c_1 \rho \tau_1 \mathbf{w}) &= \psi + \varepsilon h_1 \end{aligned}$$

Используя уравнения сохранения массы фаз, полученные в [2], из (1.10) и (1.11) имеем также

$$(1.12) \quad \begin{aligned} c_0 \varepsilon (\partial/\partial t + \mathbf{v}\nabla) \tau_0 + c_1 \rho (\partial/\partial t + \mathbf{w}\nabla) \tau_1 &= -\nabla \mathbf{q} + \varepsilon h_0 + \rho h_1 \\ c_0 \varepsilon (\partial/\partial t + \mathbf{v}\nabla) \tau_0 &= -\nabla \mathbf{q} - \psi + \varepsilon h_0 \\ c_1 \rho (\partial/\partial t + \mathbf{w}\nabla) \tau_1 &= \psi + \rho h_1 \end{aligned}$$

Ясно, что первое уравнение (1.12) представляет собой сумму двух других.

Таким образом, приходим к модели, согласно которой дисперсная среда представляется в виде суперпозиции двух континуумов, обладающих не только разными скоростями, но и разными температурами, причем перенос тепла в этих континуумах описывается двумя последними уравнениями (1.12), а уравнения, определяющие их движение, сформулированы в [2]. (Подчеркнем, что речь идет лишь о монодисперсной системе; в общем случае системы, содержащей частицы разных размеров, число таких континуумов может быть больше.) Уравнения (1.12) содержат неизвестные величины $\psi(t, \mathbf{r})$ и $\mathbf{q}(t, \mathbf{r})$, определяемые в соответствии с (1.8) и (1.9) через средние температуры и поток тепла на поверхности отдельной частицы. Проблема их определения в виде функций или функционалов от неизвестных переменных в (1.12) и физических параметров аналогична по смыслу проблеме получения реологических уравнений состояния суспензии, встречающейся при построении ее континуальной гидромеханики и подробно рассмотренной в [2,3].

2. Следуя общему методу [3], сформулируем усредненное уравнение, характеризующее перенос тепла в непрерывной фазе вблизи некоторой выделенной (пробной) частицы, решение которого позволит вычислить средние температуру и поток тепла на поверхности пробной частицы и тем самым вычислить $\psi(t, \mathbf{r})$ и $\mathbf{q}(t, \mathbf{r})$ из (1.8) и (1.9) и замкнуть систему уравнений (1.12). Для этой цели нужно ввести понятия об ансамбле возможных пространственных расположений (конфигураций) частиц дисперсной фазы и о процедурах усреднения по ансамблю. Учитывая, что свойства ансамбля конфигураций подробно изложены в [3], а также рассматривались в [4,5] применительно к задаче об эффективной теплопроводности композитных зернистых материалов, ниже используем математический аппарат усреднений из [3-5] без специальных оговорок.

Отметим здесь только основные допущения, принятые ниже. Во-первых, расположение частиц предполагается случайным (хаотическим). Во-вторых, принимается условие «ослабления корреляций», согласно которому условные средние, получаемые путем усреднения по функции распределения частиц при условии, что некоторая фиксированная точка занята центром пробной частицы, асимптотически стремятся к соответствующим безусловным средним при удалении от этой точки. В-третьих, предполагается, что средняя температура непрерывной фазы в некоторой точке совпадает приближенно с величиной, полученной путем усреднения температуры только по таким конфигурациям, для которых было бы возможно присутствие центра одной из частиц в этой точке. Степень справедливости этих допущений для материалов с неподвижными фазами и для движущихся суспензий, налагаемые ими ограничения, а также возможные пути обобщения результатов, получаемых на основе этих допущений, подробно обсуждены в [3].

