УДК 539.3

ЗАДАЧА СЕН-ВЕНАНА ДЛЯ ТЕЛ С ВИНТОВОЙ РОМБОЭДРИЧЕСКОЙ АНИЗОТРОПИЕЙ. ЗАДАЧИ РАСТЯЖЕНИЯ-КРУЧЕНИЯ

К. А. Ватульян, Ю. А. Устинов

Южный федеральный университет, 344006 Ростов-на-Дону
E-mails: vatulyan_karina@mail.ru, ustinov@math.rsu.ru

Методами однородных решений и спектральной теории операторов построение решений задач Сен-Венана о растяжении-кручении цилиндрической трубки с винтовой анизотропией сводится к интегрированию краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами. Построение решений осуществляется аналитическими и численными методами. Проводится анализ элементов матрицы жесткостей и напряженно-деформированного состояния в зависимости от параметра задачи.

Ключевые слова: задачи Сен-Венана, жесткость, винтовая анизотропия, метод прогонки.

Настоящая работа посвящена построению решений задач Сен-Венана о растяжении и кручении цилиндра с винтовой ромбоэдрической анизотропией. Методами спектральной теории операторов [1–6] задачи сводятся к интегрированию краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений. В частном случае цилиндрической ромбоэдрической анизотропии получено аналитическое решение. Для цилиндра с винтовой ромбоэдрической анизотропией решения задач построены двумя методами: для малых значений безразмерного параметра $\tau_0 = a\tau$, где a — радиус цилиндра; τ — "крутка" (характеристика винтовой анизотропии), аналитическое решение построено методом малого параметра, для произвольных значений τ — численным интегрированием соответствующих краевых задач.

1. ОСНОВНЫЕ СООТНОШЕНИЯ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ И ПОСТАНОВКА КРАЕВЫХ ЗАДАЧ

1.1. Постановка задачи. Рассмотрим цилиндрическое тело, занимающее объем $V = S \times [0, L]$ (S — поперечное сечение цилиндра; L — его длина). Боковую поверхность обозначим $\Gamma = \partial S \times [0, L]$, ∂S — граница сечения S. С геометрическим центром тяжести одного из торцов цилиндра совместим начало декартовой системы координат $Ox_1x_2x_3$, направив ось Ox_3 по оси цилиндра. Эту систему координат будем называть основной. Для описания винтовой анизотропии введем винтовую цилиндрическую систему координат (r, θ, z), связанную с основной соотношениями

$$x_1 = r\cos(\theta + \tau z), \qquad x_2 = r\sin(\theta + \tau z), \qquad x_3 = z, \tag{1.1}$$

где $\tau = \mathrm{const}$.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 07-01-00254а).

Переход к цилиндрической системе обусловлен тем, что ниже основное внимание будет уделено решению задачи о цилиндре с кольцевым поперечным сечением $S = [r_1, r_2] \times [0, 2\pi]$ (r_1, r_2 — внутренний и внешний радиусы цилиндра соответственно).

При $r = \mathrm{const}$, $\theta = \mathrm{const}$ соотношения (1.1) являются параметрическими уравнениями винтовой линии, при этом $\tau = 2\pi/h$ (h — шаг винтовой спирали). Радиус-вектор точек винтовой линии представим в виде

$$\boldsymbol{R} = r\boldsymbol{e}_1' + z\boldsymbol{e}_3',$$

где

$$\boldsymbol{e}_1' = \boldsymbol{e}_r = \boldsymbol{i}_1 \cos(\theta + \tau z) + \boldsymbol{i}_2 \sin(\theta + \tau z),$$
$$\boldsymbol{e}_2' = \boldsymbol{e}_\theta = -\boldsymbol{i}_1 \sin(\theta + \tau z) + \boldsymbol{i}_2 \cos(\theta + \tau z), \qquad \boldsymbol{e}_3' = \boldsymbol{e}_z,$$

$\boldsymbol{i}_n$ — орты основной системы координат.

С винтовой линией свяжем естественный базис (репер Френе)

$$\boldsymbol{e}_1 = \boldsymbol{n}, \qquad \boldsymbol{e}_2 = \boldsymbol{b}, \qquad \boldsymbol{e}_3 = \boldsymbol{t},$$

где $\boldsymbol{n}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{t}$ — орты главной нормали, бинормали и касательной соответственно. Используя формулы

$$\frac{d\boldsymbol{R}}{ds} = \boldsymbol{t}, \qquad \frac{d\boldsymbol{t}}{ds} = k\boldsymbol{n}, \qquad \boldsymbol{b} = \boldsymbol{t} \times \boldsymbol{n},$$
$$ds = g\,dz, \qquad g^2 = 1 + x^2, \qquad x = \tau r,$$

