реализуется конфигурация, при которой нулевая линия тока в отходящих струях имеет минимальную кривизну. С точки зрения устойчивости, однако, ни одна из конфигураций не обладает никакими преимуществами перед любой другой, поскольку, как и любая другая, неустойчива в рамках идеальной несжимаемой жидкости.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Лаврентьев М. А.** Кумулятивный заряд и принципы его работы // УМН.— 1957.— Т. 12, вып. 4.
2. **Birkhoff G., Dougal D. Mc. et al.** Explosives with lined cavities // J. Appl. Phys.— 1948.— V. 19, N 6.
3. **Гуревич М. И.** Теория струй идеальной жидкости.— М.: Наука, 1979.
4. **Милн-Томсон Л. М.** Теоретическая гидродинамика.— М.: Мир, 1964.
5. **Allen W. A., Mapes J. M., Wilson W. G.** An effect produced by oblique impact of a cylinder on a thin target // J. Appl. Phys.— 1954.— V. 25, N 5.
6. **Дерибас А. А.** Физика упрочнения и сварки взрывом.— Новосибирск: Наука, 1980.
7. **Кудинов В. М., Коротеев А. Я.** Сварка взрывом в металлургии.— М.: Металлургия, 1978.
8. **Cowan G., Holtzman A.** Flow configuration in colliding plates // J. Appl. Phys.— 1963.— V. 34, N 4.
9. **Schmidtmann E., Koch W., Scheen H.** Vorgänge beim Explosivschweissen metallischen Werkstoffe // Arch. Eisenhüttenwesen.— 1965.— Bd 36, N 9.
10. **Reid S. R., Sherif N. H. S.** Prediction of the wavelength of interface waves in symmetrical explosive welding // J. Mech. Engng Sci.— 1976.— V. 18, N 2.
11. **Robinson J. L.** The mechanics of wave formation in impact welding // Phil. Mag.— 1975.— V. 31, N 3.
12. **Уткин А. В., Дремин А. Н. и др.** Волнообразование при высокоскоростном соударении металлов // ФГВ.— 1980.— № 4.
13. **Уткин А. В., Дремин А. Н.** Неустойчивость течения, возникающего при симметричном соударении струй идеальной жидкости // ФГВ.— 1986.— № 3.
14. **Гуревич М. И., Хаскинд М. Д.** Струйное обтекание контура, совершающего малые колебания // ПММ.— 1953.— Т. 17, вып. 5.
15. **Fox J. L., Morgan G. M.** On the stability of some flows on an ideal fluid with free surfaces // Quart. Appl. Math.— 1954.— V. 11, N 4.
16. **Кузнецов А. В.** Нестационарные возмущения течений жидкости со свободными границами.— Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1975.
17. **Камке Э.** Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям.— М.: Наука, 1971.
18. **Ламб Г.** Гидродинамика.— М.; Л.: Гостехиздат, 1947.
19. **Palatini A.** Sulla confluenza di due vene // Atti del R. Instituto Venetto di Sc. L. ed Arti.— 1916.— T. 75.
20. **Тришин Ю. А.** Несимметричное соударение струй идеальной несжимаемой жидкости // ПМТФ.— 1986.— № 5.
21. **Кинеловский С. А., Соколов А. В.** О несимметричном соударении плоских струй идеальной несжимаемой жидкости // ПМТФ.— 1986.— № 1.

Поступила 22/IX 1987 г.

УДК 532.529

О ДВИЖЕНИИ ГАЗОВОГО ПУЗЫРЯ В ВЯЗКОЙ ВИБРИРУЮЩЕЙ ЖИДКОСТИ

В. Л. Сенницкий

(Новосибирск)

Имеется значительное число работ (см., например, [1—5]), содержащих результаты исследований теоретического характера, относящихся к движению газового пузыря в вибрирующей жидкости.

В данной работе рассматривается следующая задача. Замкнутый сосуд, заполненный вязкой несжимаемой жидкостью, в которой находится газовый пузырь, совершает заданные периодические поступательные колебания относительно инерциальной системы прямоугольных координат X, Y, Z (колебания сосуда имеют период T и происходят вдоль оси Z). При этом сосуд заданным образом деформируется (сжимается и разжимается). Положение газового пузыря относительно системы координат X,

Y, Z характеризуется радиусом-вектором

$$\mathbf{S} = \frac{1}{Q} \iiint\limits_{\Omega_{XYZ}} \mathbf{R}\, dX\, dY\, dZ,$$

