

ТУРБУЛЕНТНЫЙ СЛЕД В СТРАТИФИЦИРОВАННОЙ СРЕДЕ

А. Т. Онуфриев

(Долгопрудный)

Рассмотрена задача об определении формы турбулентного следа, образующегося за самодвижущимся телом в среде с переменной в направлении действия силы тяжести плотностью. Схематическая картина развития следа за движущимся объектом такова: вначале диффузия одинакова по всем направлениям, и след расширяется симметрично; по мере удаления от объекта диффузия становится сильно анизотропной, в вертикальном направлении под действием силы тяжести она уменьшается, след приобретает сплюснутую форму; турбулентное перемешивание в пределах следа приводит к созданию в занятом следом объеме более однородного распределения плотности, чем в окружающей среде; такой объем жидкости оказывается выведенным из состояния равновесия и под действием силы тяжести стремится вернуться к равновесному состоянию, происходит схлопывание следа (коллапс), сопровождающееся его дальнейшим расширением в горизонтальном направлении и возбуждением внутренних волн.

В статье рассмотрена задача о первой стадии развития следа (до схлопывания), т. е. задача о турбулентной диффузии в стратифицированной среде. Сама среда находится в покое. Основой для описания процесса диффузии служат уравнения, полученные в работе [1], которые позволяют описать анизотропную диффузию. Вводятся упрощения, обычно используемые при рассмотрении задачи о распространении турбулентного следа, связанные с тем опытным фактом, что свободные турбулентные зоны течений являются относительно узкими. Молекулярная диффузия не учитывается. Считается, что пульсации плотности малы и поэтому их следует учитывать только в слабых, содержащих ускорение силы тяжести [2].

Ось z направлена вверх по направлению действия силы тяжести, ось x — вдоль движения. В системе координат, связанной с телом, картина течения стационарная. Скорость набегающего потока U_0 принимается значительно большей компонент скорости в следе. Масштабы вдоль осей l_x , l_y , l_z и характерные величины пульсационных скоростей различны. Упомянутые выше обстоятельства позволяют ввести упрощения, которые используются при выводе уравнений пограничного слоя. Кроме того, вводятся упрощения; а) пренебрегается моментами третьего порядка, соответствующими диффузионным процессам, во всех уравнениях, это — обычное предположение в задаче о следе, иначе нужно делать предположения о связи третьих моментов с осредненными характеристиками потока; б) предполагается постоянство величин масштаба турбулентности L и энергии пульсационного движения E по поперечному сечению следа, их изменение происходит только в зависимости от продольной координаты.

Изменение E поперек следа можно рассмотреть дополнительно.

Система уравнений имеет вид

$$U_0 \frac{\partial U}{\partial x} = - \frac{\partial}{\partial y} \langle u_x' u_y' \rangle - \frac{\partial}{\partial z} \langle u_x' u_z' \rangle$$

$$\langle u_x' u_y' \rangle = - \frac{\tau}{2} \left[\langle u_y'^2 \rangle \frac{\partial U}{\partial y} + \langle u_y' u_z' \rangle \frac{\partial U}{\partial z} + U_0 \frac{\partial}{\partial x} \langle u_x' u_y' \rangle \right]$$

$$\langle u_x' u_z' \rangle = - \frac{\tau}{2} \left[g \frac{\langle \rho' U_x' \rangle}{\rho} + \langle u_z' u_y' \rangle \frac{\partial U}{\partial y} + \right.$$

$$\left. + \langle u_z'^2 \rangle \frac{\partial U}{\partial z} + U_0 \frac{\partial}{\partial x} \langle u_x' u_z' \rangle \right]$$

