УДК 532.5

ОБТЕКАНИЕ НЕОДНОРОДНОСТЕЙ ПЛОСКОЙ ПОВЕРХНОСТИ С ОБРАЗОВАНИЕМ ПРИСОЕДИНЕННОГО ВИХРЯ

А. А. Абрашкин, Е. И. Якубович

(Горький)

Явление отрыва потока, обтекающего неоднородную плоскую поверхность, и связанное с ним образование присоединенного к поверхности вихря интенсивно изучаются [1, 2]. Наиболее обоснованной и приближенной к реальности схемой движения жидкости при обтекании тел является схема Лаврентьева. Согласно ей, движение внутри вихревых областей предполагается однородно завихренным, а вне их — потенциальным. Классические примеры течений в этой схеме — обтекание траншеи, уступа [2] — рассматривались ранее только с помощью численных методов.

В настоящей работе построены аналитические решения такого рода задач: обтекание бугорка и траншеи по схеме Лаврентьева. В обоих случаях предполагается, что границей между вихрем и потенциальным течением служит дуга окружности (для бугорка это полуокружность). Форма бугорка и траншеи зависит от двух параметров: $U(\Omega a)^{-1}$ и угла α, под которым дуга подходит к плоскости (U — скорость набегающего потока, Ω — постоянная завихренность, a — полухорда, стягивающая дугу окружности),— и потому может быть в значительной степени произвольной. Условие существования вихря при заданном α определяется значением $U(\Omega a)^{-1}$. Для бугорка абсолютная величина этого числа должна быть меньше некоторого критического, приблизительно равного 0,12, а для траншеи — больше критического значения, определяемого α (этот угол, как показано, не должен превышать 60°).

1. Обтекание бугорка. Рассмотрим течение следующего вида: однородный на бесконечности поток U обтекает стационарный вихрь, прикрепленный к возвышению на плоской поверхности — бугорку (рис. 1). Течение внутри вихря будем считать однородно завихренным. Кроме того, предположим, что линия, разделяющая области вихревого и потенциального движений (верхняя граница вихря), является полуокружностью. Требуется найти условия на выбор параметров вихря, при которых указанное течение существует, а также форму поверхности бугорка (нижней границы вихря).

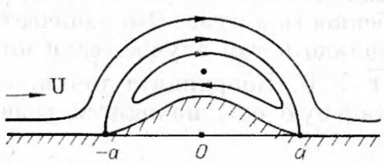


Рис. 1

Для получения аналитического решения сформулированной задачи воспользуемся методом сшивки стационарного однородно завихренного и потенциального течений, предложенным в [3]. Пусть потенциал течения вне вихря известен и равен $\Phi(\overline{W})$. Определяемое этим потенциалом поле скорости течения запишется как

$$V = \frac{d\Phi(\overline{W})}{d\overline{W}}, \quad W = X + iY, \quad \overline{W} = X - iY; \tag{1.1}$$

выражение для линий тока имеет вид

$$\Phi(\overline{W}) - \overline{\Phi}(W) = -2i\psi, \ \overline{\Phi}(W) = \overline{\Phi(\overline{W})}. \tag{1.2}$$

Поскольку течение стационарно, граница вихря совпадает с одной из линий тока, например ψ_0. Уравнение границы

$$\Phi(\overline{W}) - \overline{\Phi}(W) = -2i\psi_0. \tag{1.3}$$

Выражение для поля скорости вихревого течения, как нетрудно убедиться непосредственной проверкой, можно представить в форме

$$V = i\,\frac{\Omega}{2}\,(W - Z) + \frac{d\Phi(\overline{W})}{d\overline{W}}, \tag{1.4}$$

где Ω — постоянная завихренность, а функция Z находится из уравнения

$$\Phi(\overline{W}) - \overline{\Phi}(Z) = -2i\psi_0. \tag{1.5}$$

Отметим, что на границе вихря значение функции Z совпадает с W, и, следовательно, скорость на линии сшивки течений непрерывна.

Очевидно, что при таком подходе характер течения полностью зависит от вида потенциала $\Phi(\overline{W})$. В нашем случае, когда линией, отделяющей вихрь от потенциального потока, служит полуокружность, потенциал удобно выбрать равным функции Жуковского $\Phi(\overline{W}) = U(\overline{W} + a^2/\overline{W})$ (a — радиус полуокружности). Линии тока определяются соотношением $U(\overline{W} + a^2/\overline{W}) - U(W + a^2/W) = -2i\psi$. Границе вихря отвечает $\psi_0 = 0$, при этом с учетом (1.5) можно найти $Z(\overline{W}) = a^2(\overline{W})^{-1}$, а значит, и скорость в вихре

$$V = i\frac{\Omega}{2}W - i\frac{\Omega}{2}\frac{a^2}{\overline{W}} + U\left(1 - \frac{a^2}{\overline{W}^2}\right). \tag{1.6}$$

Соответствующее этому полю скорости выражение для функции тока запишется как

$$\psi = -\frac{1}{4}\left(|\overline{W}|^2 - a^2\right) + \frac{\Omega}{2}a^2\ln\frac{|\overline{W}|}{a} + UY\left(1 - \frac{a^2}{|\overline{W}|^2}\right),$$

где учтено, что $\psi = 0$ при $|\overline{W}| = a$. Уравнение нижней границы вихря

$$-\frac{1}{4}\Omega\left(|\overline{W}|^2 - a^2\right) + \frac{\Omega}{2}a^2\ln\frac{|\overline{W}|}{a} + UY\left(1 - \frac{a^2}{|\overline{W}|^2}\right) = 0. \tag{1.7}$$