где $k = \tau^2 r/g^2$ — кривизна винтовой линии, после ряда преобразований получаем ортогональную матрицу перехода от базиса $\boldsymbol{e}_j$ к базису $\boldsymbol{e}_i'$

$$A = \begin{Vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1/g & x/g \\ 0 & x/g & 1/g \end{Vmatrix}.$$

Будем считать, что материал цилиндра в базисе $\boldsymbol{e}_i$ обладает ромбоэдрической симметрией. Связь между напряжениями и деформациями запишем в векторно-матричной форме [7]

$$\boldsymbol{\sigma} = C\boldsymbol{\varepsilon}, \qquad \boldsymbol{\sigma} = (\sigma_1, \ldots, \sigma_6)^{\mathrm{т}}, \qquad \boldsymbol{e} = (e_1, \ldots, e_6)^{\mathrm{т}}. \tag{1.2}$$

Здесь

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} & 0 & 0 \\ c_{12} & c_{11} & c_{13} & -c_{14} & 0 & 0 \\ c_{13} & c_{13} & c_{33} & 0 & 0 & 0 \\ c_{14} & -c_{14} & 0 & c_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{44} & c_{14} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{14} & c_{66} \end{pmatrix},$$

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_{11}, \quad \varepsilon_2 = \varepsilon_{22}, \quad \varepsilon_3 = \varepsilon_{33}, \quad \varepsilon_4 = 2\varepsilon_{34}, \quad \varepsilon_5 = 2\varepsilon_{13}, \quad \varepsilon_6 = 2\varepsilon_{12},$$
$$\sigma_1 = \sigma_{11}, \quad \sigma_2 = \sigma_{22}, \quad \sigma_3 = \sigma_{33}, \quad \sigma_4 = \sigma_{23}, \quad \sigma_5 = \sigma_{13}, \quad \sigma_6 = \sigma_{12},$$

ε_{ij}, σ_{ij} — компоненты тензоров малых деформаций и напряжений соответственно.

Обозначим через $\boldsymbol{\sigma}'$, $\boldsymbol{\varepsilon}'$, C' вектор напряжений, вектор деформаций, матрицу модулей упругости соответственно в базисе винтовой системы координат $\boldsymbol{e}_j'$. При этом закон Гука принимает вид

$$\boldsymbol{\sigma}' = C'\boldsymbol{\varepsilon}', \qquad C' = (c_{ij}') \quad (i = 1, \ldots, 6,\ j = 1, \ldots, 6), \tag{1.3}$$

где

$$c'_{11} = c_{11}, \qquad c'_{12} = (c_{12} - 2c_{14}x + c_{13}x^2)/g^2,$$
$$c'_{13} = (c_{13} + 2c_{14}x + c_{12}x^2)/g^2, \qquad c'_{14} = [(c_{12} - c_{13})x - c_{14}(x^2 - 1)]/g^2,$$
$$c'_{22} = [c_{11} + 4c_{14}x + (c_{13} + 2c_{44})2x^2 + c_{33}x^4]/g^4,$$
$$c'_{23} = [c_{13} - 2c_{14}x + (c_{11} + c_{33} - 4c_{44})x^2 + 2c_{14}x^3 + c_{13}x^4]/g^4,$$
$$c'_{24} = [-c_{14} - (c_{13} + 2c_{44} - c_{11})x + 3c_{14}x^2 - (c_{33} - c_{13} - 2c_{44})x^3]/g^4,$$
$$c'_{33} = [c_{33} + 2(c_{13} + 2c_{44})x^2 - 4c_{14}x^3 + c_{11}x^4]/g^4,$$
$$c'_{34} = [-(c_{33} - c_{13} - 2c_{44})x - 3c_{14}x^2 - (2c_{44} + c_{13} - c_{11})x^3 + c_{14}x^4]/g^4,$$
$$c'_{44} = [c_{44} - 2c_{14}x + (-2c_{13} + c_{11} + c_{33} - 2c_{44})x^2 + 2c_{14}x^3 + c_{44}x^4]/g^4,$$
$$c'_{55} = (c_{44} + 2c_{14}x + c_{66}x^2)/g^2, \qquad c'_{56} = x[c_{14} - (c_{44} - c_{66})x - c_{14}x^2]/g^2,$$
$$c'_{66} = (c_{66} - 2c_{14}x + c_{44}x^2)/g^2.$$