Получим сначала уравнение, описывающее перенос тепла в непрерывной фазе «в среднем», используя для этой цели безусловное усреднение по ансамблю. Умножая уравнение (1.3) на функцию $\theta(t, \mathbf{r})$ и усредняя,

получаем

$$(2.1) \quad c_0 \langle \theta (\partial / \partial t + \mathbf{C}\nabla) T \rangle = - \nabla \langle \theta \mathbf{Q} \rangle + \langle \mathbf{Q}\nabla\theta \rangle + \langle \theta H \rangle$$

Уравнение (2.1) содержит ту же физическую информацию, то и аналогичное уравнение, получаемое усреднением по объему, т. е. второе уравнение (1.12). Условие совпадения этих уравнений составляет содержание эргодического условия, аналогичного сформулированному в [3]. Сравнивая указанные уравнения, получаем следующие соотношения, связывающие объемные и ансамблевые средние:

$$(2.2) \quad \begin{aligned} \langle \theta (\partial / \partial t + \mathbf{C}\nabla) T \rangle &= - \varepsilon (\partial / \partial t + \mathbf{v}\nabla) \tau_0 \\ - \nabla \langle \theta \mathbf{Q} \rangle + \langle \mathbf{Q}\nabla\theta \rangle &= \lambda_0 \nabla \frac{1}{b} \int \frac{\partial T}{\partial \mathbf{r}} \Big|_{t, \mathbf{r}+\mathbf{r}'} d\mathbf{r}' + \\ &+ (\lambda_1 - \lambda_0) \nabla \left(n \oint \langle T \rangle \mathbf{n}' d\mathbf{r} \right) + n \oint \langle Q \rangle \mathbf{n}' d\mathbf{r} \\ \langle \theta T \rangle &= \varepsilon \tau_0, \quad \langle \theta H \rangle = \varepsilon h_0 \end{aligned}$$

Здесь были использованы определения (1.8) и (1.9).

Используя явное выражение для $\theta(t, \mathbf{r})$

$$(2.3) \quad \theta(t, \mathbf{r}) = \sum_{j=1}^N \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}^{(j)}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}^{(j)}|} \delta(|\mathbf{r} - \mathbf{r}^{(j)}| - a) = \sum_{j=1}^N \mathbf{n}' \delta(|\mathbf{r} - \mathbf{r}^{(j)}| - a)$$

где $\mathbf{r}^{(j)}$ — радиус-векторы центров частиц, нетрудно получить представление для $\langle \mathbf{Q}\nabla\theta \rangle$ в некоторой точке \mathbf{r} в виде интеграла по возможным положениям центра сферической частицы, таким, что точка \mathbf{r} лежит на поверхности частицы [6]. Разлагая подынтегральное выражение в ряд по степеням компонент вектора, соединяющего центр частицы с \mathbf{r} , и интегрируя ряд почленно, приходим к представлению $\langle \mathbf{Q}\nabla\theta \rangle$ в виде распределенных тепловых мультиполей. Таким образом, перенос тепла в непрерывной фазе, занимающей пространство между частицами, может быть формально описан как перенос тепла в некоторой фиктивной среде, заполняющей все пространство и содержащей распределенные тепловые источники, диполи и т. д.

Отметим, что такое описание влияния частиц на процесс переноса тепла в непрерывной фазе по смыслу аналогично описанию влияния частиц на движение жидкости в промежутках между ними, предложенному в [3]. Иным, более феноменологическим путем указанное мультипольное разложение было получено в [4,5], где рассматривалось, однако, лишь «дипольное приближение», когда влиянием тепловых квадруполь и мультиполей более высокого ранга пренебрегали. Дипольное приближение было использовано также при вычислении эффективной теплопроводности зернистых материалов со сфероидальными включениями в [7]. Заметим также, что из феноменологических соображений представление о фиктивной среде, окружающей пробную частицу, вводилось и ранее. Обзор работ этого направления имеется в [8].

