

УДК 519.6

Алгоритм с расщеплением вейвлет-преобразования эрмитовых сплайнов седьмой степени

Б.М. Шумилов

Государственный архитектурно-строительный университет, пл. Соляная, 2, Томск, 634003
E-mail: sbm@tsuab.ru

Шумилов Б.М. Алгоритм с расщеплением вейвлет-преобразования эрмитовых сплайнов седьмой степени // Сиб. журн. вычисл. математики / РАН. Сиб. отд-ние. — Новосибирск, 2015. — Т. 18, № 4. — С. 453–467.

В статье исследован неявный метод разложения эрмитовых сплайнов 7-й степени на серию “ленивых” вейвлетов со смещенными носителями. Обосновано расщепление алгоритма вейвлет-преобразования на параллельное решение четырех пятидиагональных систем линейных уравнений со строгим диагональным преобладанием. Представлены результаты численных экспериментов по точности на многочленах и сжатию сплайн-вейвлет разложений.

DOI: 10.15372/SJNM20150409

Ключевые слова: эрмитовы сплайны, “ленивые” вейвлеты, неявные соотношения разложения, распараллеливание.

Shumilov B.M. A splitting algorithm for wavelet transforms of the Hermite splines of the seventh degree // Siberian J. Num. Math. / Sib. Branch of Russ. Acad. of Sci. — Novosibirsk, 2015. — Vol. 18, № 4. — P. 453–467.

In this paper, an implicit method of decomposition of 7-th degree Hermite splines to a series of “lazy” wavelets with displaced supports is investigated. A splitting algorithm for wavelet transforms of solving four five-diagonal systems of linear equations with a strict diagonal dominance in parallel is justified. Results of numerical experiments on exactness for polynomials and on compression of spline-wavelet decomposition are presented.

Keywords: Hermite splines, “lazy” wavelets, implicit relations of decomposition, parallelization.

1. Введение

В теории кратномасштабного анализа вейвлетами называют базис множества, заполняющего разность между аппроксимирующими пространствами на густой и прореженной сетках [1, с. 41]. В случае кусочно-линейной интерполяции на равномерных сетках и “ленивых” вейвлетов такая схема соответствует разложению Фабера [2]. Характерным свойством разложения Фабера и аналогичных интерполяционных разложений, основанных на сплайнах нечетной степени [3, с. 35], является то, что базисные вейвлеты центрируются вокруг узлов, не принадлежащих прореженной сетке. С вычислительной точки зрения это приводит к симметричным построениям на концах отрезка аппроксимации. Недостатком является то, что как “ленивые”, так и производные от них биортогональные [4, 5] вейвлеты сводятся к локальным усредняющим фильтрам, т.е. информация для расчета каждого коэффициента на прореженной сетке используется не полностью. В отличие от этого, коэффициенты полуортогональных [6, с. 115; 7, с. 26] и неортогональных [8] вейвлетов связаны системами линейных алгебраических уравнений, но хорошая обусловленность для них не гарантирована. В работах [9–11] нами были рассмотрены

неизвестные ранее типы вейвлетов первой, третьей и пятой степени, центрированных вокруг узлов прореженной сетки, доказано существование конечных неявных соотношений разложения и обоснованы эффективные алгоритмы вейвлет-анализа на их основе. В данной работе изучается случай вейвлетов седьмой степени.

2. Построение “ленивых” сплайн-вейвлетов со смещенными носителями

Пусть на отрезке $[a, b]$ задана вложенная последовательность равномерных сеток Δ^L : $x_i = a + h \cdot i$, $i = 0, 1, \dots, 2^L$, $h = (b - a)/2^L$, $L \geq 0$. Если базисные функции $N_{i,k}^L(x) = \varphi_k(v - i)$, $k = 0, 1, \dots, r$, $\forall i$, где $v = (x - a)/h$, с центрами в узлах сетки Δ^L , порождены сжатиями и сдвигами $r + 1$ функций вида [12, с. 82]:

$$\varphi_k(t) = \begin{cases} (-1)^k \omega_k(-t), & -1 \leq t \leq 0, \\ \omega_k(t), & 0 \leq t \leq 1, \\ 0, & t \notin [-1, 1], \end{cases}$$

где $\omega_k(t) = (1 - t)^{r+1} \sum_{\beta=0}^{r-k} \frac{(r+\beta)!}{k!\beta!r!} t^{k+\beta}$, $k = 0, 1, \dots, r$, то, при условии отсечения выступающих за концы отрезка половинок функций $\varphi_0(t), \dots, \varphi_r(t)$, полученное пространство V_L является пространством эрмитовых сплайнов степени $2r + 1$ гладкости C^r . Поскольку сетка Δ^{L-1} , $L \geq 1$, получена из Δ^L посредством удаления каждого второго узла, то соответствующее пространство V_{L-1} с базисными функциями $N_{i,k}^{L-1}(x)$, не равными нулю на удвоенных носителях $[x_{2i-2}, x_{2i+2}]$ с центрами в четных узлах сетки Δ^L , вложено в V_L . Суть вейвлет-преобразования состоит в том, что оно позволяет иерархически разложить заданную функцию на серию все более грубых приближенных представлений и локальных уточняющих подробностей. При этом “более грубый” уровень представления функции в V_{L-1} получается из “более подробного” уровня представления функции в V_L посредством прореживания (удаления каждого второго, как правило, отсчета). В частности, для случая единичного шага выражения базисных функций в V_{L-1} в виде линейных комбинаций базисных функций в V_L записываются следующей векторной формулой [7, с. 29]:

$$\begin{bmatrix} \varphi_0(t) \\ \varphi_1(t) \\ \vdots \\ \varphi_r(t) \end{bmatrix} = \sum_{k=0}^2 H_k \begin{bmatrix} \varphi_0(2t - k) \\ \varphi_1(2t - k) \\ \vdots \\ \varphi_r(2t - k) \end{bmatrix}, \quad (1)$$

где $H_2 = U^{-1}\Lambda U$, $H_1 = \text{diag}(1, 2^{-1}, \dots, 2^{-r})$, $H_0 = SH_2S^{-1}$, $\Lambda = \text{diag}(2^{-r-1}, \dots, 2^{-2r-1})$, $S = \text{diag}(1, -1, \dots, (-1)^r)$, и матрица U размерности $(r + 1) \times (r + 1)$ задана элементами

$$U_{k,j} = (-1)^{r+1+k-j} \frac{(r+1+k)!}{(r+1+k-j)!}, \quad k, j = 0, 1, \dots, r.$$

Остаток W_{L-1} от разности пространств V_L и V_{L-1} , размерности $(r + 1)(2^L + 1 - 2^{L-1} - 1) = (r + 1)2^{L-1}$, называется пространством вейвлетов. Обычно построение базисных функций в W_{L-1} начинается с использования базисных функций в V_L с центрами в нечетных узлах (“ленивые” вейвлеты). В отличие от этого, мы предлагаем использовать в качестве вейвлетов для W_{L-1} функции $N_{i,k}^L(x)$ в V_L с центрами в четных узлах. Поскольку W_{L-1} должно являться дополнением V_{L-1} в V_L , размерности этих пространств