Ниже используется следующая связь между различными обозначениями:

$$\sigma'_1 = \sigma_{rr}, \quad \sigma'_2 = \sigma_{\theta\theta}, \quad \sigma'_3 = \sigma_{zz}, \quad \sigma'_4 = \sigma_{\theta z}, \quad \sigma'_5 = \sigma_{rz}, \quad \sigma'_1 = \sigma_{r\theta},$$
$$\varepsilon'_1 = \varepsilon_{rr}, \quad \varepsilon'_2 = \varepsilon_{\theta\theta}, \quad \varepsilon'_3 = \varepsilon_{zz}, \quad \varepsilon'_4 = 2\varepsilon_{\theta z}, \quad \varepsilon'_5 = 2\varepsilon_{rz}, \quad \varepsilon'_6 = 2\varepsilon_{r\theta}.$$

Компоненты тензора деформаций в базисе винтовой системы координат выражаются через координаты вектора смещения $\boldsymbol{u} = (u_r, u_\theta, u_z)^{\mathrm{т}}$ по следующим формулам:

$$\begin{gathered} \varepsilon_{rr} = \partial_r u_r, \qquad \varepsilon_{\theta\theta} = (u_r + \partial_\theta u_\theta)/r, \qquad \varepsilon_{zz} = Du_z, \\ 2\varepsilon_{r\theta} = \partial_r u_\theta + (\partial_\theta u_r - u_\theta)/2, \qquad 2\varepsilon_{rz} = \partial_r u_z + Du_r, \\ 2\varepsilon_{z\theta} = \partial_\theta u_z + Du_\theta. \end{gathered} \tag{1.4}$$

В данном случае уравнения равновесия в напряжениях имеют вид

$$\begin{gathered} \partial_r(r\sigma_{rr}) - \sigma_{\theta\theta} + \partial_\theta\sigma_{r\theta} + rD\sigma_{rz} = 0, \\ \partial_r(r\sigma_{r\theta}) + \sigma_{r\theta} + \partial_\theta\sigma_{\theta\theta} + rD\sigma_{\theta z} = 0, \\ \partial_r(r\sigma_{rz}) + \partial_\theta\sigma_{\theta z} + rD\sigma_{zz} = 0. \end{gathered} \tag{1.5}$$

В формулах (1.4), (1.5)

$$\partial_r = \frac{\partial}{\partial r}, \qquad \partial_\theta = \frac{\partial}{\partial \theta}, \qquad \partial = \frac{\partial}{\partial z}, \qquad D = \partial - \tau\,\partial_\theta.$$

Будем считать, что боковая поверхность цилиндра свободна от напряжений:

$$r = r_\alpha \quad (\alpha = 1, 2): \qquad \sigma_{rr} = 0, \quad \sigma_{r\theta} = 0, \quad \sigma_{rz} = 0. \tag{1.6}$$

1.2. Векторно-операторный вид задачи. Поставленную задачу можно представить в векторно-операторном виде

$$M(\partial, \tau)\boldsymbol{u} \equiv \partial^2 A_0\boldsymbol{u} + \partial A_1\boldsymbol{u} + A_2\boldsymbol{u} = 0; \tag{1.7}$$

$$N(\partial, \tau)\boldsymbol{u} \equiv (\partial B_0\boldsymbol{u} + B_1\boldsymbol{u})\big|_\Gamma = 0. \tag{1.8}$$

Уравнения (1.7), (1.8) — уравнения равновесия и граничные условия, где A_k, B_i ($k = 0, 1, 2$, $i = 0, 1$) — матричные дифференциальные операторы по переменным r, θ нулевого, первого и второго порядков. Конкретный вид операторов A_k, B_i в данной работе не приводится.

Заметим только, что в силу соотношений (1.3) коэффициенты этих операторов зависят от r и τ, но не зависят от z, что позволяет искать решение в виде

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{a}\,\mathrm{e}^{\gamma z}\,.$$

В результате получаем спектральную задачу на сечении $z = \mathrm{const}$

$$M_1(\gamma)\boldsymbol{a} \equiv \{M(\gamma)\boldsymbol{a}, N(\gamma)\boldsymbol{a}\} = 0. \tag{1.9}$$

Согласно общей теории квадратичных пучков симметричных операторов [8] спектр оператора $M_1(\gamma)$ дискретен, имеет точку сгущения на бесконечности и расположен в комплексной плоскости $\gamma = \alpha + i\beta$ симметрично относительно вещественной оси, т. е. при $\alpha \ne 0$ любому собственному значению (СЗ) $\gamma_s^+ = \gamma_s = \alpha_s + i\beta_s$, $\alpha_s \geqslant 0$, $\beta_s \geqslant 0$ соответствуют три СЗ $\gamma_{-s}^+ = \alpha_s - i\beta_s$, $\gamma_s^- = -\gamma_s$, $\gamma_{-s}^- = -\alpha_s - i\beta_s$. В [1, 3, 4] показано, что $\gamma_0 = 0$, $\gamma_1^\pm = \pm i\tau$ являются четырехкратными СЗ и кроме $\gamma_1^\pm$ других чисто мнимых СЗ не существует.