где $\mathbf{R} = (X, Y, Z)$; Ω_{XYZ}—область, занимаемая газом (газовый пузырь); Q — объем газа. Течение жидкости рассматривается относительно системы координат $X_1 = X - S_X$, $X_2 = Y - S_Y$, $X_3 = Z - S_Z$ (S_X, S_Y, S_Z — соответственно X-, Y-, Z-компоненты вектора $\mathbf{S}$). Наименьшее расстояние от газового пузыря до стенок сосуда велико по сравнению с наибольшим размером газового пузыря, ввиду чего стенки сосуда считаются удаленными от газового пузыря на бесконечность. Скорость $\mathbf{V}$ течения жидкости удовлетворяет условию

$$\mathbf{V} \sim \widetilde{U}\mathbf{k} - d\mathbf{S}/dt \quad \text{при} \quad X_1^2 + X_2^2 + X_3^2 \to \infty,$$

где t — время; $\widetilde{U} = \operatorname{Real} \sum\limits_{m=1}^{\infty} U_m e^{2m\pi i t/T}$ (U_m — постоянные); $\mathbf{k} = (0, 0, 1)$. В соответствии с этим, давление P в жидкости удовлетворяет условию

$$P \sim -\rho\,(d\widetilde{U}/dt)\, X_3 + \widetilde{P} \quad \text{при} \quad X_1^2 + X_2^2 + X_3^2 \to \infty,$$

где ρ — плотность жидкости; $\widetilde{P}$ — функция от t. Зависимость $\widetilde{P}$ от t определяется тем, как деформируется сосуд. Предполагается, что

$$\widetilde{P} = P_0 + \operatorname{Real} \sum_{m=1}^{\infty} P_m e^{2m\pi i t/T}$$

(P_0, P_m — постоянные). Течение жидкости является установившимся (не зависящим от начальных условий). В отсутствие колебаний и деформаций сосуда (при $U_m = P_m = 0$ ($m = 1, 2, \ldots$)) газовый пузырь представляет собой шар $\sqrt{X_1^2 + X_2^2 + X_3^2} \leqslant A_0$, $\mathbf{V} = 0$, $P = P_0$. Давление $P_\text{г}$ в газе и объем газа связаны уравнением адиабаты

$$P_\text{г} Q^\gamma = P_{\text{г}0} Q_0^\gamma,$$

где γ — показатель адиабаты; $P_{\text{г}0} = P_0 + 2\sigma/A_0$ (σ — коэффициент поверхностного натяжения); $Q_0 = (4\pi/3)\, A_0^3$. Требуется найти, как газовый пузырь движется относительно системы координат X, Y, Z, т. е. определить, как $\mathbf{S}$ зависит от t.

1. Пусть $\tau = t/T$; $x_1 = X_1/A_0$; $x_2 = X_2/A_0$; $x_3 = X_3/A_0$; $\mathbf{r} = (x_1, x_2, x_3)$; $r = |\mathbf{r}|$; Γ — поверхность, ограничивающая область $\Omega_{x_1x_2x_3}$, занимаемую газом (свободная граница области, занимаемой жидкостью); H — средняя кривизна Γ; $\eta = A_0\mathrm{H} - 1$; $\mathbf{n}$ — единичная внешняя нормаль к Γ; Ξ — скорость Γ в направлении $\mathbf{n}$; $\xi = T\,\Xi\,/A_0$; $\mathbf{v} = (v_i) = T\mathbf{V}/A_0$; $p = T^2(P - P_0)/(\rho A_0^2)$; $\mathbf{w} = (1/A_0) d\mathbf{S}/d\tau$; ν — кинематический коэффициент вязкости жидкости; $\mathrm{Re} = A_0^2/(\nu T)$ — число Рейнольдса; $\mathbf{P}$ — тензор напряжений в жидкости; $\mathbf{I} = (I_{ij})$ — единичный тензор; $\mathbf{p} = (p_{ij}) = T^2\,(\mathbf{P} + P_0\mathbf{I})/(\rho A_0^2)$ ($p_{ij} = -pI_{ij} + (1/\mathrm{Re})(\partial v_i/\partial x_j + \partial v_j/\partial x_i)$); $\widehat{P}$ — наибольшее значение $|\widetilde{P} - P_0|$; $\widetilde{p} = (\widetilde{P} - P_0)/\widehat{P} = \operatorname{Real} \sum\limits_{m=1}^{\infty} p_m e^{2m\pi i\tau}$; $\widehat{U}$ — наибольшее значение $|\widetilde{U}|$; $\widetilde{u} = \widetilde{U}/\widehat{U} = \operatorname{Real} \sum\limits_{m=1}^{\infty} u_m e^{2m\pi i\tau}$; $\varepsilon = \widehat{U}T/A_0$; $\varkappa = \widehat{P}T^2/(\rho A_0^2)$; $\lambda = \sigma T^2/(\rho A_0^3)$; $\mu = P_{\text{г}0}T^2/(\rho A_0^2)$; $p_\text{г} = T^2\,(P_\text{г} - P_{\text{г}0})/(\rho A_0^2) = \mu\,(Q_0^\gamma/Q^\gamma - 1)$.