Уравнение, описывающее перенос тепла вблизи пробной частицы с центром в точке $\mathbf{r} = 0$, получается совершенно аналогично уравнению (2.1), если использовать условное усреднение только по тем конфигурациям всех остальных частиц, которые совместимы с фактом расположения центра пробной частицы в фиксированной точке. Обозначая такое усреднение угловыми скобками со штрихом и пренебрегая по-прежнему членами, квадратичными по пульсациям величин относительно их средних значений, получаем в системе координат, связанной с центром пробной частицы

$$(2.4) \quad c_0 \langle \langle \theta \rangle' (\partial / \partial t + \mathbf{U}\nabla) \langle T \rangle' \rangle = - \nabla \langle \langle \theta \mathbf{Q} \rangle' \rangle + \langle \langle \mathbf{Q}\nabla\theta \rangle' \rangle + \langle \langle \theta H \rangle' \rangle$$

Это — уравнение того же типа, что и рассматривавшееся в [3], причем величину $U = \langle \theta C \rangle'$, подробно исследованную в [3], можно считать здесь известной функцией координат и времени. Условные средние вида $\langle \varphi \rangle'$ в (2.4) зависят от r и обращаются в величины, характерные для чистой фазы, на поверхности пробной частицы (т. е. при $r = a$) и в величины, специфические для введенной фиктивной среды, при $r = 3a$ (ср. с аналогичной ситуацией в [3]).

Определение конкретной зависимости величин $\langle \varphi \rangle'$ от r вблизи поверхности пробной частицы весьма сложно, но для практических целей достаточно, по-видимому, рассмотреть две приближенные модели. Первая из них справедлива для систем умеренной концентрации вплоть до $\rho \approx 0.2 - 0.3$. В рамках этой модели можно вообще пренебречь существованием слоя резкого изменения параметров у поверхности $r = a$, положив просто $\langle \varphi \rangle' = \langle \varphi \rangle$. Как следует из анализа в [3], это соответствует пренебрежению эффектом неперекрываемости частиц дисперсной фазы. В рамках второй модели указанный слой аппроксимируется слоем $a \leq r \leq 2a$, заполненным чистой непрерывной фазой. Такая аппроксимация оказывается точной, если рассматривать задачу в приближении, в котором учитывается лишь конечное число распределенных тепловых мультиполей, как это было сделано, например, в [4,5,7]. Феноменологическое представление о таком слое было введено в [9].

В первом случае перенос тепла вне пробной частицы описывается фактически уравнением (2.1). Во втором уравнение (2.1) справедливо лишь при $r > 2a$, а в слое $a \leq r \leq 2a$ перенос тепла управляется обычным уравнением конвективной теплопроводности (1.3) для чистой непрерывной фазы. Очевидно, на поверхности $r = 2a$ должны выполняться условия непрерывности температуры и потока тепла.

Перенос тепла внутри пробной частицы описывается уравнением

$$(2.5) \quad c_1 (\partial / \partial t + \mathbf{W} \nabla) \langle T \rangle' = \lambda_1 \Delta \langle T \rangle' + \langle H \rangle', \quad \langle H \rangle' = h_1$$

где \mathbf{W} — скорость, обусловленная возможным вращением пробной частицы. На поверхности $r = a$ также налагаются условия непрерывности температуры и потока тепла.

Сформулированная задача будет замкнутой, если найти выражение величины $-\nabla \langle \theta Q \rangle + \langle Q \nabla \theta \rangle$, появляющейся в уравнении переноса тепла в фиктивной среде, в виде функции или функционала от неизвестных температур $\langle T \rangle'(t, r)$ и $\tau_0(t, r)$. Используя линейность задачи и соображения, полностью аналогичные таковым в [3], представим

$$(2.6) \quad -\nabla \langle \theta Q \rangle + \langle Q \nabla \theta \rangle = \int [\sigma(\omega) T_0^{(\omega)}(\omega, r) + \lambda_a(\omega) \Delta T_0^{(\omega)}(\omega, r)] e^{i\omega t} d\omega$$

где $T_0^{(\omega)}(\omega, r)$ — фурье-преобразование величины $\langle T \rangle'(t, r)$. Коэффициенты $\lambda_a(\omega)$ и $\sigma(\omega)$ характеризуют соответственно «кажущуюся» теплопроводность непрерывной фазы и обмен теплом между фазами [4, 5]. Они должны определяться апостериори из второго условия (2.2).