должны удовлетворять соотношению $\text{Dim}(V_L) = \text{Dim}(V_{L-1}) + \text{Dim}(W_{L-1})$. Иногда для выполнения этого условия достаточно ограничиться рассмотрением периодического случая, когда значения коэффициентов в точках a, b совпадают. Это соответствует аппроксимации замкнутых кривых и поверхностей. Для незамкнутых кривых размерности пространств V_L, W_{L-1} равны $(r+1)(2^L+1)$ и $(r+1)(2^{L-1}+1)$ соответственно. Следовательно, $\text{Dim}(V_L) - \text{Dim}(V_{L-1}) - \text{Dim}(W_{L-1}) = (r+1)(2^L+1) - 2(r+1)(2^{L-1}+1) = -(r+1)$, и у нас имеется несколько возможностей устранить возникшее рассогласование. В [10] для случая третьей степени предлагалось вычитать из исходных координат уравнение прямой, соединяющей первую и последнюю точки. Тогда две базисные функции по краям отрезка $[a, b]$ удаляются из базисов, и размерности полученных пространств V_L^0, W_{L-1}^0 равны $2(2^L+1) - 2 = 2^{L+1}$ и 2^L соответственно. Следовательно, $\text{Dim}(V_L^0) = \text{Dim}(V_{L-1}^0) + \text{Dim}(W_{L-1}^0)$, что и требовалось обеспечить. Для случаев первой и пятой степеней подобных симметричных решений не существует. Поэтому в [9, 11] нами были рассмотрены наиболее подходящие несимметричные решения. Далее для случая седьмой степени будет подробно исследован вариант, приводящий к самому компактному решению, когда из исходных координат вычитается уравнение кубической параболы, интерполирующей функцию и вторую производную в первой и последней точках. В результате соответствующие базисные функции удаляются из базисов, и соотношение размерностей также выполняется.

3. Построение блока фильтров

После такой модификации данных на любой сетке $\Delta^L, L \geq 0$, интерполяционный эрмитов сплайн 7-й степени с некоторыми отсутствующими элементами по концам отрезка аппроксимации может быть представлен как

$$S^L(x) = \sum_{k=0,2}^{2^{L-1}} \sum_{i=1} C_i^{L,k} N_{i,k}^L(x) + \sum_{k=1,3}^{2^L} \sum_{i=0} C_i^{L,k} N_{i,k}^L(x), \quad a \leq x \leq b, \quad (2)$$

где коэффициенты $C_i^{L,k}, k = 0, \dots, 3, \forall i$, являются значениями и соответствующими производными аппроксимируемой функции в узлах сетки.

Для дальнейшего удобно записать базисные сплайн-функции в виде единой матрицы-строки $\varphi^L = [N_{0,1}^L, N_{0,3}^L, N_{1,0}^L, N_{1,1}^L, N_{1,2}^L, N_{1,3}^L, \dots, N_{2^L,3}^L]$ и упорядочить коэффициенты сплайна в виде вектора $C^L = [C_0^{L,1}, C_0^{L,3}, C_1^{L,0}, C_1^{L,1}, C_1^{L,2}, C_1^{L,3}, \dots, C_{2^L}^{L,3}]^T$. Тогда уравнение (2) переписывается в виде $S^L(x) = \varphi^L(x)C^L$. Аналогично обозначим базисные вейвлет-функции на сетке Δ^{L+1} как $M_{i,k}^L(x) = \varphi_k(v - 2i), k = 0, \dots, 3, i = 0, 1, \dots, 2^L$, и запишем их в виде матрицы-строки $\psi^L = [M_{0,1}^L, M_{0,3}^L, M_{1,0}^L, M_{1,1}^L, M_{1,2}^L, M_{1,3}^L, \dots, M_{2^L,3}^L]$. Соответствующие коэффициенты вейвлет-разложения будем собирать в вектор $D^L = [D_0^{L,1}, D_0^{L,3}, D_1^{L,0}, D_1^{L,1}, D_1^{L,2}, D_1^{L,3}, \dots, D_{2^L}^{L,3}]^T$. Тогда с использованием обозначений для блочных матриц процесс получения C^{L+1} из C^L и D^L может быть записан как [6, с. 114]:

$$C^{L+1} = [P^L | Q^L] \begin{bmatrix} C^L \\ D^L \end{bmatrix}. \quad (3)$$

Блоки матрицы P^L составлены из коэффициентов калибровочных соотношений (1) для эрмитовых сплайнов 7-й степени, так как каждую широкую базисную функцию

внутри отрезка аппроксимации можно построить из трех, а по краям интервала — из двух четверок узких базисных функций. Все элементы столбцов матрицы Q^L — нули, за исключением единственной единицы, так как каждый “ленивый” вейвлет — это одна узкая базисная функция. Ниже представлен пример матрицы $[P^L | Q^L]$, соответствующий $L = 1$:

$$[P^1 | Q^1] = \begin{bmatrix} H_1^0 & O & O & E_2 & O & O \\ H_2^0 & H_0^T & O & O & O & O \\ O & H_1 & O & O & E_4 & O \\ O & H_2^T & H_0^0 & O & O & O \\ O & O & H_1^0 & O & O & E_2 \end{bmatrix}.$$

Здесь E_m — единичные матрицы m -го порядка, $H_1 = \text{diag}(8, 4, 2, 1)/8$,

$$H_0 = \frac{1}{768} \begin{bmatrix} 384 & 840 & 0 & -5040 \\ -132 & -228 & 360 & 2520 \\ 18 & 24 & -84 & -360 \\ -1 & -1 & 6 & 18 \end{bmatrix},$$

$$H_2 = \frac{1}{768} \begin{bmatrix} 384 & -840 & 0 & 5040 \\ 132 & -228 & -360 & 2520 \\ 18 & -24 & -84 & 360 \\ 1 & -1 & -6 & 18 \end{bmatrix}.$$

Матрицы H_0^0 , H_1^0 , H_2^0 получены соответственно из матриц H_0 , H_1 , H_2 вычеркиванием первой и третьей строк и последующим транспонированием, O обозначает матрицы подходящей размерности (здесь, в частности, 2×2 , 2×4 , 4×4) со всеми нулевыми элементами. Случаи $L \neq 1$ описываются предыдущим примером после удаления либо добавления строк и столбцов, содержащих блоки H_1 и E_4 .

Обратный процесс разбиения коэффициентов C^{L+1} на более грубую версию C^L и уточняющие коэффициенты D^L состоит в решении системы линейных уравнений (3). При этом с целью компенсации единичного шага сетки в уравнениях (3) в качестве исходных нужно использовать значения функции и ее производных, домноженные на h в соответствующей степени: $\{f'(a)h, f'''(a)h^3, f^{(k)}(x_i)h^k, k = 0, \dots, 3, i = 1, \dots, 2^{L+1} - 1, f'(b)h, f'''(b)h^3\}$, всего $4 \cdot 2^{L+1}$ чисел.

4. Алгоритм с применением расщепления

Для облегчения вычислений при больших L матрицу $[P^L | Q^L]$ можно сделать ленточной, изменив порядок неизвестных так, чтобы столбцы матриц P^L и Q^L перемежались [6, с. 115]. Тем не менее, хотя разрешимость полученной системы и гарантирована линейной независимостью базисных функций, вопрос ее хорошей обусловленности остается открытым. В [13] для частного случая кубических эрмитовых сплайн-вейвлетов с помощью метода неопределенных коэффициентов были впервые получены конечные неявные соотношения разложения. В матричном виде полученные результаты можно представить следующим равенством:

$$[P^L | Q^L] R^L = G^L,$$

где матрица R^L представляет собой простую ленточную матрицу, а матрица G^L представляет собой трехдиагональную матрицу со строгим диагональным преобладанием. После этого решение системы уравнений типа (3) можно записать в матричном виде как [13]:

$$\begin{bmatrix} C^L \\ \overline{DL} \end{bmatrix} = [P^L | Q^L]^{-1} C^{L+1} = R^L (G^L)^{-1} C^{L+1}. \quad (4)$$

Более того, после расщепления системы (4) по четным и нечетным узлам алгоритм сводится к решению независимо двух трехдиагональных систем уравнений, что предпочтительно с точки зрения распараллеливания вычислений.