Уравнение поверхности Γ, уравнения Навье — Стокса и неразрывности и условия, которые должны выполняться на Γ и при $r \to \infty$, имеют следующий вид:

(1.1) $$\chi = 0$$

$$(\chi < 0 \ \text{в} \ \Omega_{x_1x_2x_3}, \ \chi > 0 \ \text{вне} \ \Omega_{x_1x_2x_3});$$

$$(1.2)\qquad \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \tau}+(\mathbf{v}\cdot\nabla)\,\mathbf{v}+\nabla p-\frac{1}{\mathrm{Re}}\,\Delta\mathbf{v}+\frac{d\mathbf{w}}{d\tau}=0;$$

$$(1.3)\qquad \nabla\cdot\mathbf{v}=0;$$

$$(1.4)\qquad \mathbf{n}\cdot\mathbf{v}-\xi=0,\ \mathbf{n}\cdot\mathbf{p}+(p_{\Gamma}-2\lambda\eta)\mathbf{n}=0 \text{ на } \Gamma;$$

$$(1.5)\qquad \mathbf{v}\sim\varepsilon\tilde{u}\mathbf{k}-\mathbf{w},\ \ p\sim-\varepsilon\frac{d\tilde{u}}{d\tau}x_3+\varkappa\tilde{p}\quad \text{при}\quad r\to\infty.$$

Должно выполняться также соотношение

$$(1.6)\qquad \iiint\limits_{\Omega_{x_1x_2x_3}}\mathbf{r}\,dx_1dx_2dx_3=0.$$

Для того чтобы определить зависимость $\mathbf{S}$ от t, необходимо найти решение χ, $\mathbf{v}$, p, $\mathbf{w}$ задачи (1.1) —(1.6).

2. Будем рассматривать задачу (1.1)—(1.6) при малых по сравнению с единицей значениях ε.

Предположим, что при $\varepsilon\to 0$

$$(2.1)\qquad \chi\sim\chi^{(0)}+\varepsilon\chi^{(1)},\ \ \mathbf{v}\sim\mathbf{v}^{(0)}+\varepsilon\mathbf{v}^{(1)},$$
$$p\sim p^{(0)}+\varepsilon p^{(1)},\ \ \mathbf{w}\sim\mathbf{w}^{(0)}+\varepsilon\mathbf{w}^{(1)}.$$

Согласно (1.1)—(1.6), (2.1), в M-м ($M=0,1$) приближении имеем

$$(2.2)\qquad \chi^{(0)}+M\varepsilon\chi^{(1)}=0$$

— уравнение поверхности $\Gamma^{(M)}$, ограничивающей область $\Omega^{(M)}$, занимаемую газом;

$$(2.3)\qquad \frac{\partial\mathbf{v}^{(M)}}{\partial\tau}+\left(\mathbf{v}^{(0)}\cdot\nabla\right)\mathbf{v}^{(M)}+M\left(\mathbf{v}^{(1)}\cdot\nabla\right)\mathbf{v}^{(0)}+\nabla p^{(M)}-\frac{1}{\mathrm{Re}}\,\Delta\mathbf{v}^{(M)}+\frac{d\mathbf{w}^{(M)}}{d\tau}=0;$$

$$(2.4)\qquad \nabla\cdot\mathbf{v}^{(M)}=0;$$

$$(2.5)\qquad \lim_{\varepsilon\to 0}\left[\varepsilon^{-M}\left(\mathbf{n}^{(M)}\cdot\mathbf{v}-\xi^{(M)}\right)\Big|_{\Gamma^{(M)}}\right]=0,$$
$$\lim_{\varepsilon\to 0}\left\{\varepsilon^{-M}\left[\mathbf{n}^{(M)}\cdot\mathbf{p}+\left(p_{\Gamma}^{(M)}-2\lambda\eta^{(M)}\right)\mathbf{n}^{(M)}\right]\Big|_{\Gamma^{(M)}}\right\}=0;$$

$$(2.6)\qquad \mathbf{v}^{(M)}\sim M\tilde{u}\mathbf{k}-\mathbf{w}^{(M)},\quad p^{(M)}\sim(1-M)\,\varkappa\tilde{p}-M\frac{d\tilde{u}}{d\tau}x_3\quad \text{при}\quad r\to\infty;$$

$$(2.7)\qquad \iiint\limits_{\Omega^{(M)}}\mathbf{r}\,dx_1dx_2dx_3=0,$$

где $\mathbf{n}^{(M)}$, $\eta^{(M)}$, $\xi^{(M)}$, $p_{\Gamma}^{(M)}$ — соответственно $\mathbf{n}$, η, ξ, p_{Γ} при $\Gamma=\Gamma^{(M)}$.