$$\begin{aligned}
\langle u_y' u_z' \rangle &= -\frac{\tau}{2} \left[g \frac{\langle \rho' u_y' \rangle}{\rho} + U_0 \frac{\partial}{\partial x} \langle u_y' u_z' \rangle \right] \\
\langle \rho' u_x' \rangle &= -\frac{2}{3} \tau \left[\langle u_x' u_z' \rangle \frac{d\rho}{dz} + \langle \rho' u_z' \rangle \frac{\partial U}{\partial z} + U_0 \frac{\partial}{\partial x} \langle \rho' u_x' \rangle \right] \\
\langle \rho' u_y' \rangle &= -\frac{2}{3} \tau \left[\langle u_y' u_z' \rangle \frac{d\rho}{dz} + U_0 \frac{\partial}{\partial x} \langle \rho' u_y' \rangle \right] \\
\langle \rho' u_z' \rangle &= -\frac{2}{3} \tau \left[\langle u_z'^2 \rangle \frac{d\rho}{dz} + U_0 \frac{\partial}{\partial x} \langle \rho' u_z' \rangle \right] \\
\langle u_y'^2 \rangle &= \frac{E}{3} - \frac{\tau}{2} U_0 \frac{\partial}{\partial x} \langle u_y'^2 \rangle \\
\langle u_z'^2 \rangle &= \frac{E}{3} - \tau g \frac{\langle \rho' u_z' \rangle}{\rho} - \frac{\tau}{2} U_0 \frac{\partial}{\partial x} \langle u_z'^2 \rangle \\
U_0 \frac{\partial E}{\partial x} + \left\{ \langle u_x' u_y' \rangle \frac{\partial U}{\partial y} + \langle u_y' u_z' \rangle \frac{\partial U}{\partial z} \right\} &= -\frac{E}{\tau} - g \frac{\langle \rho' u_z' \rangle}{\rho} \\
\xi_0 L \left\{ \langle u_x' u_y' \rangle \frac{\partial U}{\partial y} + \langle u_x' u_z' \rangle \frac{\partial U}{\partial z} \right\} + U_0 \frac{\partial}{\partial x} L E &= -\alpha_s \frac{EL}{\tau} - 2\alpha g \frac{\langle \rho' u_z' \rangle}{\rho} L \\
\tau &= ALE^{-1/2}
\end{aligned}$$

Величины $\{ \}$ являются усредненными по поперечному сечению следа, $A = 3.86$, $\alpha_s = 0.8$ [1], α — эмпирические постоянные.

Решение, как это делается в случае диффузии следа в однородной среде [3, 4], ищется в виде степенных зависимостей от продольной координаты.

На основании системы уравнений можно получить оценки (слагаемые, содержащие производные по x с множителем U_0 , не являются малыми величинами, так как $\tau \sim x$, но их учет приводит к небольшим поправкам)

$$\begin{aligned}
\langle \rho' u_y' \rangle &\cong -2/3 \tau \langle u_y' u_z' \rangle \frac{d\rho}{dz}, \quad \langle \rho' u_z' \rangle \cong -2/3 \tau \langle u_z'^2 \rangle \frac{d\rho}{dz} \\
\langle \rho' u_x' \rangle &\cong -2/3 \tau \langle u_x' u_z' \rangle \frac{d\rho}{dz} + 4/9 \tau^2 \langle u_z'^2 \rangle \frac{d\rho}{dz} \frac{\partial U}{\partial z} \\
\langle u_z'^2 \rangle &\cong \frac{E}{3(1 + 2/3 \tau^2 N^2)}, \quad \langle u_y'^2 \rangle \cong \frac{E}{3}, \quad N^2 = g \left| \frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dz} \right|
\end{aligned}$$

Величина $\langle u_y' u_z' \rangle \cong -1/2 \tau^2 \langle u_y' u_z' \rangle N^2$, т. е. в рассматриваемом приближении

$$\begin{aligned}
\langle u_y' u_z' \rangle &= 0, \quad \langle u_x' u_y' \rangle = -\varepsilon \frac{\partial U}{\partial y}, \quad \langle u_x' u_z' \rangle = -\varepsilon \varphi(\tau N) \frac{\partial U}{\partial z} \\
\varepsilon &= \frac{\tau E}{6}, \quad \varphi(\tau N) = \frac{1 - 4/9 \tau^2 N^2}{(1 + 1/3 \tau^2 N^2)(1 + 2/3 \tau^2 N^2)}
\end{aligned}$$