Для представленного выше типа вейвлетов составим матрицы:

$$\Lambda_1 = \text{diag}(16, 16, 8, 8/3), \quad S = \text{diag}(1, -1, 1, -1),$$

$$T_0^0 = \begin{bmatrix} -2380 & 1418 & -808 & 4581 \\ 40110 & -45840 & 28230 & -25392 \end{bmatrix}, \quad T_0^1 = \begin{bmatrix} 140 & -74 & 32 & -10 \\ 2310 & -1200 & 510 & -144 \end{bmatrix},$$

$$T_1^0 = \begin{bmatrix} -334 & -346 & -138 & -142 \\ 1260 & 672 & 420 & 224 \\ -630 & 1590 & 562 & 1302 \\ -18900 & -23520 & -13860 & -12768 \end{bmatrix},$$

$$T_0^2 = \begin{bmatrix} 13 & -7 & 3 & -1 \\ 70 & -37 & 16 & -5 \\ 315 & -165 & 71 & -21 \\ 1155 & -600 & 255 & -72 \end{bmatrix}, \quad T_1^2 = \begin{bmatrix} -321 & 353 & -135 & 143 \\ -1190 & 709 & -404 & 229 \\ -315 & -1425 & 633 & -1281 \\ 20055 & -22920 & 14115 & -12696 \end{bmatrix},$$

$$T^L = \begin{bmatrix} T_0^0 & T_0^1 & O & \dots & O & O \\ T_1^0 & T_1^2 & T_0^2 & \dots & O & O \\ ST_0^2 S & ST_1^2 S & T_1^2 & \ddots & O & O \\ O & ST_0^2 S & ST_1^2 S & \ddots & O & O \\ O & O & ST_0^2 S & \ddots & O & O \\ O & O & O & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & O & O \\ O & O & O & \dots & T_0^2 & O \\ O & O & O & \dots & T_1^2 & T_0^2 \\ O & O & O & \dots & ST_1^2 S & ST_1^0 S \\ O & O & O & \dots & -T_0^1 S & -T_0^0 S \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Lambda_1 \\ \Lambda_1 \\ \vdots \\ \Lambda_1 \end{bmatrix}.$$

Здесь точки, расставленные по диагонали, означают, что третий блочный столбец повторяется соответствующее число раз, сдвигаясь при этом каждый раз вниз на четыре строки или, иначе, на одну блочную позицию.

Следующее утверждение дает последовательность вычисления коэффициентов вейвлет-анализа по известным коэффициентам сплайн-разложения на любой сетке Δ^L , $L \geq 2$.

Теорема. Пусть значения коэффициентов $\tilde{C}^L = [C_1^{L,0}, C_1^{L,1}, C_1^{L,2}, C_1^{L,3}, \dots, C_{2L-1}^{L,3}]^T$ в нечетных узлах пересчитаны сначала из решения четырех систем линейных уравнений соответственно вида

$$\begin{bmatrix} 13802 & -1317 & 1 & & & & \\ -1317 & 12486 & -1316 & \ddots & & & \\ 1 & -1316 & 12486 & \ddots & 1 & & \\ & 1 & -1316 & \ddots & -1316 & 1 & \\ & & 1 & \ddots & 12486 & -1317 & \\ & & & \ddots & -1317 & 13802 & \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} C_1^{L,k} \\ C_3^{L,k} \\ C_5^{L,k} \\ \vdots \\ C_{2^L-3}^{L,k} \\ C_{2^L-1}^{L,k} \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} C_1^{L,k} \\ C_3^{L,k} \\ C_5^{L,k} \\ \vdots \\ C_{2^L-3}^{L,k} \\ C_{2^L-1}^{L,k} \end{bmatrix}, \quad k = 0, 2,$$

$$\begin{bmatrix} 11170 & -1315 & 1 & & & & \\ -1315 & 12486 & -1316 & \ddots & & & \\ 1 & -1316 & 12486 & \ddots & 1 & & \\ & 1 & -1316 & \ddots & -1316 & 1 & \\ & & 1 & \ddots & 12486 & -1315 & \\ & & & \ddots & -1315 & 11170 & \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} C_1^{L,k} \\ C_3^{L,k} \\ C_5^{L,k} \\ \vdots \\ C_{2^L-3}^{L,k} \\ C_{2^L-1}^{L,k} \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} C_1^{L,k} \\ C_3^{L,k} \\ C_5^{L,k} \\ \vdots \\ C_{2^L-3}^{L,k} \\ C_{2^L-1}^{L,k} \end{bmatrix}, \quad k = 1, 3,$$

где пустые позиции представляют собой нулевые элементы, а затем из матричного произведения $\tilde{C}^L := T^L \tilde{C}^L$.

Тогда вектор сплайн-коэффициентов на прореженной сетке Δ^{L-1} представляет собой результат умножения матрицы $V^L = -\text{diag}(2, 8, 1, 2, 4, 8, \dots, 2, 8)$ на вектор \tilde{C}^L , тогда как вектор вейвлет-коэффициентов равен покомпонентной сумме вектора \tilde{C}^L и вектора

$$\left[C_0^{L,1}, C_0^{L,3}, C_2^{L,0}, C_2^{L,1}, C_2^{L,2}, C_2^{L,3}, \dots, C_{2^L}^{L,3} \right]^T,$$

сплайн-коэффициентов в четных узлах густой сетки.

Доказательство. Согласно построению, на каждом m внутренних шагах сетки Δ^L перекрываются по $4(m-1)$ широких базисных функций и вейвлетов и $4(2m-1)$ узких базисных функций. Поэтому после приведения к сетке с единичным шагом на отрезке $[0, m]$ можно записать следующие 4 конечные неявные соотношения разложения:

$$\sum_{i=0}^{2m-2} a_i^k \varphi_k(2t-i) = \sum_{l=0}^3 \sum_{j=0}^{m-2} \left(b_j^{k,l} \varphi_l(2t-1-2j) + c_j^{k,l} \varphi_l(t-j) \right), \quad k = 0, 1, 2, 3, \quad (5)$$

где $\varphi_k(2t-i)$ — эрмитовы базисные сплайны на густой сетке, $\varphi_l(t-j)$ — эрмитовы базисные сплайны на прореженной сетке, $\varphi_l(2t-1-2j)$ — базисные вейвлеты на прореженной сетке.

Поскольку по обе стороны равенств (5) присутствуют эрмитовы сплайны, для их тождественного совпадения достаточно равенства соответствующих значений сплайнов и их производных в узлах густой сетки. В табл. 1 выписаны значения масштабирующих функций и их производных, принимаемые в точках, принадлежащих соответствующим носителям (в скобках даны неравные нулю значения функций и производных от аргумента $2t$).