Решение задачи (1.9) можно представить в виде [4]

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}_S + \boldsymbol{u}_p,$$

где $\boldsymbol{u}_S$ — решение Сен-Венана, которое соответствует СЗ $\gamma_0 = 0$, $\gamma_1^\pm = \pm i\tau$; $\boldsymbol{u}_p$ — решение, соответствующее остальной части спектра и имеющее вид

$$\boldsymbol{u}_p = \sum_k [C_k^- u_k^-(z) + C_k^+ u_k^+(z - L)], \qquad u_k^\pm(z) = a_k^\pm \exp{(\gamma_k^\pm z)},$$

$C_k^\pm$ — произвольные постоянные.

Решение $\boldsymbol{u}_S$ является “основным”, поскольку охватывает всю область, занятую цилиндром, решение $\boldsymbol{u}_p$ — “погранслоем”, поскольку локализуется вблизи торцов цилиндра $z = 0, L$ и экспоненциально убывает по мере удаления от них.

Следует отметить, что напряженное состояние решения Сен-Венана в любом поперечном сечении $z = \mathrm{const}$ в интегральном смысле эквивалентно главному вектору и главному моменту внешних усилий, приложенных к одному из торцов цилиндра. Главный вектор и главный момент напряжений, соответствующие любым значениям $u_k^\pm(z)$, равны нулю.

2. ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ РЕШЕНИЯ СЕН-ВЕНАНА ЗАДАЧИ РАСТЯЖЕНИЯ-КРУЧЕНИЯ

Решение Сен-Венана задачи растяжения-кручения [3, 4] является линейной комбинацией элементарных решений, соответствующих четырехкратному СЗ $\gamma_0 = 0$, и может быть представлено в виде

$$\boldsymbol{u}_S = \sum_{l=1}^{4} X_l \boldsymbol{u}_l,$$

$$\boldsymbol{u}_1 = (0, 0, 1)^{\mathrm{T}}, \qquad \boldsymbol{u}_2 = (0, r, 0)^{\mathrm{T}}, \qquad \boldsymbol{u}_3 = z\boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{a}_3, \qquad \boldsymbol{u}_4 = z\boldsymbol{u}_2 + \boldsymbol{a}_4,$$

$$\boldsymbol{a}_s = (a_{r,s}, a_{\theta,s}, a_{z,s})^{\mathrm{T}}, \qquad s = 3, 4.$$

Здесь $\boldsymbol{a}_s$ — вектор-функции, координаты которых зависят от r и определяются решением краевых задач, приведенных ниже; X_1 — постоянная, имеющая смысл смещения цилиндра как твердого тела вдоль оси Oz; X_2 — постоянная, имеющая смысл угла поворота относительно оси Oz; X_3, X_4 — постоянные, механический смысл которых поясняется ниже.

Рассмотрим задачу определения вектор-функций $\boldsymbol{a}_s$. С учетом формул (1.3) определим напряжения, соответствующие векторам $\boldsymbol{u}_s$:

$$\begin{gathered}\boldsymbol{\sigma}'_s = C'\boldsymbol{\varepsilon}_s^{(1)} + C'\boldsymbol{\varepsilon}_s^{(0)},\\ \boldsymbol{\varepsilon}_s^{(1)} = \Big(\frac{da_{r,s}}{dr}, \frac{a_{r,s}}{r}, 0, \frac{da_{z,s}}{dr}, \frac{da_{\theta,s}}{dr} - \frac{a_{\theta,s}}{r}\Big)^{\mathrm{т}}, \\ \boldsymbol{\varepsilon}_3^{(0)} = (0,0,1,0,0,0)^{\mathrm{т}}, \qquad \boldsymbol{\varepsilon}_4^{(0)} = (0,0,0,r,0,0)^{\mathrm{т}}.\end{gathered} \tag{2.1}$$

Поскольку координаты векторов $\boldsymbol{\sigma}'_s$ зависят только от r, из уравнений равновесия (1.5) и граничных условий (1.6) получаем

$$\begin{gathered}\partial_r(r\sigma_{rr,s}) - \sigma_{\theta\theta,s} = 0, \qquad \sigma_{rr,s}(r_\alpha) = 0,\\ \partial_r(r\sigma_{r\theta,s}) + \sigma_{r\theta,s} = 0, \qquad \sigma_{r\theta,s}(r_\alpha) = 0,\\ \partial_r(r\sigma_{rz,s}) = 0, \qquad \sigma_{rz,s}(r_\alpha) = 0,\end{gathered} \tag{2.2}$$

откуда следует, что

$$\sigma_{r\theta,s} = \sigma_{rz,s} = 0.$$

Из этих соотношений и выражений (2.1) для $\sigma_{r\theta,s}, \sigma_{rz,s}$ находим

$$a_{\theta,s} = X_{1,s}r + X_{0,s}, \qquad a_{z,s} = X_{2,s},$$

где $X_{0,s}$, $X_{1,s}$, $X_{2,s}$ — произвольные постоянные, которые можно положить равными нулю.