Пусть $M=0$.

В нулевом приближении газовый пузырь представляет собой шар $r\leqslant 1+a$, центр которого покоится относительно системы координат X, Y, Z, течение жидкости симметрично относительно начала координат x_1, x_2, x_3. Ввиду этого,

$$(2.8)\qquad \chi^{(0)}=r-1-a;$$

$$(2.9)\qquad \mathbf{w}^{(0)}=0;$$

$$(2.10)\qquad \partial v_r^{(0)}/\partial\theta=0,\quad \partial v_r^{(0)}/\partial\varphi=0;$$

$$(2.11)\qquad v_\theta^{(0)}=0,\quad v_\varphi^{(0)}=0,$$

где r, θ, φ — сферические координаты (θ — угол между векторами (0, 0, 1) и (x_1, x_2, x_3) $(0\leqslant\theta\leqslant\pi)$; φ — угол между векторами (1, 0, 0) и $(x_1, x_2, 0)$ $(0\leqslant\varphi<2\pi)$); $v_r^{(0)}$, $v_\theta^{(0)}$, $v_\varphi^{(0)}$ — соответственно r-, θ-, φ-компоненты вектора $\mathbf{v}^{(0)}$.

Соотношение (2.7) выполняется при любых положительных значениях $1+a$. Из (2.2)—(2.6), (2.8)—(2.11) следует, что

$$(2.12)\qquad v_r^{(0)}=(1+a)^2\,(da/d\tau)/r^2;$$

$$(2.13)\qquad p^{(0)} = \varkappa\tilde{p} + \frac{(1+a)^2}{r}\left\{\frac{d^2a}{d\tau^2} + \frac{1}{1+a}\left(\frac{da}{d\tau}\right)^2\left[2 - \frac{(1+a)^3}{2r^3}\right]\right\};$$

$$(2.14)\qquad \frac{d^2a}{d\tau^2} + \frac{1}{1+a}\left\{\frac{3}{2}\left(\frac{da}{d\tau}\right)^2 + \frac{4}{\mathrm{Re}\,(1+a)}\frac{da}{d\tau} - 2\lambda\frac{a}{1+a} + \right.$$

$$\left. + \mu\left[1-(1+a)^{-3\gamma}\right] + \varkappa\tilde{p}\right\} = 0.$$

3. Пусть $M = 1$.

Будем рассматривать задачу (2.2)—(2.7) при малых по сравнению с единицей значениях $\varkappa$.

Из (2.8), (2.11)—(2.14) следует, что при $\varkappa \to 0$

$$(3.1)\qquad \chi^{(0)} \sim \chi^{(0)}_{(0)} + \varkappa\chi^{(0)}_{(1)},$$

$$\mathbf{v}^{(0)} \sim \varkappa\mathbf{v}^{(0)}_{(1)},\quad p^{(0)} \sim \varkappa p^{(0)}_{(1)},$$

где $\chi^{(0)}_{(0)} = r - 1$; $\chi^{(0)}_{(1)} = \mathrm{Re\,Real}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{p_m}{(3\gamma\mu - 2\lambda - 4m^2\pi^2)\,\mathrm{Re} + 8m\pi i}e^{2m\pi i\tau}$; $\mathbf{v}^{(0)}_{(1)} = -\left(d\chi^{(0)}_{(1)}/d\tau\right)\mathbf{r}/r^3$; $p^{(0)}_{(1)} = \tilde{p} - \left(d^2\chi^{(0)}_{(1)}/d\tau^2\right)/r$.

Уравнениями $\chi^{(0)}_{(0)} = 0$, $\chi^{(0)}_{(0)} + \varkappa\chi^{(0)}_{(1)} = 0$ определяются соответственно поверхности $\Gamma^{(0)}_{(0)}$, $\Gamma^{(0)}_{(1)}$.

Предположим, что при $\varkappa \to 0$

$$(3.2)\qquad \chi^{(1)} \sim \chi^{(1)}_{(0)} + \varkappa\chi^{(1)}_{(1)},\quad \mathbf{v}^{(1)} \sim \mathbf{v}^{(1)}_{(0)} + \varkappa\mathbf{v}^{(1)}_{(1)},$$

$$p^{(1)} \sim p^{(1)}_{(0)} + \varkappa p^{(1)}_{(1)},\quad \mathbf{w}^{(1)} \sim \mathbf{w}^{(1)}_{(0)} + \varkappa\mathbf{w}^{(1)}_{(1)}.$$