Таблица 1

t	Значения масштабирующих функций и их производных в точках отрезка [-1, 1]							
	$\varphi_0(t)$	$\varphi'_0(t)$	$\varphi''_0(t)$	$\varphi'''_0(t)$	$\varphi_1(t)$	$\varphi'_1(t)$	$\varphi''_1(t)$	$\varphi'''_1(t)$
-1	0	0	0	0	0	0	0	0
-1/2	1/2	35/16	0	-105/2	-11/64	-19/32	15/8	105/4
0	1 (1)	0	0	0	0	1 (2)	0	0
1/2	1/2	-35/16	0	105/2	11/64	-19/32	-15/8	105/4
1	0	0	0	0	0	0	0	0

t	Значения масштабирующих функций и их производных в точках отрезка [-1, 1]							
	$\varphi_2(t)$	$\varphi'_2(t)$	$\varphi''_2(t)$	$\varphi'''_2(t)$	$\varphi_3(t)$	$\varphi'_3(t)$	$\varphi''_3(t)$	$\varphi'''_3(t)$
-1	0	0	0	0	0	0	0	0
-1/2	3/128	1/16	-7/16	-15/4	-1/768	-1/384	1/32	3/16
0	0	0	1 (4)	0	0	0	0	1 (8)
1/2	3/128	-1/16	-7/16	15/4	1/768	-1/384	-1/32	3/16
1	0	0	0	0	0	0	0	0

Тогда для вычисления неопределенных коэффициентов в соотношениях (5) при $k = 0$ с использованием табл. 1 и легко проверяемых равенств $\frac{d^k}{dt^k} \varphi_l(2t) = 2^l \delta_k^l$, $t = \frac{1}{2}$, $k, l = 0, 1, 2, 3$, имеем соответственно в точках:

$$\begin{aligned}
 t = \frac{1}{2} : \quad & a_0^0 = c_0^{00} \frac{1}{2} + c_0^{01} \left(-\frac{11}{64} \right) + c_0^{02} \frac{3}{128} + c_0^{03} \left(-\frac{1}{768} \right), \\
 & 0 = c_0^{00} \frac{35}{16} + c_0^{01} \left(-\frac{19}{32} \right) + c_0^{02} \frac{1}{16} + c_0^{03} \left(-\frac{1}{384} \right), \\
 & 0 = c_0^{01} \frac{15}{8} + c_0^{02} \left(-\frac{7}{16} \right) + c_0^{03} \frac{1}{32}, \\
 & 0 = c_0^{00} \left(-\frac{105}{2} \right) + c_0^{01} \frac{105}{4} + c_0^{02} \left(-\frac{15}{4} \right) + c_0^{03} \frac{3}{16}, \\
 t = 1 : \quad & a_1^0 = b_0^{00} + c_0^{00}, \quad 0 = b_0^{01} 2 + c_0^{01}, \quad 0 = b_0^{02} 4 + c_0^{02}, \quad 0 = b_0^{03} 8 + c_0^{03}, \\
 t = \frac{3}{2} : \quad & a_2^0 = c_0^{00} \frac{1}{2} + c_0^{01} \frac{11}{64} + c_0^{02} \frac{3}{128} + c_0^{03} \frac{1}{768} + c_1^{00} \frac{1}{2} + c_1^{01} \left(-\frac{11}{64} \right) + c_1^{02} \frac{3}{128} + c_1^{03} \left(-\frac{1}{768} \right), \\
 & 0 = c_0^{00} \left(-\frac{35}{16} \right) + c_0^{01} \left(-\frac{19}{32} \right) + c_0^{02} \left(-\frac{1}{16} \right) + c_0^{03} \left(-\frac{1}{384} \right) + c_1^{00} \frac{35}{16} + c_1^{01} \left(-\frac{19}{32} \right) + \\
 & \quad c_1^{02} \frac{1}{16} + c_1^{03} \left(-\frac{1}{384} \right), \\
 & 0 = c_0^{01} \left(-\frac{15}{8} \right) + c_0^{02} \left(-\frac{7}{16} \right) + c_0^{03} \left(-\frac{1}{32} \right) + c_1^{01} \frac{15}{8} + c_1^{02} \left(-\frac{7}{16} \right) + c_1^{03} \frac{1}{32}, \\
 & 0 = c_0^{00} \frac{105}{2} + c_0^{01} \frac{105}{4} + c_0^{02} \frac{15}{4} + c_0^{03} \frac{3}{16} + c_1^{00} \left(-\frac{105}{2} \right) + c_1^{01} \frac{105}{4} + c_1^{02} \left(-\frac{15}{4} \right) + \\
 & \quad c_1^{03} \frac{3}{16}, \\
 & \quad \vdots
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
t = m - 1 : a_{2m-3}^0 &= b_{m-2}^{00} + c_{m-2}^{00}, \quad 0 = b_{m-2}^{01}2 + c_{m-2}^{01}, \quad 0 = b_{m-2}^{02}4 + c_{m-2}^{02}, \\
&0 = b_{m-2}^{03}8 + c_{m-2}^{03}, \\
t = \frac{2m-1}{2} : a_{2m-2}^0 &= c_{m-2}^{00} \frac{1}{2} + c_{m-2}^{01} \frac{11}{64} + c_{m-2}^{02} \frac{3}{128} + c_{m-2}^{03} \frac{1}{768}, \\
0 &= c_{m-2}^{00} \left(-\frac{35}{16}\right) + c_{m-2}^{01} \left(-\frac{19}{32}\right) + c_{m-2}^{02} \left(-\frac{1}{16}\right) + c_{m-2}^{03} \left(-\frac{1}{384}\right), \\
0 &= c_{m-2}^{01} \left(-\frac{15}{8}\right) + c_{m-2}^{02} \left(-\frac{7}{16}\right) + c_{m-2}^{03} \left(-\frac{1}{32}\right), \\
0 &= c_{m-2}^{00} \frac{105}{2} + c_{m-2}^{01} \frac{105}{4} + c_{m-2}^{02} \frac{15}{4} + c_{m-2}^{03} \frac{3}{16}.
\end{aligned}$$

Одно из решений полученной системы уравнений имеет вид $a_{2j+1}^0 = b_j^0 = 1$, $j = 0, \dots, m-2$, при условии, что все остальные коэффициенты равны нулю. Это означает, что в нечетных узлах выполняются тождества для базисных сплайн-вейвлетов $\varphi_0(2t-1-2j)$.

Попытаемся найти систему уравнений, связывающую коэффициенты разложения для четных узлов (случай, когда $a_1^0 = a_3^0 = \dots = a_{2m-3}^0 = 0$). При $m = 2, 3, 4$ нетрудно убедиться, что система имеет только тривиальное решение. При $m = 5$ существует единственное симметричное решение, для которого коэффициенты $a_0^0, a_2^0, a_4^0, a_6^0, a_8^0$ равны $(1, -1316, 12486, -1316, 1)/16$ соответственно. Это обеспечивает вывод 5-ти диагональной системы уравнений со строгим диагональным преобладанием для отыскания четных коэффициентов вейвлет-разложения базисных сплайнов при значениях функции. При этом $a_1^0 = a_3^0 = a_5^0 = a_7^0 = 0$, а $c_j^{0l} = -2^l b_j^{0l}$, $b_{3-j}^{0l} = (-1)^l b_j^{0l}$, $j = 0, 1$. Остальные коэффициенты b_j^{0l} приведены в первом столбце матрицы-столбца, составленного из блоков T_0^2, T_1^2 .

Совершенно аналогично с помощью табл. 1 можно убедиться, что для эрмитовых базисных сплайнов при значениях первых производных на густой сетке коэффициенты $a_0^1, a_2^1, a_4^1, a_6^1, a_8^1$ равны $(1, -1316, 12486, -1316, 1)/16$ соответственно, а для ведущих коэффициентов b_j^{1l} справедливы значения, приведенные во втором столбце матрицы-столбца, составленного из блоков T_0^2, T_1^2 , причем $b_{3-j}^{1l} = -(-1)^l b_j^{1l}$, $j = 0, 1$.

Для базисных сплайнов при значениях вторых производных коэффициенты $a_0^2, a_2^2, a_4^2, a_6^2, a_8^2$ равны соответственно $(1, -1316, 12486, -1316, 1)/8$, а для ведущих коэффициентов b_j^{2l} справедливы значения, приведенные в третьем столбце матрицы-столбца, составленного из блоков T_0^2, T_1^2 , причем $b_{3-j}^{2l} = (-1)^l b_j^{2l}$, $j = 0, 1$.