Подставляя выражения для $\sigma_{rr,s}$, $\sigma_{\theta\theta,s}$ из (2.1) в (2.2), для определения $a_{r,s}$ получаем краевые задачи

$$Za_{r,s} = F_s, \qquad la_{r,s}\big|_{r=r_\alpha} = f_{\alpha,s}, \tag{2.3}$$

где

$$\begin{gathered}Za_s = \frac{d}{dr}\Big(rc'_{11}\,\frac{da_s}{dr} + c'_{12}a_s\Big) - c'_{12}\,\frac{da_s}{dr} - \frac{1}{r}\,c'_{22}a_s, \qquad la_s = c'_{11}\,\frac{da_s}{dr} + \frac{1}{r}\,c'_{12}a_s,\\ s=3\colon \qquad F_3 = -\frac{d(rc'_{13})}{dr} + c'_{23}, \qquad f_{\alpha,3} = -c'_{13}(r_\alpha),\\ s=4\colon \qquad F_4 = -\frac{d(r^2c'_{14})}{dr} + rc'_{24}, \qquad f_{\alpha,4} = -r_\alpha c'_{14}(r_\alpha).\end{gathered}$$

Определим постоянные X_l $(l = 1,\dots,4)$. Будем считать, что на торцах цилиндра заданы граничные условия

$$z = 0\colon \qquad u_r = u_\theta = u_z = 0; \tag{2.4}$$

$$z = L\colon \qquad \sigma_{rz} = p_r, \qquad \sigma_{z\theta} = p_\theta, \qquad \sigma_{zz} = p_z, \tag{2.5}$$

где функции p_r, p_θ, p_z зависят только от r.

Будем считать,что внешние заданные напряжения эквивалентны растягивающей силе P_z и крутящему моменту M_z:

$$2\pi\int_{r_1}^{r_2} p_r r\,dr = 0, \quad 2\pi\int_{r_1}^{r_2} p_\theta r\,dr = 0, \quad 2\pi\int_{r_1}^{r_2} p_z r\,dr = P_z, \quad 2\pi\int_{r_1}^{r_2} p_\theta r^2\,dr = M_z.$$

Очевидно, что

$$\sigma_{z\theta} = X_3\sigma_{z\theta,3} + X_4\sigma_{z\theta,4}, \qquad \sigma_{zz} = X_3\sigma_{zz,3} + X_4\sigma_{zz,4}$$

($\sigma_{\theta z,s}, \sigma_{zz,s}$ определяются из соотношений (2.1)). Используя эти выражения, чтобы удовлетворить граничным условиям (2.5) в интегральном смысле, получаем

$$d_{11}X_3 + d_{12}X_4 = P_z, \qquad d_{21}X_3 + d_{22}X_4 = M_z,$$

где

$$d_{11} = 2\pi \int\limits_{r_1}^{r_2} r\sigma_{zz,3}\,dr, \qquad d_{22} = 2\pi \int\limits_{r_1}^{r_2} r^2\sigma_{z\theta,4}\,dr,$$

$$d_{12} = 2\pi \int\limits_{r_1}^{r_2} r\sigma_{zz,4}\,dr = d_{21} = 2\pi \int\limits_{r_1}^{r_2} r^2\sigma_{z\theta,3}\,dr.$$

Согласно работе [4] при граничных условиях (2.4) и $r_2/L \ll 1$ можно считать, что $X_1 = X_2 = 0$.