Согласно (2.2)—(2.7), (3.1), (3.2), в N-м ($N = 0, 1$) приближении имеем

$$(3.3)\qquad \chi^{(0)}_{(0)} + \varepsilon\chi^{(1)}_{(0)} + N\varkappa\left(\chi^{(0)}_{(1)} + \varepsilon\chi^{(1)}_{(1)}\right) = 0$$

— уравнение поверхности $\Gamma^{(1)}_{(N)}$, ограничивающей область $\Omega^{(1)}_{(N)}$, занимаемую газом;

$$(3.4)\qquad \frac{\partial\mathbf{v}^{(1)}_{(N)}}{\partial\tau} + \nabla p^{(1)}_{(N)} - \frac{1}{\mathrm{Re}}\Delta\mathbf{v}^{(1)}_{(N)} + \frac{d\mathbf{w}^{(1)}_{(N)}}{d\tau} = -N\left[\left(\mathbf{v}^{(0)}_{(1)}\cdot\nabla\right)\mathbf{v}^{(1)}_{(0)} + \left(\mathbf{v}^{(1)}_{(0)}\cdot\nabla\right)\mathbf{v}^{(0)}_{(1)}\right];$$

$$(3.5)\qquad \nabla\cdot\mathbf{v}^{(1)}_{(N)} = 0;$$

$$(3.6)\qquad \lim_{\varkappa\to 0}\lim_{\varepsilon\to 0}\left[\varkappa^{-N}\varepsilon^{-1}\left(\mathbf{n}^{(1)}_{(N)}\cdot\mathbf{v} - \xi^{(1)}_{(N)}\right)\Big|_{\Gamma^{(1)}_{(N)}}\right] = 0,$$

$$\lim_{\varkappa\to 0}\lim_{\varepsilon\to 0}\left\{\varkappa^{-N}\varepsilon^{-1}\left[\mathbf{n}^{(1)}_{(N)}\cdot\mathbf{p} + \left(p^{(1)}_{\Gamma(N)} - 2\lambda\eta^{(1)}_{(N)}\right)\mathbf{n}^{(1)}_{(N)}\right]\Big|_{\Gamma^{(1)}_{(N)}}\right\} = 0;$$

$$(3.7)\qquad \mathbf{v}^{(1)}_{(N)} \sim (1-N)\left(\tilde{u}\mathbf{k} - \mathbf{w}^{(1)}_{(0)}\right) - N\mathbf{w}^{(1)}_{(1)},\quad p^{(1)}_{(N)} \sim (N-1)\frac{d\tilde{u}}{d\tau}x_3 \quad \text{при } r \to \infty;$$

$$(3.8)\qquad \iiint\limits_{\Omega^{(1)}_{(N)}} \mathbf{r}\,dx_1dx_2dx_3 = 0,$$

где $\mathbf{n}^{(1)}_{(N)}$, $\eta^{(1)}_{(N)}$, $\xi^{(1)}_{(N)}$, $p^{(1)}_{\Gamma(N)}$ — соответственно $\mathbf{n}$, η, ξ, p_Γ при $\Gamma = \Gamma^{(1)}_{(N)}$.

Пусть $N = 0$.

Предположим, что $\chi^{(1)}_{(0)} = 0$. Тогда $\Gamma^{(1)}_{(0)} = \Gamma^{(0)}_{(0)}$, соотношение (3.8) выполняется, условия (3.6) сводятся к условиям

$$(3.9)\qquad v^{(1)}_{(0)r} = 0,\quad -p^{(1)}_{(0)} + \frac{2}{\mathrm{Re}}\frac{\partial v^{(1)}_{(0)r}}{\partial r} = 0,$$

$$\partial v^{(1)}_{(0)\theta}/\partial r - v^{(1)}_{(0)\theta} = 0,\quad \partial v^{(1)}_{(0)\varphi}/\partial r - v^{(1)}_{(0)\varphi} = 0 \quad \text{на } \Gamma^{(0)}_{(0)},$$

где $v^{(1)}_{(0)r}$, $v^{(1)}_{(0)\theta}$, $v^{(1)}_{(0)\varphi}$ — соответственно r-, θ-, φ-компоненты вектора $\mathbf{v}^{(1)}_{(0)}$.