Для базисных сплайнов при значениях третьих производных коэффициенты $a_0^3, a_2^3, a_4^3, a_6^3, a_8^3$ равны $(1, -1316, 12486, -1316, 1)3/8$ соответственно, а для ведущих коэффициентов b_j^{3l} справедливы значения, приведенные в четвертом столбце матрицы-столбца, составленного из блоков T_0^2, T_1^2 , причем $b_{3-j}^{3l} = -(-1)^l b_j^{3l}$, $j = 0, 1$.

По краям отрезка аппроксимации, согласно построению, от выступающих за края функций φ_1, φ_3 остаются половинки, тогда как функции φ_0, φ_2 отбрасываются полностью. Поэтому на двух крайних слева шагах сетки Δ^L после приведения к сетке с единичным шагом на отрезке $[1, 3]$ при условиях $a_1^0 = a_1^2 = 0$ получаются разложения:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^6 a_i^k \varphi_k(2t-i) &= \sum_{l=1,3} \left(b_0^{k,l} \varphi_l(2t-1) + c_0^{k,l} \varphi_l(t) \right) + \\
&\sum_{l=0}^3 \sum_{j=1}^2 \left(b_j^{k,l} \varphi_l(2t-1-2j) + c_j^{k,l} \varphi_l(t-j) \right), \quad k = 0, 1, 2, 3. \quad (6)
\end{aligned}$$

Тогда для отыскания коэффициентов соотношения (6) при $k = 0$, согласно табл. 1, имеем соответственно при

$$\begin{aligned}
t = 1: & \quad 0 = b_0^{01}2 + c_0^{01}, \quad 0 = b_0^{03}8 + c_0^{03}, \\
t = \frac{3}{2}: & \quad a_2^0 = c_0^{01} \frac{11}{64} + c_0^{03} \frac{1}{768} + c_1^{00} \frac{1}{2} + c_1^{01} \left(-\frac{11}{64}\right) + c_1^{02} \frac{3}{128} + c_1^{03} \left(-\frac{1}{768}\right), \\
& \quad 0 = c_0^{01} \left(-\frac{19}{32}\right) + c_0^{03} \left(-\frac{1}{384}\right) + c_1^{00} \frac{35}{16} + c_1^{01} \left(-\frac{19}{32}\right) + c_1^{02} \frac{1}{16} + c_1^{03} \left(-\frac{1}{384}\right), \\
& \quad 0 = c_0^{01} \left(-\frac{15}{8}\right) + c_0^{03} \left(-\frac{1}{32}\right) + c_1^{01} \frac{15}{8} + c_1^{02} \left(-\frac{7}{16}\right) + c_1^{03} \frac{1}{32}, \\
& \quad 0 = c_0^{01} \frac{105}{4} + c_0^{03} \frac{3}{16} + c_1^{00} \left(-\frac{105}{2}\right) + c_1^{01} \frac{105}{4} + c_1^{02} \left(-\frac{15}{4}\right) + c_1^{03} \frac{3}{16}, \\
t = 2: & \quad a_3^0 = b_1^{00} + c_1^{00}, \quad 0 = b_1^{01}2 + c_1^{01}, \quad 0 = b_1^{02}4 + c_1^{02}, \quad 0 = b_1^{03}8 + c_1^{03}, \\
t = \frac{5}{2}: & \quad a_4^0 = c_1^{00} \frac{1}{2} + c_1^{01} \frac{11}{64} + c_1^{02} \frac{3}{128} + c_1^{03} \frac{1}{768} + c_2^{00} \frac{1}{2} + c_2^{01} \left(-\frac{11}{64}\right) + c_2^{02} \frac{3}{128} + c_2^{03} \left(-\frac{1}{768}\right), \\
& \quad 0 = c_1^{00} \left(-\frac{35}{16}\right) + c_1^{01} \left(-\frac{19}{32}\right) + c_1^{02} \left(-\frac{1}{16}\right) + c_1^{03} \left(-\frac{1}{384}\right) + c_2^{00} \frac{35}{16} + c_2^{01} \left(-\frac{19}{32}\right) + \\
& \quad \quad c_2^{02} \frac{1}{16} + c_2^{03} \left(-\frac{1}{384}\right), \\
& \quad 0 = c_1^{01} \left(-\frac{15}{8}\right) + c_1^{02} \left(-\frac{7}{16}\right) + c_1^{03} \left(-\frac{1}{32}\right) + c_2^{01} \frac{15}{8} + c_2^{02} \left(-\frac{7}{16}\right) + c_2^{03} \frac{1}{32}, \\
& \quad 0 = c_1^{00} \frac{105}{2} + c_1^{01} \frac{105}{4} + c_1^{02} \frac{15}{4} + c_1^{03} \frac{3}{16} + c_2^{00} \left(-\frac{105}{2}\right) + c_2^{01} \frac{105}{4} + c_2^{02} \left(-\frac{15}{4}\right) + c_2^{03} \frac{3}{16}, \\
t = 3: & \quad a_5^0 = b_2^{00} + c_2^{00}, \quad 0 = b_2^{01}2 + c_2^{01}, \quad 0 = b_2^{02}4 + c_2^{02}, \quad 0 = b_2^{03}8 + c_2^{03}, \\
t = \frac{7}{2}: & \quad a_6^0 = c_2^{00} \frac{1}{2} + c_2^{01} \frac{11}{64} + c_2^{02} \frac{3}{128} + c_2^{03} \frac{1}{768}, \\
& \quad 0 = c_2^{00} \left(-\frac{35}{16}\right) + c_2^{01} \left(-\frac{19}{32}\right) + c_2^{02} \left(-\frac{1}{16}\right) + c_2^{03} \left(-\frac{1}{384}\right), \\
& \quad 0 = c_2^{01} \left(-\frac{15}{8}\right) + c_2^{02} \left(-\frac{7}{16}\right) + c_2^{03} \left(-\frac{1}{32}\right), \\
& \quad 0 = c_2^{00} \frac{105}{2} + c_2^{01} \frac{105}{4} + c_2^{02} \frac{15}{4} + c_2^{03} \frac{3}{16}.
\end{aligned}$$

Решение полученной системы уравнений, для которого коэффициенты a_2^0, a_4^0, a_6^0 равны соответственно $(13802, -1317, 1)/16$, обеспечивает вывод 5-ти диагональной системы уравнений со строгим диагональным преобладанием в первом столбце. При этом $a_3^0 = a_5^0 = 0$, а $c_j^{0l} = -2^l b_j^{0l}$. Значения коэффициентов b_j^{0l} приведены в первом столбце матрицы-столбца, составленного из блоков $T_0^0, T_1^0, ST_0^2 S$.