3. МЕТОДЫ ПОСТРОЕНИЯ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ РЕШЕНИЙ СЕН-ВЕНАНА И РЕЗУЛЬТАТЫ ЧИСЛЕННОГО АНАЛИЗА

3.1. Метод малого параметра. Сначала построим аналитические решения. Преобразуем выражения (1.2), (1.3), выполнив в них замены $r = r_2\xi$, $\tau_0 = r_2\tau$. Предполагая, что безразмерный параметр $\tau_0 \ll 1$, разложим c'_{ml} в ряды по τ_0. В результате получаем следующие выражения для главных членов разложений:

$$\begin{gathered} c'_{11} = c_{11}, \qquad c'_{12} = c_{12} - 2c_{14}\tau_0\xi, \qquad c'_{13} = c_{13} + 2c_{14}\tau_0\xi, \\ c'_{14} = c_{14} + \tau_0\xi(c_{12} - c_{13}), \qquad c'_{22} = c_{11} + 4c_{14}\tau_0\xi, \\ c'_{23} = c_{13} - 2c_{14}\tau_0\xi, \qquad c'_{24} = -c_{14} - \tau_0\xi(c_{13} + 2c_{44} - c_{11}), \\ c'_{33} = c_{33}, \qquad c'_{34} = (-c_{33} + c_{13} + 2c_{44})\tau_0\xi, \qquad c'_{44} = c_{44} - 2c_{14}\tau_0\xi, \\ c'_{55} = c_{44} + 2c_{14}\tau_0\xi, \qquad c'_{56} = c_{14}\tau_0\xi, \qquad c'_{66} = c_{66} - 2c_{14}\tau_0\xi. \end{gathered} \tag{3.1}$$

Решение краевых задач (2.3) будем искать в виде

$$a_{r,s} = a_s^{(0)} + \tau_0 a_s^{(1)} + \ldots. \tag{3.2}$$

Подставляя выражения (3.1), (3.2) в соотношения (2.3), после ряда стандартных преобразований и интегрирования получаем задачи

$$a_{r,3} = -\nu'\xi + O(\tau_0^2),$$

$$a_{r,4} = -K_0r^2 + K_1R_2K_0\frac{1}{r} + K_0R_1r + O(\tau_0^2),$$

где

$$\nu' = \frac{c_{13}}{c_{11} + c_{12}}, \quad K_0 = \frac{c_{14}}{c_{11}}, \quad K_1 = \frac{c_{11} + c_{12}}{c_{11} - c_{12}}, \quad R_1 = \frac{r_1^2 + r_2^2 + r_1r_2}{r_1 + r_2}, \quad R_2 = \frac{(r_1r_2)^2}{r_1 + r_2}.$$

Приведем выражения для главных членов компонент тензоров напряжений:

$$\sigma_{zz,3} = E' + O(\tau_0), \qquad \sigma_{\theta z,3} = O(\tau_0),$$

$$\sigma_{r\theta,l} = \sigma_{rz,l} = 0, \qquad \sigma_{rr,3} = \sigma_{\theta\theta,3} \equiv O(\tau_0^2),$$

$$\sigma_{rr,4} = K_0(c_{11}+c_{12})(-r - R_2/r^2 + R_1) + O(\tau_0),$$
$$\sigma_{\theta\theta,4} = K_0(c_{11}+c_{12})(-2r + R_2/r^2 + R_1) + O(\tau_0),$$
$$\sigma_{zz,4} = K_0 c_{13}(-3r + 2R_1) + O(\tau_0),$$
$$\sigma_{\theta z,4} = r(c_{44} - K_0 c_{14}) - 2K_0 K_1 c_{14} R_2/r^2 + O(\tau_0).$$

Здесь $E' = c_{33} - 2\nu' c_{13}$.

Замечание. Главным членам приведенных выше формул соответствует решение задач растяжения и кручения цилиндра с цилиндрической ромбоэдрической анизотропией. Эти задачи решались в [9]. Однако при использовании полуобратного метода авторы работы [9] допустили существенные ошибки, в результате чего были получены неверные результаты. В [10] предпринята попытка исправить эти ошибки.

3.2. Метод численного интегрирования краевых задач. Для проведения численного интегрирования задачу (2.3) представим в виде системы дифференциальных уравнений первого порядка, введя вектор $\boldsymbol{y}_s = (y_{1,s}, y_{2,s})^{\mathrm{т}}$ с координатами

$$y_{1,s} = a_{r,s}, \qquad y_{2,s} = r\sigma_{rr,s}/c_{11}.$$

Тогда краевые задачи (2.3) можно записать в виде

$$\frac{d\boldsymbol{y}_s}{dr} - A\boldsymbol{y}_s = \boldsymbol{q}_s, \qquad y_{2,s}(r_\alpha) = 0, \tag{3.3}$$

где элементы матрицы A и координаты векторов $\boldsymbol{q}_s$ имеют следующий вид:

$$A_{11} = -\frac{c'_{12}}{rc'_{11}}, \qquad A_{12} = \frac{1}{rc'_{11}}, \qquad A_{21} = \frac{c'_{11}c'_{22} - c'^2_{12}}{rc'_{11}}, \qquad A_{22} = \frac{c'_{12}}{rc'_{11}},$$
$$q_{1,3} = -\frac{c'_{13}}{c'_{11}}, \qquad q_{2,3} = c'_{23} - \frac{c'_{12}c'_{13}}{c'_{11}}, \qquad q_{1,4} = -\frac{rc'_{14}}{c'_{11}}, \qquad q_{2,4} = r\Big(c'_{24} - \frac{c'_{12}c'_{14}}{c'_{11}}\Big).$$