Для величин U , E , L получаются уравнения

$$\begin{aligned}
U_0 \frac{\partial U}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial y} \left[\varepsilon \frac{\partial U}{\partial y} \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[\varepsilon \varphi \frac{\partial U}{\partial z} \right] \\
U_0 \frac{\partial E}{\partial x} - \varepsilon \left\{ \left(\frac{\partial U}{\partial y} \right)^2 + \varphi \left(\frac{\partial U}{\partial z} \right)^2 \right\} &= -\frac{E}{\tau} \frac{1 + 8/9 \tau^2 N^2}{1 + 2/3 \tau^2 N^2} \\
U_0 \frac{\partial LE}{\partial x} - \xi_0 L \varepsilon \left\{ \left(\frac{\partial U}{\partial y} \right)^2 + \varphi \left(\frac{\partial U}{\partial z} \right)^2 \right\} &= -\alpha_s \frac{EL}{\tau} \frac{1 + \tau^2 N^2 (2/3 + 4/9 \alpha/\alpha_s)}{1 + 2/3 \tau^2 N^2} \\
\tau &= ALE^{-1/2}
\end{aligned}$$

К этим уравнениям надо добавить приближенное условие [4]

$$\int U y^2 dy dz = \text{const}, \quad \int U z^2 dy dz = \text{const}$$

что в осесимметричном случае дает

$$\int U r^3 dr = \text{const}$$

для следа с нулевым импульсом и

$$\int U dy dz = \text{const}$$

для следа с постоянным импульсом.

Вводим следующие зависимости

$$U(0, 0, x) / U_0 \sim (x')^{-\alpha}, \quad E' = E / E_0 = (x')^{-\beta}, \quad L / L_0 = (x')^{\gamma}, \quad l_y / l_y^0 = (x')^{\delta}$$

$$l_z / l_z^0 = (x')^{\epsilon}, \quad x_k' = x_k / d, \quad l_k' = l_k / d$$

где E_0, L_0, l_y^0 и т. п. суть характерные значения величин, d — диаметр тела. Тогда

$$\tau' = \tau / \tau_0 = (x')^{\gamma+1/2\beta}, \quad \tau' E' = (x')^{\gamma-1/2\beta}$$

Из сравнения слагаемых в уравнениях имеем

$$\beta = 2 - 2\delta, \quad \alpha = 1 - \delta, \quad \gamma = \delta$$

На больших расстояниях след ведет себя как плоский, и это есть следствие того, что масштаб l_z' стремится к постоянной величине из-за быстрого убывания значения $\langle u_z'^2 \rangle$ с ростом x' . Чтобы убедиться в этом проинтегрируем уравнение движения

$$\frac{\partial U}{\partial x'} = \frac{\partial}{\partial y'} \left[\epsilon' \frac{\partial U}{\partial y'} \right] + \frac{\partial}{\partial z'} \left[\epsilon' \varphi \frac{\partial U}{\partial z'} \right], \quad \epsilon' = \epsilon_0 \tau' E', \quad \epsilon_0 = \frac{\tau_0 E_0}{6 U_0 d}$$

Для нахождения решения этого уравнения при заданных начальных данных $U(0, y', z')$ можно воспользоваться методом преобразования Фурье [5]

$$U^0(x', k_y, k_z) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int U(x', y', z') \exp[-ik_y y' - ik_z z'] dy' dz'$$

Уравнение принимает вид

$$\frac{dU^0}{dx'} = -U^0 \epsilon' (k_y^2 + k_z^2 \varphi)$$

Его решением будет

$$U^0(x', k_y, k_z) = U^0(0, k_y, k_z) \exp \left[-k_y^2 \int_0^{x'} \epsilon' dx' - k_z^2 \int_0^{x'} \epsilon' \varphi dx' \right]$$

Далее, действуя методом, изложенным в цитируемой работе, получаем решение в виде

$$U(x', y', z') = \frac{1}{\pi} \int U(0, y'', z'') \exp \left[-\left(\frac{y'' - y'}{l_y'} \right)^2 - \left(\frac{z'' - z'}{l_z'} \right)^2 \right] \frac{dy'' dz''}{l_y' l_z'}$$