Аналогично для отыскания коэффициентов соотношения (6) при $k = 1$ имеем при

$$\begin{aligned}
t = 1: & \quad 2a_1^1 = b_0^{11}2 + c_0^{11}, \quad 0 = b_0^{13}8 + c_0^{13}, \\
t = \frac{3}{2}: & \quad 0 = c_0^{11} \frac{11}{64} + c_0^{13} \frac{1}{768} + c_1^{10} \frac{1}{2} + c_1^{11} \left(-\frac{11}{64}\right) + c_1^{12} \frac{3}{128} + c_1^{13} \left(-\frac{1}{768}\right), \\
& \quad 2a_2^1 = c_0^{11} \left(-\frac{19}{32}\right) + c_0^{13} \left(-\frac{1}{384}\right) + c_1^{10} \frac{35}{16} + c_1^{11} \left(-\frac{19}{32}\right) + c_1^{12} \frac{1}{16} + c_1^{13} \left(-\frac{1}{384}\right),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
0 &= c_0^{11} \left(-\frac{15}{8}\right) + c_0^{13} \left(-\frac{1}{32}\right) + c_1^{11} \frac{15}{8} + c_1^{12} \left(-\frac{7}{16}\right) + c_1^{13} \frac{1}{32}, \\
0 &= c_0^{11} \frac{105}{4} + c_0^{13} \frac{3}{16} + c_1^{10} \left(-\frac{105}{2}\right) + c_1^{11} \frac{105}{4} + c_1^{12} \left(-\frac{15}{4}\right) + c_1^{13} \frac{3}{16}, \\
t = 2: 0 &= b_1^{10} + c_1^{10}, \quad 2a_3^1 = b_1^{11}2 + c_1^{11}, \quad 0 = b_1^{12}4 + c_1^{12}, \quad 0 = b_1^{13}8 + c_1^{13}, \\
t = \frac{5}{2}: 0 &= c_1^{10} \frac{1}{2} + c_1^{11} \frac{11}{64} + c_1^{12} \frac{3}{128} + c_1^{13} \frac{1}{768} + c_2^{10} \frac{1}{2} + c_2^{11} \left(-\frac{11}{64}\right) + c_2^{12} \frac{3}{128} + c_2^{13} \left(-\frac{1}{768}\right), \\
2a_4^1 &= c_1^{10} \left(-\frac{35}{16}\right) + c_1^{11} \left(-\frac{19}{32}\right) + c_1^{12} \left(-\frac{1}{16}\right) + c_1^{13} \left(-\frac{1}{384}\right) + c_2^{10} \frac{35}{16} + \\
& c_2^{11} \left(-\frac{19}{32}\right) + c_2^{12} \frac{1}{16} + c_2^{13} \left(-\frac{1}{384}\right), \\
0 &= c_1^{11} \left(-\frac{15}{8}\right) + c_1^{12} \left(-\frac{7}{16}\right) + c_1^{13} \left(-\frac{1}{32}\right) + c_2^{11} \frac{15}{8} + c_2^{12} \left(-\frac{7}{16}\right) + c_2^{13} \frac{1}{32}, \\
0 &= c_1^{10} \frac{105}{2} + c_1^{11} \frac{105}{4} + c_1^{12} \frac{15}{4} + c_1^{13} \frac{3}{16} + c_2^{10} \left(-\frac{105}{2}\right) + c_2^{11} \frac{105}{4} + \\
& c_2^{12} \left(-\frac{15}{4}\right) + c_2^{13} \frac{3}{16}, \\
t = 3: 0 &= b_2^{10} + c_2^{10}, \quad 2a_5^1 = b_2^{11}2 + c_2^{11}, \quad 0 = b_2^{12}4 + c_2^{12}, \quad 0 = b_2^{13}8 + c_2^{13}, \\
t = \frac{7}{2}: 0 &= c_2^{10} \frac{1}{2} + c_2^{11} \frac{11}{64} + c_2^{12} \frac{3}{128} + c_2^{13} \frac{1}{768}, \\
2a_6^1 &= c_2^{10} \left(-\frac{35}{16}\right) + c_2^{11} \left(-\frac{19}{32}\right) + c_2^{12} \left(-\frac{1}{16}\right) + c_2^{13} \left(-\frac{1}{384}\right), \\
0 &= c_2^{11} \left(-\frac{15}{8}\right) + c_2^{12} \left(-\frac{7}{16}\right) + c_2^{13} \left(-\frac{1}{32}\right), \\
0 &= c_2^{10} \frac{105}{2} + c_2^{11} \frac{105}{4} + c_2^{12} \frac{15}{4} + c_2^{13} \frac{3}{16}.
\end{aligned}$$

Значения коэффициентов b_j^{1l} , для которых коэффициенты a_2^1, a_4^1, a_6^1 равны соответственно $(11170, -1315, 1)/16$, а $a_1^1 = a_3^1 = a_5^1 = 0$, приведены во втором столбце матрицы-столбца, составленного из блоков T_0^0, T_1^0, ST_0^2S .

Совершенно аналогично с помощью табл. 1 можно убедиться, что для эрмитовых базисных сплайнов при значениях вторых производных на густой сетке коэффициенты a_2^2, a_4^2, a_6^2 равны соответственно $(13802, -1317, 1)/8$, а для ведущих коэффициентов b_j^{2l} справедливы значения, приведенные в третьем столбце матрицы-столбца, составленного из блоков T_0^0, T_1^0, ST_0^2S .

Для базисных сплайнов при значениях третьих производных коэффициенты a_2^3, a_4^3, a_6^3 равны соответственно $(11170, -1315, 1)3/8$, а для ведущих коэффициентов b_j^{3l} справедливы значения, приведенные в четвертом столбце матрицы-столбца, составленного из блоков T_0^0, T_1^0, ST_0^2S .

Подобные рассуждения относительно отрезка $[1, 4]$ можно повторить и при выводе соотношений для вычисления элементов вторых столбцов 5-ти диагональных систем уравнений. Однако существует более быстрый путь — просто проверить решения, полученные из гипотезы симметричности систем. Тогда коэффициенты $a_2^k, a_4^k, a_6^k, a_8^k$ даются значениями, приведенными в строках табл. 2, домноженными на те же множители b^k , что и раньше, тогда как для ведущих коэффициентов b_j^{kl} справедливы значения, приведенные в столбцах матрицы-столбца, составленного из блоков $T_0^1, T_1^2, ST_1^2S, ST_0^2S$.

Таблица 2. Значения элементов второго столбца

k	a_2^k	a_4^k	a_6^k	a_8^k	b^k
0	-1317	12486	-1316	1	1/16
1	-1315	12486	-1316	1	1/16
2	-1317	12486	-1316	1	1/8
3	-1315	12486	-1316	1	3/8

При этом по-прежнему $c_j^{kl} = -2^l b_j^{kl}$, а $b_2^{kl} = (-1)^{k+l} b_1^{kl}$, $k = 0, 1, 2, 3$. Во всех нечетных узлах выполняются тождества для базисных сплайн-вейвлетов $\varphi_k(2t-1-2j)$. На крайних справа шагах сетки Δ^L разложения отражены разложениям, полученным выше, в том смысле, что $b_j^{kl} = (-1)^{j+k+l} b_{3-j}^{kl}$, $k, j, l = 0, 1, 2, 3$.

Введем последовательности матриц G^L и R^L , блоки которых составлены из коэффициентов левых и правых частей полученных разложений соответственно. В частности, для образования G^L к пятидиагональной матрице относительно коэффициентов в нечетных узлах приписывается снизу единичный диагональный блок E размерности $4(2^L - 1)$ относительно коэффициентов в четных узлах, а $R^L = \begin{bmatrix} V^L T^L & O \\ T^L & E \end{bmatrix}$. В результате находим, что базисные функции пространства эрмитовых сплайнов 7-й степени на густой сетке, базисные функции на прореженной сетке и вейвлеты удовлетворяют равенству

$$\varphi^L G^L = [\varphi^{L-1} \mid \psi^{L-1}] R^L, \quad L \geq 2.$$

Отсюда, используя свойство дополнения пространства вейвлетов, находим

$$[\varphi^{L-1} \mid \psi^{L-1}] \begin{bmatrix} C^{L-1} \\ D^{L-1} \end{bmatrix} = \varphi^L C^L = [\varphi^{L-1} \mid \psi^{L-1}] R^L (G^L)^{-1} C^L.$$

После этого решение системы уравнений (3) можно записать в виде (4), откуда после расщепления по четным и нечетным узлам вытекает утверждение теоремы 1. □

5. Численные эксперименты

5.1. Проверка точности на многочленах седьмой степени

Для $x \in [0, 1]$, полагая на верхнем уровне разрешения $L = 4$, находим длину шага сетки $h = 2^{-3}$. При выполнении вейвлет-преобразования в качестве исходных данных используются значения функции и трех производных в узлах сетки Δ^L , в предположении нулевых значений функции и второй производной в концах отрезка, всего 64 числа. Рассматривая в качестве тестовой функции многочлен седьмой степени $f(x) = x(x-1)(2x-1)(61x^4 - 122x^3 + 43x^2 + 18x + 6)/6$, находим на последнем этапе рекурсивного алгоритма вейвлет-разложения четыре значения первой и третьей производной сплайна $S^0(x)$ в концах отрезка, $C^0 = [1, 1, 1, 1]^T$. При этом все вейвлет-коэффициенты равны нулю. Это демонстрирует свойство точности аппроксимационной схемы на многочленах седьмой степени, обеспечивая коэффициент сжатия $64/4=16$.