Численное интегрирование краевых задач (3.3) осуществлялось методом прогонки. Решение задач (3.3) отыскивалось в виде

$$\boldsymbol{y}_s = \boldsymbol{y}_s^0 + B_s \boldsymbol{y}_s^1,$$

где $\boldsymbol{y}_s^0$, $\boldsymbol{y}_s^1$ — решения задач Коши

$$\frac{d\boldsymbol{y}_s^0}{dr} - A\boldsymbol{y}_s^0 = \boldsymbol{y}_s, \qquad \boldsymbol{y}_s^0(r_1) = (0,0)^{\mathrm{т}},$$
$$\frac{d\boldsymbol{y}_s^1}{dr} - A\boldsymbol{y}_s^1 = 0, \qquad \boldsymbol{y}_s^1(r_1) = (1,0)^{\mathrm{т}},$$

а постоянные B_s определены из условий

$$y_{2,s}(r_2) = B_s y^1_{2,s}(r_2) + y^0_{2,s}(r_2) = 0,$$

для того чтобы решения удовлетворяли граничным условиям при $r = r_2$.

В заключение приведем некоторые результаты численного анализа задачи. Все расчеты проводились для цилиндра с ромбоэдрической в базисе Френе анизотропией при следующих значениях модулей упругости [11]: $c_{11} = 86{,}8 \cdot 10^9$ Па, $c_{33} = 105{,}75 \cdot 10^9$ Па, $c_{44} = 58{,}2 \cdot 10^9$ Па, $c_{12} = 7{,}04 \cdot 10^9$ Па, $c_{13} = 11{,}91 \cdot 10^9$ Па, $c_{14} = -18{,}04 \cdot 10^9$ Па.

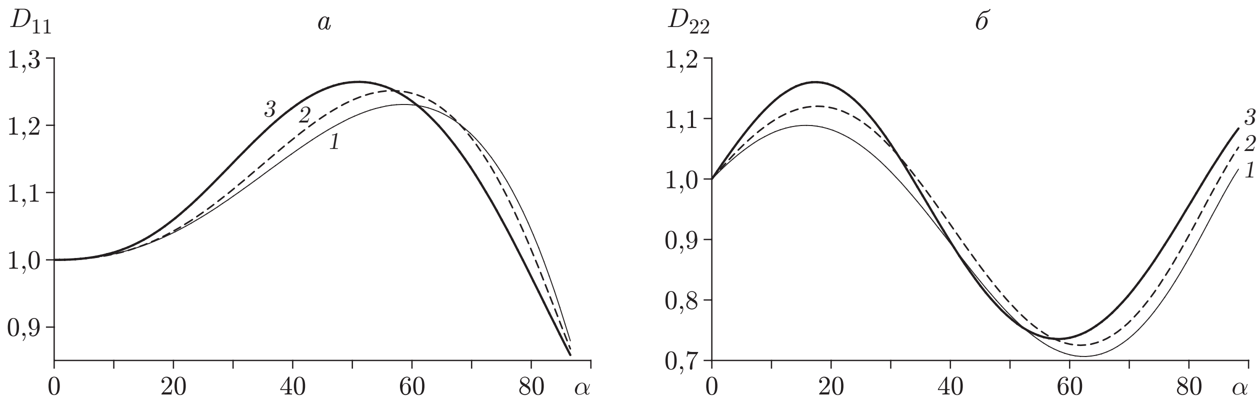

Рис. 1. Зависимости жесткости на растяжение D_{11} (*а*) и кручение D_{22} (*б*) от параметра α при различных значениях параметра a: *1* — $a = 0{,}1$; *2* — $a = 0{,}4$; *3* — $a = 0{,}8$