Задача (3.4), (3.5), (3.7), (3.9) имеет решение

(3.10) $$v^{(1)}_{(0)r}=\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial\psi}{\partial\theta},\quad v^{(1)}_{(0)\theta}=-\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\psi}{\partial r},$$

$$v^{(1)}_{(0)\varphi}=0,\quad p^{(1)}_{(0)}=\left\{\left[-\frac{\partial^2}{\partial\tau\partial r}+\frac{1}{\mathrm{Re}}\left(\frac{\partial^3}{\partial r^3}-\frac{2}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{4}{r^3}\right)\right]\psi-\frac{dw}{d\tau}r\sin^2\theta\right\}\frac{\cos\theta}{\sin^2\theta};$$

(3.11) $$\mathbf{w}^{(1)}_{(0)}=w\mathbf{k},$$

где

$$\psi=\left[\frac{1}{2}(\tilde u-w)r^2+\frac{1}{3}\frac{w}{r}-6\,\mathrm{Real}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{u_m}{q_m^3+3q_m^2+18q_m+18}\left(q_m+\frac{1}{r}\right)e^{q_m(1-r)}\times\right.$$

$$\left.\times\, e^{2m\pi i\tau}\right]\sin^2\theta;\quad w=\mathrm{Real}\sum_{m=1}^{\infty}w_m e^{2m\pi i\tau}\ \left(w_m=3u_m\left(q_m^3+3q_m^2+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\,6q_m+6\right)/\left(q_m^3+3q_m^2+18q_m+18\right);\quad q_m=(1+i)\sqrt{m\pi\,\mathrm{Re}}\right).$$

Таким образом, $\chi^{(1)}_{(0)}\equiv 0$ и решение (3.10), (3.11) задачи (3.4), (3.5), (3.7), (3.9) являются решением задачи (3.3)—(3.8).

Пусть $N=1$.

Предположим, что $\chi^{(1)}_{(1)}=0$. Тогда $\Gamma^{(1)}_{(1)}=\Gamma^{(0)}_{(1)}$, соотношение (3.8) выполняется, условия (3.6) сводятся к условиям

(3.12) $$v^{(1)}_{(1)r}=\chi^{(0)}_{(1)}\frac{\partial v^{(1)}_{(0)r}}{\partial r},$$

$$-p^{(1)}_{(1)}+\frac{2}{\mathrm{Re}}\frac{\partial v^{(1)}_{(1)r}}{\partial r}=\chi^{(0)}_{(1)}\frac{\partial}{\partial r}\left(-p^{(1)}_{(0)}+\frac{2}{\mathrm{Re}}\frac{\partial v^{(1)}_{(0)r}}{\partial r}\right),$$

$$\frac{\partial v^{(1)}_{(1)r}}{\partial\theta}+\frac{\partial v^{(1)}_{(1)\theta}}{\partial r}-v^{(1)}_{(1)\theta}=\chi^{(0)}_{(1)}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial v^{(1)}_{(0)r}}{\partial\theta}+\frac{\partial v^{(1)}_{(0)\theta}}{\partial r}-\frac{v^{(1)}_{(0)\theta}}{r}\right),\quad \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial v^{(1)}_{(1)r}}{\partial\varphi}+$$

$$+\frac{\partial v^{(1)}_{(1)\varphi}}{\partial r}-v^{(1)}_{(1)\varphi}=0\ \text{ на }\ \Gamma^{(0)}_{(0)},$$

где $v^{(1)}_{(1)r}, v^{(1)}_{(1)\theta}, v^{(1)}_{(1)\varphi}$ — соответственно r-, θ-, φ-компоненты вектора $\mathbf{v}^{(1)}_{(1)}$. Задача (3.4), (3.5), (3.7), (3.12) имеет решение

(3.13) $$v^{(1)}_{(1)r}=\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial\psi'}{\partial\theta},\quad v^{(1)}_{(1)\theta}=-\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\psi'}{\partial r},$$

$$v^{(1)}_{(1)\varphi}=0,\quad p^{(1)}_{(1)}=\left\{\left[-\frac{\partial^2}{\partial\tau\partial r}+\frac{1}{\mathrm{Re}}\left(\frac{\partial^3}{\partial r^3}-\frac{2}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{4}{r^3}\right)\right]\psi'-\frac{dw'}{d\tau}r\sin^2\theta-\right.$$

$$\left.-\,v^{(0)}_{(1)r}\frac{\partial^2\psi}{\partial r^2}\right\}\frac{\cos\theta}{\sin^2\theta};$$

(3.14) $$\mathbf{w}^{(1)}_{(1)}=(\bar w+w')\,\mathbf{k},$$

где $$\psi'=\left\{-\frac{1}{2}(\bar w+w')r^2+\frac{\alpha_0}{r}+\beta_0 r+\Phi_0+\mathrm{Real}\sum_{m=1}^{\infty}\left[\frac{\alpha_m}{r}+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\,\beta_m\left(q_m+\frac{1}{r}\right)e^{-q_m r}+\Phi_m\right]e^{2m\pi i\tau}\right\}\sin^2\theta;\quad \bar w=\frac{1}{2}\,\mathrm{Re}\,\mathrm{Real}\sum_{m=1}^{\infty}p_m^* u_m\times$$