Связь между $\langle T \rangle'(t, r)$ и $\tau_0(t, r)$ дается выражением

$$(2.7) \quad \lim_{r \rightarrow \infty} \langle T \rangle'(t, r) = \tau_0(t, r)$$

окончательно замыкающим задачу о теплопроводности вблизи пробной частицы.

Формулировка граничного условия (2.7) требует некоторого пояснения. Функция $\langle T \rangle'(t, r)$ существенно отличается от средней температуры $\tau_0(t, r)$ лишь на расстояниях $r - a \sim l \sim a$ от поверхности пробной частицы и практически совпадает с ней при $r - a \gg l$, причем в области

$r - a < L$ величина $\tau_0(t, r)$ может приближенно рассматриваться как не зависящая от r . Учитывая принятое допущение $L \gg l$ и используя основную идею метода сращиваемых асимптотических разложений, равенство величин $\langle T \rangle'(t, r)$ и $\tau_0(t, r)$ в области $r - a \gg l$ можно заменить асимптотическим соотношением (2.7), налагаемым при $r - a \rightarrow \infty$.

Из вида уравнения (1.12) следует, что для стационарного процесса переноса тепла в неподвижном зернистом материале удобно рассматривать единственное уравнение

$$(2.8) \quad -\nabla \mathbf{q} + h = 0, \quad h = \varepsilon h_0 + \rho h_1$$

В этом случае полезно ввести среднюю температуру материала

$$(2.9) \quad \tau = \varepsilon \tau_0 + \rho \tau_1$$

и коэффициент его эффективной теплопроводности, определяемый как коэффициент пропорциональности между средним потоком тепла \mathbf{q} и градиентом средней температуры $\nabla \tau$. Обозначая этот коэффициент через λ , вместо (2.6) запишем в рассматриваемом случае

$$(2.10) \quad -\nabla \langle \theta \mathbf{Q} \rangle + \nabla \langle \mathbf{Q} \nabla \theta \rangle = \lambda \Delta \langle T \rangle'$$

Зависимость λ от параметров материала также определяется после решения задачи о теплопроводности вблизи пробной частицы из второго соотношения (2.2). Для иллюстрации ниже рассмотрена именно эта задача; ее решение позволяет также уточнить выражение для эффективной теплопроводности зернистых материалов, полученное в [4, 5].

3. На основании результатов в п. 2 задача о стационарной теплопроводности вблизи пробной частицы умеренно концентрированного материала с неподвижными фазами может быть записана в форме

$$(3.1) \quad \Delta T = \Delta T_1 = 0, \quad T = \tau \quad (r \rightarrow \infty) \\ T = T_1, \quad \lambda \mathbf{n} \nabla T = \lambda_1 \mathbf{n} \nabla T_1 \quad (r = a)$$

Угловые скобки в обозначениях независимых переменных для простоты опущены; T и T_1 в (3.1) представляют собой среднюю температуру вне и внутри пробной частицы соответственно, температура $\tau(r)$ определена в (2.9) и рассматривается здесь как некая известная функция. Отметим, что такая же задача получится и для пробной частицы движущейся суспензии, если мало число Пекле, характеризующее теплообмен с пробной частицей, а процесс теплопереноса близок к стационарному.

Представим $\tau(r)$ в виде разложения по сферическим функциям $Y_n(\vartheta, \varphi)$, где ϑ и φ — угловые координаты сферической системы координат

$$(3.2) \quad \tau(\mathbf{r}) = \sum_n A_n r^n Y_n(\vartheta, \varphi)$$

причем A_n рассматриваются как известные коэффициенты. Решение задачи (3.1), (3.2) имеет вид

$$(3.3) \quad T = \sum_n (\alpha_n r^n + \gamma_n r^{-(n+1)}) Y_n, \quad T_1 = \sum_n \alpha_n^{(1)} r^n Y_n$$