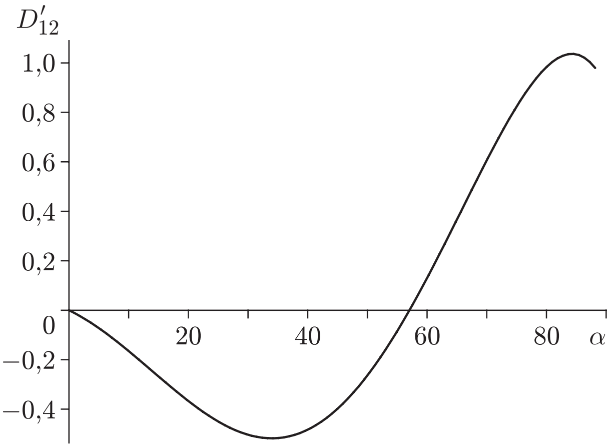

Рис. 2. Зависимость $D'_{12}(\alpha)$ при $a = 0{,}4$

На основе численного интегрирования исследовались зависимости нормированных элементов матрицы жесткостей

$$D_{11} = d_{11}/d_{11}^0, \qquad D_{22} = d_{22}/d_{22}^0, \qquad D'_{12} = d_{12}/(r_2 d_{11}^0) \tag{3.4}$$

от параметра $\alpha = \operatorname{arctg} \tau_0 \in [0, \pi/2]$ при различных значениях параметра $a = r_1/r_2$. В (3.4)

$$d_{11}^0 = \pi E'(r_2^2 - r_1^2), \qquad d_{22}^0 = \frac{\pi}{2}\,(r_2^4 - r_1^4)\Big(c_{44} - \frac{c_{14}^2}{c_{11}}\Big) - 4\pi\,\frac{c_{14}^2}{c_{11}}\,\frac{c_{12} + c_{11}}{c_{11} - c_{12}}\,\frac{(r_1 r_2)^2 (r_2 - r_1)}{r_1 + r_2} \text{ —}$$

соответственно жесткости на растяжение и кручение цилиндра, рассматриваемого как стержень, при $\alpha = 0$.

На рис. 1 приведены зависимости жесткости на растяжение D_{11} и кручение D_{22} от параметра α, на рис. 2 — зависимость $D'_{12}(\alpha)$. Из рис. 1, 2 следует, что наибольшая жесткость на растяжение имеет место при значениях параметра α в диапазоне $[45°, 65°]$, жесткость на кручение — в диапазоне $[10°, 25°]$. Жесткость на кручение также имеет минимум — в диапазоне значений α $[50°, 65°]$.

Следует отметить, что при любом фиксированном значении параметра a существует такое значение $\alpha = \alpha_*$ ($\alpha_* \ne 0, \pi/2$), при котором d_{12} меняет знак на противоположный. При этом значении α (как и при $\alpha = 0, \pi/2$) растяжение-сжатие цилиндра не вызывает кручения, и, наоборот, кручение не вызывает продольной деформации.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Устинов Ю. А.** Решение задачи Сен-Венана для стержня с винтовой анизотропией // Докл. АН. 2001. Т. 360, № 6. С. 770–773.
2. **Устинов Ю. А., Курбатова Н. В.** Задачи Сен-Венана для стержней с физической и геометрической анизотропией // Изв. вузов. Сев.-Кавк. регион. Мат. моделирование. 2001. Спецвыпуск. Естеств. науки. С. 154–157.
3. **Устинов Ю. А.** Решение задачи Сен-Венана для цилиндра с винтовой анизотропией // Прикл. математика и механика. 2003. Т. 67, вып. 1. С. 89–98.
4. **Устинов Ю. А.** Задачи Сен-Венана для псевдоцилиндров. М.: Наука, 2003.
5. **Устинов Ю. А.** Некоторые задачи для цилиндрических тел с винтовой анизотропией // Успехи механики. 2003. № 4. С. 37–62.
6. **Романова Н. М., Устинов Ю. А.** Задача Сен-Венана об изгибе цилиндра с винтовой анизотропией // Прикл. математика и механика. 2008. Т. 72, вып. 4. С. 668–677.
7. **Лехницкий С. Г.** Теория упругости анизотропного тела. М.: Наука, 1977.
8. **Гетман И. П.** Математическая теория нерегулярных твердых волноводов / И. П. Гетман, Ю. А. Устинов. Ростов н/Д: Изд-во Рост. гос. ун-та, 1993.
9. **Городцов В. А., Лисовенко Д. С.** Упругие свойства графитовых стержней и многослойных углеродных нанотрубок (кручение и растяжение) // Изв. РАН. Механика твердого тела. 2005. № 4. С. 42–56.
10. **Ватульян К. А., Устинов Ю. А.** Задача Сен-Венана кручения цилиндрического анизотропного стержня // Математическое моделирование, вычислительная механика и геофизика: Тр. 5-й шк.-семинара, Ростов-на-Дону, 18–21 дек. 2006 г. Ростов н/Д: ЦВВР. 2007. С. 56–58.
11. **Шаскольская М. П.** Кристаллы. М.: Наука, 1985.

Поступила в редакцию 12/III 2008 г.,
в окончательном варианте — 27/II 2009 г.