5.2. Реконструкция функции с разрывами первого рода и изломом

Положим:

$$\begin{aligned}\psi_1^L(x) &= 2^{L/2} \sqrt{\frac{5}{273}} M_{0,1}^L(x), & \psi_2^L(x) &= 2^{L/2} \frac{\sqrt{5005}}{90090} M_{0,3}^L(x), \\ \psi_{i-1}^L(x) &= 2^{L/2} \sqrt{\frac{5}{273}} M_{\frac{i}{4},1}^L(x), & \psi_i^L(x) &= 2^{L/2} \frac{\sqrt{5005}}{90090} M_{\frac{i}{4},3}^L(x), \quad i = 4 \cdot 2^L, \quad L \geq 1;\end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned}\psi_{i-1}^L(x) &= 2^{L/2} \sqrt{\frac{1042}{1287}} M_{\frac{i}{4},0}^L(x), & \psi_i^L(x) &= 2^{L/2} \sqrt{\frac{10}{273}} M_{\frac{i}{4},1}^L(x), \\ \psi_{i+1}^L(x) &= 2^{L/2} \sqrt{\frac{43}{90090}} M_{\frac{i}{4},2}^L(x), & \psi_{i+2}^L(x) &= 2^{L/2} \frac{\sqrt{10010}}{90090} M_{\frac{i}{4},3}^L(x)\end{aligned}$$

для $i = 4, 8, \dots, 4 \cdot 2^L - 4, \quad L \geq 2$.

Заметим, что $\psi_i^L(x)$ нормированы так, что $\|\psi_i^L(x)\|_{L_2(0,1)} = 1$ для $i = 1, 2, \dots, 4 \cdot 2^L$.

Рассмотрим в качестве тестовой функции пример Хартена [14]:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} \sin(3\pi x), & x \leq \frac{1}{3}, \\ |\sin(4\pi x)|, & \frac{1}{3} \leq x \leq \frac{2}{3}, \\ -\frac{1}{2} \sin(3\pi x), & x > \frac{2}{3}. \end{cases}$$

Это кусочно-гладкая функция, имеющая разрывы первого рода в точках $x = 1/3$ и $2/3$ и излом (разрыв первой производной) в точке $x = 1/2$. Ее первая и вторая производные — кусочно-гладкие функции также. Начиная с верхнего уровня разрешения $L = 4$, т. е. при числе разбиений $2^L = 16$, на интервале $0 \leq x \leq 1$ находим последовательно:

$$\begin{aligned}L = 4 : D^3 &= [-0.004726, 58.22, -0.0007108, 0.2389, -0.07866, -2.752, 0.02167, 1.141, \\ &\quad -0.7541, -25.98, 0.2056, 10.64, 8.965, -498.6, -0.2355, 66.99, -2.126, \\ &\quad -256.1, -1.056, 3.379, 7.036, 410.2, 0.04096, -46.28, -0.4709, 16.2, \\ &\quad 0.1287, -6.653, -0.04916, 1.72, 0.002954, -36.39]^\top;\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}L = 3 : D^2 &= [-9.821, 1.176 \cdot 10^5, -3.406, -32.91, 1300, 3.182 \cdot 10^5, 6.288, -9.95, \\ &\quad -2396, 1.003 \cdot 10^5, -2.1, 20.4, 792.4, -1.952 \cdot 10^5, 6.057, -7.252 \cdot 10^4]^\top;\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}L = 2 : D^1 &= [-2479, 2.465 \cdot 10^7, -396.1, 4.363 \cdot 10^5, -7.452 \cdot 10^4, 4.116 \cdot 10^6, 1306, \\ &\quad -1.247 \cdot 10^7]^\top;\end{aligned}$$

$L = 1$: на последнем шаге остается четыре коэффициента разложения в виде значений первой и третьей производных в концах интервала:

$$C^0 = [2.306 \cdot 10^3, -4.703 \cdot 10^6, 6.666 \cdot 10^3, -2.304 \cdot 10^6]^\top$$

и четыре соответствующих вейвлет-коэффициента:

$$D^0 = [-7.809 \cdot 10^4, 4.545 \cdot 10^8, -2.245 \cdot 10^4, 3.665 \cdot 10^8]^\top.$$

На рисунке представлены результаты реконструкции коэффициентов эрмитового сплайна 7-й степени $S^4(x)$ при условии обнуления коэффициентов промежуточных вейвлет-базисов, по модулю меньших величины 0.205. Здесь сплошной линией обозначаются исходная функция и ее производные. Коэффициент сжатия в рассмотренном примере — небольшой (отброшено всего 8 вейвлет-коэффициентов). Однако с увеличением длины промежутков гладкости качество сжатия будет, несомненно, выше. Следует отметить также идеальное воспроизведение именно нечетных производных.

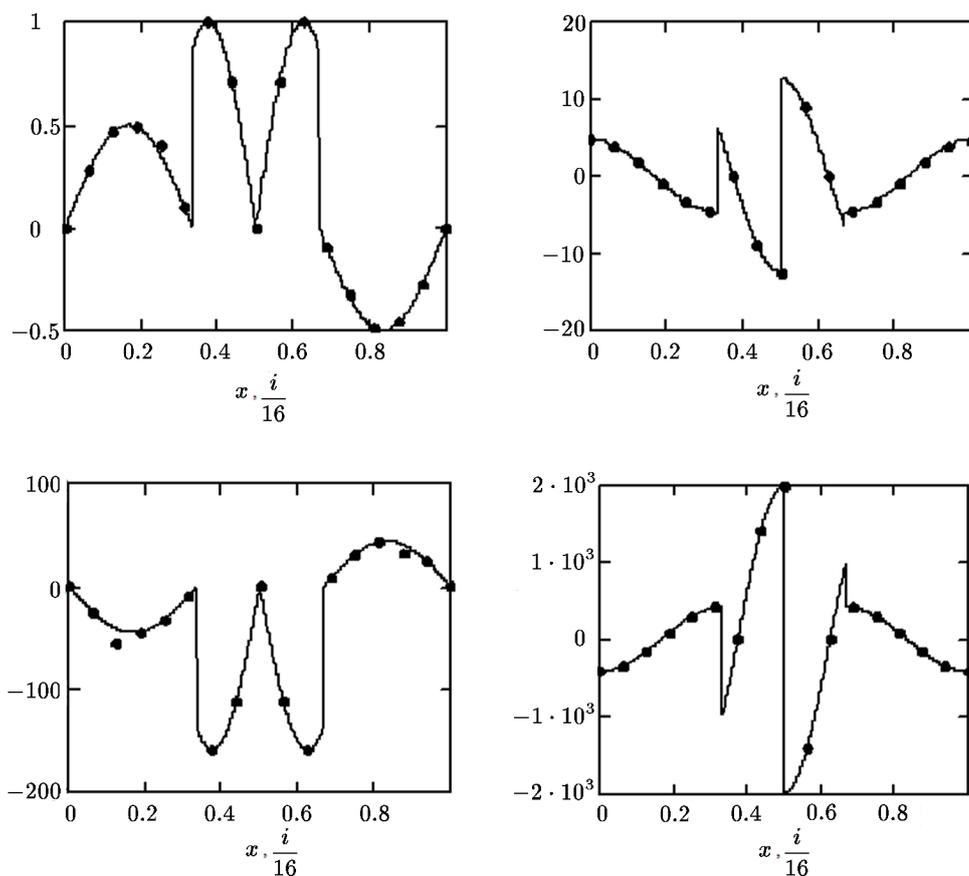


Рис. Графики вейвлет-реконструкции коэффициентов эрмитового сплайна 7-й степени (функции и второй производной — слева, первой и третьей производных — справа)