Коэффициенты α_n , γ_n и $\alpha_n^{(1)}$ определяются из уравнений

$$(3.4) \quad \alpha_n = A_n, \quad \alpha_n + \gamma_n a^{-(2n+1)} = \alpha_n^{(1)} \\ n \alpha_n - (n+1) \gamma_n a^{-(2n+1)} = n \alpha_n^{(1)}$$

Можно видеть, что вклад в интегралы по поверхности пробной частицы, фигурирующие в (2.2), вносят только члены (3.3) с $n = 1$. Поэтому достаточно рассмотреть только частное решение задачи, соответствующее функции $\tau(r) = Er$, где E — градиент средней температуры материала. Такое решение имеет вид

$$(3.5) \quad T = \left[1 - \frac{\lambda_1 - \lambda}{\lambda_1 + 2\lambda} \left(\frac{a}{r} \right)^3 \right] Er, \quad T_1 = \frac{3\lambda}{\lambda_1 + 2\lambda} Er$$

где λ — эффективная теплопроводность материала, введенная в (2.10). Из второго соотношения (2.2) получаем, используя (1.9) и (3.5)

$$(3.6) \quad q = -\lambda E = - \left[\lambda_0 + \frac{3\lambda(\lambda_1 - \lambda_0)}{\lambda_1 + 2\lambda} \rho \right] E$$

Отсюда следует уравнение для λ , решение которого

$$(3.7) \quad \begin{aligned} \lambda &= \beta \lambda_0, \quad \kappa = \lambda_1 / \lambda_0 \\ \beta &= 1/4 \{ 2 - 3\rho - \kappa(1 - 3\rho) + [(2 - 3\rho - \kappa(1 - 3\rho))^2 + 8\kappa]^{1/2} \} \end{aligned}$$

Нетрудно получить также асимптотические формулы, справедливые при $\kappa \rightarrow 0$ (например, для пористых тел) и при $\kappa \rightarrow \infty$ (например, для топлив с низкой теплопроводностью, содержащих металлические включения). Во втором случае величина $\beta = \lambda / \lambda_0$ остается конечной, если $\rho < 1/3$, и обращается в бесконечность пропорционально $\kappa = \lambda_1 / \lambda_0$, если $\rho > 1/3$. Последнее обусловлено тем, что при высоких ρ рассматриваемая модель, верная лишь для умеренно концентрированных материалов, перестает быть применимой [4,5]. Зависимость β из (3.7) от κ при разных ρ показана на фигуре пунктиром.

Для материалов с высокой концентрацией дисперсной фазы вместо (3.1) имеем

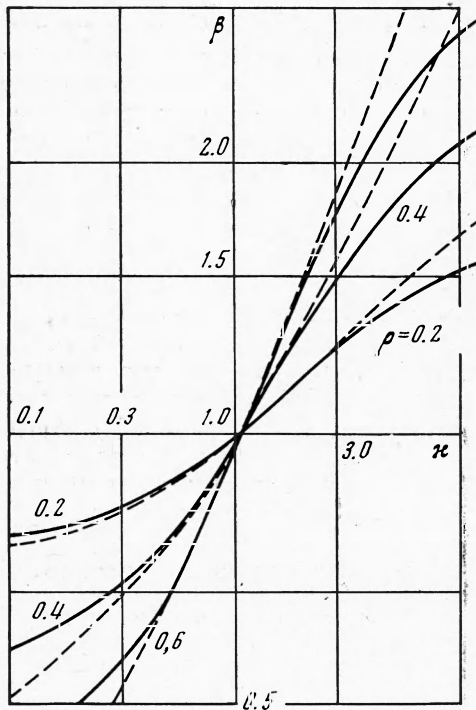
$$(3.8) \quad \begin{aligned} \Delta T &= \Delta T_* = \Delta T_1 = 0 \\ T &= \tau(r \rightarrow \infty) \\ T &= T_*, \quad \lambda n \nabla T = \\ &= \lambda_0 n \nabla T_* \quad (r = 2a) \\ T_* &= T_1, \quad \lambda_0 n \nabla T_* = \\ &= \lambda_1 n \nabla T_1 \quad (r = a) \end{aligned}$$