$$\times\frac{q_m^2\left[4\left(q_m^2+3q_m+3\right)+q_m^4 e^{q_m}\int_1^{\infty}\frac{1}{r}e^{-q_m r}dr\right]}{\left[(4m^2\pi^2-3\gamma\mu+2\lambda)\,\mathrm{Re}+8m\pi i\right]\left(q_m^3+3q_m^2+18q_m+18\right)};$$

$$w'=\mathrm{Real}\sum_{m=1}^{\infty}w'_m e^{2m\pi i\tau}$$

(p_m^* — постоянные, комплексно-сопряженные с p_m; w_m', α_0, α_m, β_0, β_m и Φ_0, Φ_m — соответственно постоянные и функции от r, определяющиеся соотношениями

$$\alpha_0 = \frac{1}{6}\left(\int_0^1 G d\tau - \varphi_0|_{r=1}\right), \quad \beta_0 = \frac{1}{6}\int_0^1 (F - 2G)\, d\tau, \quad w_m' - 2\alpha_m - 2(q_m+1)e^{-q_m}\beta_m =$$

$$= 2\left(\int_0^1 E e^{-2m\pi i\tau} d\tau + \Phi_m|_{r=1}\right), \quad 4w_m' + (q_m^2+4)\,\alpha_m + 4\,(q_m^2+q_m+1)e^{-q_m}\beta_m =$$

$$= 2\int_0^1 (4E+F)\, e^{-2m\pi i\tau} d\tau + \frac{(q_m^2+1)\operatorname{th} q_m - q_m}{\operatorname{th} q_m - q_m}\varphi_m|_{r=1} + 2(q_m^2+4)\,\Phi_m|_{r=1},$$

$$2w_m' + 2\alpha_m + (q_m^3 + 3q_m^2 + 2q_m + 2)\,e^{-q_m}\beta_m = 2\int_0^1 (2E+G)\, e^{-2m\pi i\tau} d\tau -$$

$$- \varphi_m|_{r=1} + 4\Phi_m|_{r=1},$$

$$E = -\frac{\chi_{(1)}^{(0)}}{\cos\theta}\left(\frac{\partial}{\partial r} v_{(0)r}^{(1)}\right)\bigg|_{r=1},$$

$$F = \operatorname{Re}\left\{\frac{\partial}{\partial r}\left[-\frac{\chi_{(1)}^{(0)}}{\cos\theta}\left(-p_{(0)}^{(1)} + \frac{2}{\mathrm{Re}}\frac{\partial v_{(0)r}^{(1)}}{\partial r}\right) + \frac{d\chi_{(1)}^{(0)}/d\tau}{\sin\theta} r v_{(0)\theta}^{(1)}\right]\right\}\bigg|_{r=1},$$

$$G = -\frac{\chi_{(1)}^{(0)}}{\sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial v_{(0)r}^{(1)}}{\partial\theta} + \frac{\partial v_{(0)\theta}^{(1)}}{\partial r} - \frac{v_{(0)\theta}^{(1)}}{r}\right)\right]\bigg|_{r=1},$$

$$\Phi_0 = -\frac{1}{3}\left(\frac{1}{r}\int_1^r \varphi_0 r^2 dr + r^2\int_r^\infty \frac{\varphi_0}{r}\, dr\right),$$

$$\Phi_m = -\frac{1}{3}\left(\frac{1}{r}\int_1^r \varphi_m r^2 dr + r^2\int_r^\infty \frac{\varphi_m}{r}\, dr\right),$$

$$\varphi_0 = -\frac{1}{3}\operatorname{Re}\left(\frac{1}{r}\int_1^r H_0 r^3 dr + r^2\int_r^\infty H_0 dr\right),$$

$$\varphi_m = \frac{\operatorname{Re}}{q_m^3 r}\left[(q_m r+1)\, e^{-q_m r}\int_1^r H_m(\operatorname{sh} q_m r - q_m r\operatorname{ch} q_m r)\, dr +\right.$$

$$\left. + (\operatorname{sh} q_m r - q_m r\operatorname{ch} q_m r)\int_r^\infty H_m (q_m r+1)\, e^{-q_m r} dr\right],$$

$$H_0 = \int_0^1 H d\tau, \quad H_m = 2\int_0^1 H e^{-2m\pi i\tau} d\tau,$$

$$H = -\frac{d\chi_{(1)}^{(0)}/d\tau}{r^3\sin^2\theta}\left(\frac{\partial^3}{\partial r^3} - \frac{2}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2} - \frac{2}{r^2}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{8}{r^3}\right)\psi).$$

Таким образом, $\chi_{(1)}^{(1)} \equiv 0$ и решение (3.13), (3.14) задачи (3.4), (3.5), (3.7), (3.12) являются решением задачи (3.3)—(3.8).