где

$$l_y' = \left[4 \int_0^{x'} \epsilon' dx' \right]^{1/2}, \quad l_z' = \left[4 \int_0^{x'} \epsilon' \varphi dx' \right]^{1/2}$$

Вертикальный масштаб l_z' стремится к постоянному значению, проходя через максимум (в силу вида функции $\varphi(x')$). Максимум соответствует значению координаты

$$m^* = \tau_0 N x^* / d$$

и равен

$$\max l_z' = \left[\frac{4}{\tau_0 N} \int_0^{m^*} \frac{\varepsilon' (1 - \frac{4}{9} \zeta^2) d\zeta}{(1 + \frac{2}{3} \zeta^2) (1 + \frac{1}{3} \zeta^2)} \right]^{1/2}$$

Для следа с постоянным значением импульса можно задать начальное распределение скорости в виде δ -функции

$$\int U(0, y'', z'') dy'' dz'' = U_0 D$$

и распределение скорости имеет вид

$$U(x', y', z') = \frac{U_0 D}{\pi l_y' l_z'} \exp \left[- \left(\frac{y'}{l_y'} \right)^2 - \left(\frac{z'}{l_z'} \right)^2 \right]$$

Для больших значений координаты x' получаем

$$U(x, 0, 0) \sim x^{-1/2}, \quad E \sim x^{-1}, \quad L \sim l_y \sim x^{1/2}$$

В случае следа с нулевым значением импульса можно получить оценку для значения скорости на оси следа при больших значениях x' . Предполагая также, что $(l_z')^2 \gg 1$

$$U(x', 0, 0) \cong \frac{1}{\pi l_y' (l_z')^3} \int U(0, y'', z'') (z'')^2 dy'' dz''$$

получаем

$$U(x, 0, 0) \sim x^{-1/2}, \quad E \sim x^{-1}, \quad L \sim l_y \sim x^{1/2}$$

Чтобы получить представление о картине развития следа, в подынтегральных выражениях для l_y' и l_z' используем зависимости, получившиеся для больших значений x . Тогда

$$l_y' = \left[\frac{4\varepsilon_0}{2 - \beta} \right]^{1/2} (x')^{\delta} = (4\varepsilon_0)^{1/2} (N\tau_0)^{-1/2} (N\tau_0 x')^{1/2}$$

$$l_z' = (4\varepsilon_0)^{1/2} (N\tau_0)^{-1/2} \left[\int_0^m \frac{(1 - \frac{4}{9} \zeta^2) d\zeta}{(1 + \frac{2}{3} \zeta^2) (1 + \frac{1}{3} \zeta^2)} \right]^{1/2}$$

Расстояние до m^* охватывает начальную стадию развития следа, на которой можно считать преобладающим эффектом действие турбулентной диффузии. Получившееся уменьшение вертикальных размеров следа и последующая картина его развития требуют дальнейшего рассмотрения. Полученное решение позволяет установить критерий подобия, характеризующий длину начальной стадии развития следа до схлопывания

$$N\tau_0 x^* / d = \text{const} \quad \text{или} \quad A \frac{L_0}{d} \frac{U_0}{E_0^{1/2}} \frac{x^* N}{U_0} = \text{const}$$

Относительно множителей L_0 / d и $U_0 / E_0^{1/2}$ можно предположить, что они слабо зависят от значения числа Рейнольдса и могут быть приняты с достаточным приближением постоянными. Постоянство отношения L_0 / d в струях, следах принимается обычно при рассмотрении этих задач. О постоянстве величины $U_0 / E_0^{1/2}$ в некотором диапазоне значений числа Рейнольдса свидетельствуют опытные данные работы [6]. Таким образом, критерием подобия является пропорциональность величины x^* / U_0 , т. е. времени после прохождения объекта до момента схлопывания следа, периоду собственных колебаний среды