6. Заключение

Практическое значение построенного вычислительного метода для приближения функций невелико, поскольку аппроксимирующий сплайн 7-й степени задается с помощью значений приближаемой функции и ее производных до третьей включительно. В реальных задачах приближения известны значения функции в узлах сетки и возможно ее первая производная. Поэтому конструкции, использующие производные более высоких порядков, применимы, скорее, для итерационного решения нелинейных дифференциальных уравнений по схеме метода конечных элементов. В этом смысле распространение предложенных в статье схем получения для эрмитовых сплайн-вейвлетов 7-й

степени неявных соотношений разложения с расщеплением по четным и нечетным узлам на сплайны более высокой степени может предоставить новые возможности для создания параллельных алгоритмов построения и использования эрмитовых сплайн-вейвлетов.

Благодарности. Автор благодарит рецензента за продуктивные замечания, способствующие улучшению качества изложения представленной работы.

Литература

1. **Добешн И.** Десять лекций по вейвлетам / Пер. с англ. — Ижевск: НИЦ “Регулярная и хаотическая динамика”, 2001.
2. **Lyche T., Mørken K., and Pelosi F.** Stable, linear spline wavelets on nonuniform knots with vanishing moments // *Computer Aided Geometric Design*. — 2009. — Vol. 26. — P. 203–216.
3. **Sweldens W., Schröder P.** Building your own wavelets at home // *Wavelets in Computer Graphics*. — 1996. — P. 15–87. — (ACM SIGGRAPH Course notes).
4. **Sweldens W.** The lifting scheme: A custom-design construction of biorthogonal wavelets // *Applied and Computational Harmonic Analysis*. — 1996. — Vol. 3, № 2. — P. 186–200.
5. **Warming R., Beam R.** Discrete multiresolution analysis using Hermite interpolation: Biorthogonal multiwavelets // *SIAM J. Sci. Comp.* — 2000. — Vol. 22, № 1. — P. 269–317.
6. **Столниц Э., ДеРоуз Т., Салезин Д.** Вейвлеты в компьютерной графике / Пер. с англ. — Ижевск: НИЦ “Регулярная и хаотическая динамика”, 2002.
7. **Strela V.** Multiwavelets: Theory and Applications: Thesis PHD in Mathematics. — Cambridge, Massachusetts, 1996.
8. **Koro K., Abe K.** Non-orthogonal spline wavelets for boundary element analysis // *Engineering Analysis with Boundary Elements*. — 2001. — Vol. 25. — P. 149–164.
9. **Шумилов Б.М., Матанов Ш.М.** Алгоритм с расщеплением вейвлет-преобразования сплайнов первой степени // *Вестник Томского государственного университета. Сер. Управление, вычислительная техника и информатика*. — 2011. — № 3. — С. 51–57.
10. **Шумилов Б.М.** “Ленивые” вейвлеты эрмитовых кубических сплайнов и алгоритм с расщеплением // *Вестник Томского государственного университета. Сер. Управление, вычислительная техника и информатика*. — 2011. — № 1. — С. 64–72.
11. **Шумилов Б.М., Эшаров Э.А., Кудуев А.Ж., Ыманов У.С.** Мультивейвлет пятой степени // *Известия Томского политехнического университета*. — 2012. — Т. 320, № 5. — С. 54–59.
12. **Завьялов Ю.С., Квасов Б.И., Мирошниченко В.Л.** Методы сплайн-функций. — М.: Наука, 1980.
13. **Шумилов Б.М.** Алгоритм с расщеплением вейвлет-преобразования эрмитовых кубических сплайнов // *Вестник Томского государственного университета. Сер. Математика. Механика*. — 2010. — № 4. — С. 45–55.
14. **Arandiga F., Baeza A., and Donat R.** Discrete multiresolution based on hermite interpolation: computing derivatives // *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*. — 2004. — Vol. 9. — P. 263–273.

*Поступила в редакцию 17 января 2015 г.,
в окончательном варианте 7 марта 2015 г.*

Литература в транслитерации

1. **Dobeshi I.** Desyat' lektzij po vevjletam / Per. s angl. — Izhevsk: NITs “Regulyarnaya i khaoticheskaya dinamika”, 2001.
2. **Lyche T., Mórken K., and Pelosi F.** Stable, linear spline wavelets on nonuniform knots with vanishing moments // *Computer Aided Geometric Design*. — 2009. — Vol. 26. — P. 203–216.
3. **Sweldens W., Schröder P.** Building your own wavelets at home // *Wavelets in Computer Graphics*. — 1996. — P. 15–87. — (ACM SIGGRAPH Course notes).
4. **Sweldens W.** The lifting scheme: A custom-design construction of biorthogonal wavelets // *Applied and Computational Harmonic Analysis*. — 1996. — Vol. 3, № 2. — P. 186–200.
5. **Warming R., Beam R.** Discrete multiresolution analysis using Hermite interpolation: Biorthogonal multiwavelets // *SIAM J. Sci. Comp.* — 2000. — Vol. 22, № 1. — P. 269–317.
6. **Stolnits E., DeRouz T., Salezin D.** Vejvlety v komp'yuternoj grafike / Per. s angl. — Izhevsk: NITs “Regulyarnaya i khaoticheskaya dinamika”, 2002.
7. **Strela V.** Multiwavelets: Theory and Applications: Thesis PHD in Mathematics. — Cambridge, Massachusetts, 1996.
8. **Koro K., Abe K.** Non-orthogonal spline wavelets for boundary element analysis // *Engineering Analysis with Boundary Elements*. — 2001. — Vol. 25. — P. 149–164.
9. **Shumilov B.M., Matanov Sh.M.** Algoritm s rasshchepleniem vevjlet-preobrazovaniya splajnov pervoj stepeni // *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Ser. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika*. — 2011. — № 3. — S. 51–57.
10. **Shumilov B.M.** “Lenivye” vevjlety ermitovykh kubicheskikh splajnov i algoritm s rasshchepleniem // *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Ser. Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika i informatika*. — 2011. — № 1. — S. 64–72.
11. **Shumilov B.M., Esharov E.A., Kuduev A.Zh., Ymanov U.S.** Mul'tivejvlet pyatoj stepeni // *Izvestiya Tomskogo politekhnicheskogo universiteta*. — 2012. — T. 320, № 5. — S. 54–59.
12. **Zav'yalov Yu.S., Kvasov B.I., Miroshnichenko V.L.** *Metody splajn-funksij*. — M.: Nauka, 1980.
13. **Shumilov B.M.** Algoritm s rasshchepleniem vevjlet-preobrazovaniya ermitovykh kubicheskikh splajnov // *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Ser. Matematika. Mekhanika*. — 2010. — № 4. — S. 45–55.
14. **Arandiga F., Baeza A., and Donat R.** Discrete multiresolution based on hermite interpolation: computing derivatives // *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*. — 2004. — Vol. 9. — P. 263–273.