4. Пусть ε и $\varkappa$ малы по сравнению с единицей, и значения ε малы по сравнению с значениями $\varkappa$. Тогда соотношениями

(4.1) $$\chi = \chi^{(0)};$$

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}^{(0)} + \varepsilon\mathbf{v}_{(0)}^{(1)} + \varepsilon\varkappa\mathbf{v}_{(1)}^{(1)}; \quad p = p^{(0)} + \varepsilon p_{(0)}^{(1)} + \varepsilon\varkappa p_{(1)}^{(1)};$$

(4.2) $$\mathbf{w} = \varepsilon\mathbf{w}_{(0)}^{(1)} + \varepsilon\varkappa\mathbf{w}_{(1)}^{(1)}$$

и (2.8), (2.11)—(2.14), (3.10), (3.11), (3.13), (3.14) определяется приближенное решение задачи (1.1)—(1.6), которое (при использовании (1.1)) точно удовлетворяет (1.3), (1.5), (1.6) и приближенно, с точностью до величин, малых по сравнению с $\varepsilon\varkappa$, удовлетворяет (1.2), (1.4).

Отметим, что, согласно (1.1), (2.8), (4.1), газовый пузырь имеет форму шара, и S является радиусом-вектором его центра.

Используя (3.11), (3.14), (4.2), найдем

$$\mathbf{S} = \left(\mathrm{Real}\sum_{m=1}^{\infty} S_m e^{2m\pi i t/T} + \overline{W}t\right)\mathbf{k} + \mathbf{S}_0, \tag{4.3}$$

где $S_m = A_0\varepsilon\left(w_m + \varkappa w_m'\right)/(2m\pi i)$; $\overline{W} = (A_0/T)\varepsilon\varkappa\overline{w}$; $\mathbf{S}_0$ — постоянная. Соотношением (4.3) приближенно определяется зависимость $\mathbf{S}$ от t.

Из (4.3), в частности, следует, что газовый пузырь движется вдоль прямой линии, параллельной оси Z, и его движение состоит из колебаний и перемещения в направлении $\mathbf{k}$ (при $\overline{W} > 0$) или в направлении $-\mathbf{k}$ (при $\overline{W} < 0$). Это означает, что за счет вибраций жидкости (изменений со временем скорости течения жидкости и давления в ней) возможно перемещение газового пузыря в жидкости в заданном направлении. Причиной такого перемещения является неодинаковость условий, в которых осуществляются движения газового пузыря в положительном и отрицательном направлениях оси, вдоль которой происходят колебания сосуда.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Bleich H. H.** Effect of vibrations on the motion of small gas bubbles in a liquid // Jet propulsion.— 1956.— V. 26, N 11.
2. **Rubin E.** Behavior of gas bubbles in vertically vibrating liquid columns // Can. J. Chem. Engng.— 1968.— V. 46, N 3.
3. **Фостер, Боттс, Барбин, Вахон.** Траектория пузырей и равновесные уровни в вибрирующих столбах жидкости // Тр. Амер. о-ва инж.-мех. Сер. Д. Теор. основы инж. расчетов.— 1968.— Т. 90, № 1.
4. **Якимов Ю. Л.** Эффект избирательного дрейфа пузырьков газа в вибрирующей жидкости в зависимости от их размера // Изв. АН СССР. МЖГ.— 1978.— № 4.
5. **Пучка Г. Н.** Движение мелкодисперсных включений в колеблющемся сосуде с жидкостью, содержащей сжимаемую сферу // ПМ.— 1981.— Т. 17, № 6.

Поступила 22/VII 1987 г.

УДК 532.527

О СТРУКТУРЕ ТЕЧЕНИЯ ВРАЩАЮЩЕЙСЯ ЖИДКОСТИ ПОСЛЕ ДВИЖЕНИЯ В НЕЙ ТЕЛА

В. Г. Макаренко, В. Ф. Тарасов

(Новосибирск)

В работе представлены результаты экспериментального исследования структуры течения первоначально твердотельно вращавшегося столба жидкости, после того как через него было пробуксировано тело в направлении, параллельном оси вращения. Установлено, что общим качественным результатом такого воздействия на вращающуюся жидкость является образование в ней системы циклонических и антициклонических вихрей с колебательным характером движения жидкости в них. Свойства этих вихрей совпадают со свойствами вихрей, описанных в [1].

Опыты проводились на установке, схема которой приведена на рис. 1. Прозрачный вертикальный цилиндрический сосуд *5*, в котором находилась жидкость, вращался с постоянной угловой скоростью ω. Движение первоначально твердотельно вращавшейся жидкости возмущалось одним или несколькими телами *6*, вращавшимися вместе с сосудом и совершавшими однократное перемещение параллельно оси вращения от дна сосуда