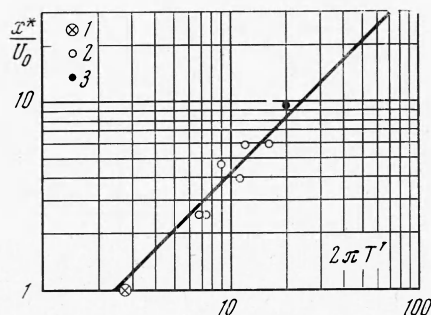
$$T' = N^{-1} = \left[g \left| \frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dz} \right| \right]^{-1/2}$$

Этот вывод соответствует опытным данным, полученным на моделях (фиг. 1). Здесь данные отмечены следующим образом: 1) $\oplus$ — по работе [7], 2) $\circ$ — по работе [9], 3) $\bullet$ — по работе [8].

Сравнение с экспериментальными данными дает значение

$$\frac{x^*}{U_0 T'} = 2.6$$

Для максимального значения вертикального масштаба следа получается соотношение



$$\max l_z' \sim \left[\frac{T'}{\tau_0} \right]^{1/2} \left[\frac{\tau_0 E_0}{U_0 d} \right]^{1/2} \sim \left[\frac{T' U_0}{d} \right]^{1/2}$$

Коэффициент сплющивания следа увеличивается с расстоянием и может достигать значительной величины

$$n = \frac{l_y'}{l_z'} =$$

$$= m^{1/2} \left[\int_0^m \varphi(\xi) d\xi \right]^{-1/2} \sim (x')^{1/2} (N^2 \tau_0^2)^{1/4}$$

В работах [7,8] изучалось движение моделей в стратифицированной среде. Условия опытов, приведенные ниже, были различными, а значения отношений вертикального размера следа к диаметру модели в этих опытах оказались почти одинаковыми. Из полученного решения видно, что это совпадение соответствует имевшимся условиям.

Данные опытов по работам [7] и [8]

$$U_0 \text{ см/сек} = 45, 60; d \text{ см} = 2.2, 15; |d\rho/dz| \text{ г·см}^{-4} = 0.0052, 0.0001;$$

$$T' \text{ сек} = 0.438, 3.16; [T' U_0 / d]^{1/2} = 3.0, 3.6$$

т. е. значения $\max l_z'$ должны быть достаточно близкими.

На основании сравнения с имеющимися данными можно сделать вывод, что используемые уравнения позволяют получить решение, дающее удовлетворительную картину развития следа на начальной стадии.

Поступила 13 IV 1970

ЛИТЕРАТУРА

1. О н у ф р и е в А. Т. Об уравнениях полуэмпирической теории турбулентного переноса, ПМТФ, 1970, № 2.
2. М о н и н А. С., Я г л о м А. М. Статистическая гидромеханика, ч. 1, М., «Наука», 1965.
3. Современное состояние гидроаэродинамики вязкой жидкости, т. 2, М. Изд-во иностр. лит., 1948, §§ 252—254.
4. Б и р к г о ф Г., С а р а н т о н е л л о Э. Струи, следы и каверны. М., «Мир», 1964, гл. 14.
5. Л а н д а у Л. Д., Л и ф ш и ц Е. М. Механика сплошных сред. М., Гостехиздат, 1954.
6. G i b s o n C. H., C h e n C. C., L i n S. C. Measurements of turbulent velocity and temperature fluctuations in the wake of a sphere. AIAA Journal, 1968, vol. 6, No. 4, (рус. перев.: Измерение турбулентных пульсаций скорости и температуры в следе за сферой. Ракетная техника и космонавтика, 1968, т. 6, № 4, стр. 81—90.)
7. S c h o o l e y A. H., S t e w a r t R. W. Experiments with a self-propelled body submerged in a fluid with a vertical density gradient, J. Fluid, Mech., 1963, vol. 15, pt. 1, pp. 83—93.
8. S t o c k h a u s e n P. J., C l a r k C. B., K e n n e d y J. F. Three-Dimensional momentumless wakes in Density-stratified liquids. Hydromech. Laboratory, Mass. Inst. Technol., 1966, Rept. N 93.
9. S c h o o l e y A. H. Wake collapse in a stratified fluid. Science, 1967, vol. 157, No. 3787, pp. 421—423.