Решение этой задачи при $\tau(r) = Er$ было получено в [4,5]. Для величины q в данном случае получаем вместо (3.6)

$$(3.9) \quad q = -\lambda E = - \left[\lambda_0 + \frac{36\lambda(\lambda_1 - \lambda_0)\lambda_0}{\lambda(7\lambda_1 + 17\lambda_0) + \lambda_0(5\lambda_1 + 7\lambda_0)} \rho \right] E$$

Решение соответствующего (3.9) уравнения для $\beta = \lambda / \lambda_0$ есть

$$(3.10) \quad \beta = (7\kappa + 17)^{-1} \{ \kappa(1 + 18\rho) + 5 - 18\rho + [(\kappa(1 + 18\rho) + 5 - 18\rho)^2 + (7\kappa + 17)(5\kappa + 7)]^{1/2} \}$$



Величина β из (3.10) остается конечной при любых κ и ρ ; ее зависимость от κ и ρ проиллюстрирована сплошными кривыми на фигуре.

При малых ρ и значениях κ , близких к единице, формулы (3.7) и (3.10) дают практически одинаковые результаты, совпадая при $\rho \rightarrow 0$ с известной формулой Максвелла.

Отметим, что зависимости эффективной теплопроводности от ρ и κ , следующие из (3.7) и (3.10), несколько отличаются от аналогичных зависимостей в [4, 5], полученных в рамках дипольного приближения, и могут рассматриваться как уточнения последних.

Формулы (3.6) или (3.9) позволяют замкнуть уравнение (2.8), описывающее стационарную теплопроводность в зернистом материале. В общем случае, когда, во-первых, процесс существенно нестационарен, а во-вторых, фазы материала подвижны, причем число Пекле для отдельной частицы не мало, для замыкания системы (1.12) макроскопических уравнений теплопереноса необходимо решать значительно более сложную задачу о конвективной теплопроводности в окрестности пробной частицы. Подчеркнем, что в этом случае удобнее рассматривать кажущуюся теплопроводность λ_a фиктивной среды (т. е. использовать (2.6), а не (2.10)), а эффективная теплопроводность материала «в целом» вообще лишается физического смысла.

Заметим, что ввиду аналогии математических формулировок соответствующих задач [4, 5] формулы (3.7) и (3.10) могут быть использованы не только для вычисления эффективных теплопроводности или коэффициента диффузии примеси в дисперсной среде, но и при определении диэлектрической или магнитной постоянных и электропроводности дисперсных материалов.

Поступила 4 I 1974

ЛИТЕРАТУРА

1. Рахматулин Х. А. Основы газодинамики взаимопроникающих движений сжимаемых сред. ПММ, 1956, т. 20, вып. 2.
2. Бувевич Ю. А., Марков В. Г. Континуальная механика монодисперсных суспензий. Интегральные и дифференциальные законы сохранения. ПММ, 1973, т. 37, вып. 5.
3. Бувевич Ю. А., Марков В. Г. Континуальная механика монодисперсных суспензий. Реологические уравнения состояния для суспензий умеренной концентрации. ПММ, 1973, т. 37, вып. 6.
4. Бувевич Ю. А. Об эффективной теплопроводности зернистых материалов. ПМТФ, 1973, № 4.
5. Buevich Yu. A. On the thermal conductivity of granular materials. Chem. Engng Sci., 1974, vol. 29, No. 1.
6. Lundgren T. S. Slow flow through stationary random beds and suspensions of spheres. J. Fluid Mech., 1972, vol. 51, pt. 2.
7. Щелчкова И. Н. Эффективная теплопроводность гетерогенной среды с эллипсоидальными частицами. ПМТФ, 1974, № 1.
8. Hashin Z. Assesment of the self-consistent scheme approximation: conductivity of particulare composites. J. Composite Materials, 1968, vol. 2, No. 3.
9. Kerner E. H. The electrical conductivity of composite media. Proc. Phys. Soc., Ser. 1956, vol. 69, No. 8.