Выясним, при каких условиях может существовать полученное решение. Как следует из (1.6), у поля скорости вихревого течения есть особенность в нуле. Это означает, что решение (1.6) имеет физический смысл только в том случае, если нижняя граница вихря проходит выше точки $\overline{W} = 0$. Координата точки, в которой граница вихря пересекает вертикальную ось, находится решением трансцендентного уравнения

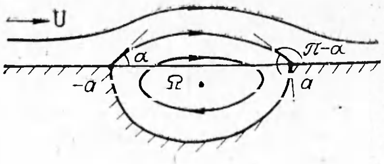
$$(Y^2 - a^2)\left(Y - \frac{4U}{\Omega}\right) = 2a^2Y\ln\frac{Y}{a}, \tag{1.8}$$

получающегося из (1.7), если положить $X = 0$. Уравнение (1.8) удобно исследовать графически. Для существования режима обтекания с присоединенным вихрем необходимо, чтобы графики кривых, определяемых правой и левой частями уравнения (1.8), имели точки пересечения в интервале $(0, a)$. Достаточный критерий существования такого решения выглядит следующим образом:

$$-\frac{U}{\Omega a} \leqslant \frac{e^2+1}{4e(e^2-1)} \approx 0{,}12 \qquad (e \simeq 2{,}71). \tag{1.9}$$

Заметим, что левая часть неравенства (1.9) всегда положительна — это вытекает из физических соображений (см. рис. 1), $U(\Omega a)^{-1}$ не фигурирует в исходных уравнениях гидродинамики, и поэтому полученный результат о зависимости условия существования присоединенного вихря от этого числа представляется весьма нетривиальным. Физический смысл неравенства (1.9) достаточно прост: характерная скорость в вихре Ωa должна быть достаточно велика по сравнению со скоростью однородного потока.

Безразмерное число $U(\Omega a)^{-1}$ определяет угол, под которым нижняя граница вихря отходит от плоской поверхности. Например, в точке $\overline{W} = a$ (см. рис. 1) $\theta = 4U(\Omega a)^{-1}$, откуда видно, что при неизменном положении верхней границы угол θ может меняться в зависимости от параметров течения. Полученный результат связан с тем обстоятельством, что верхняя граница вихря подходит перпендикулярно к плоскости. Если же она подходит к плоскости в точке $\overline{W} = a$ под углом, бо́льшим прямого, то, как показано в [4] (или см. [2]), этот угол должен быть равен $\theta/2$, т. е. угол отхода от плоскости нижней границы однозначно определяется положением верхней границы. Указанное общее свойство границ присоединенных вихрей проиллюстрировано ниже.



Р и с. 2

2. Обтекание траншеи. Рассмотрим обтекание однородным потоком стационарного вихря, прикрепленного к цилиндрической ямке в плоскости — траншее. Предположим, что верхняя граница вихря — дуга окружности, а угол α, под которым она отходит от плоскости (рис. 2), меньше прямого. Для аналитического описания обтекания траншеи воспользуемся соотношениями (1.1)—(1.5).

Потенциал течения во внешности вихря

$$\Phi(\overline{W}) = \frac{2aU\pi}{\pi-\alpha}\left[1-\left(\frac{\overline{W}-a}{\overline{W}+a}\right)^{\pi/(\pi-\alpha)}\right]^{-1}. \tag{2.1}$$

Это выражение описывает потенциальное обтекание однородным потоком возвышения в виде сегмента [1]. В частном случае $\alpha = \pi/2$ потенциал (2.1) равен функции Жуковского с точностью до несущественного постоянного слагаемого. Поле скорости потенциального течения находится из выражения

$$V = 4a^2\beta^2 U\frac{(\overline{W}^2-a^2)^{\beta-1}}{[(\overline{W}+a)^\beta-(\overline{W}-a)^\beta]^2}\quad \left(\beta=\frac{\pi}{\pi-\alpha}\right),$$

откуда, в частности, видно, что скорость на бесконечности стремится к постоянной U.

Скорость в вихре, согласно (1.4), (1.5),

$$V = i\frac{\Omega}{2}(W-Z)+4a^2\beta^2U\frac{(\overline{W}^2-a^2)^{\beta-1}}{[(\overline{W}+a)^\beta-(\overline{W}-a)^\beta]^2}, \tag{2.2}$$

где функция Z определяется уравнением $[(Z-a)/(Z+a)]^\beta[(\overline{W}+a)/(\overline{W}-a)]^\beta = 1$. Из множества решений этого уравнения следует выбрать то, которое обеспечивает непрерывность скорости на границе сшивки течений. Нетрудно убедиться, что этому условию удовлетворяет выражение

$$Z = \frac{a^2}{\sin^2\frac{\pi}{\beta}}\left(\overline{W}+ai\operatorname{ctg}\frac{\pi}{\beta}\right)^{-1}+ai\operatorname{ctg}\frac{\pi}{\beta}. \tag{2.3}$$

Из него видно, что для точек, лежащих на дуге окружности, $Z = W$ и что функция Z имеет полюс в точке $\overline{W} = -ai\operatorname{ctg}(\pi/\beta)$. Чтобы рассматриваемое течение имело физический смысл, нижняя граница вихря должна проходить выше этой точки.

Уравнение нижней границы запишем в форме

$$\psi_* = 1-\frac{|\overline{W}|^2}{a^2}+\frac{1}{\sin^2\frac{\pi}{\beta}}\ln\left(\left|\frac{\overline{W}}{a}+i\operatorname{ctg}\frac{\pi}{\beta}\right|^2\sin^2\frac{\pi}{\beta}\right)+$$
$$+2\frac{Y}{a}\operatorname{ctg}\frac{\pi}{\beta}-\operatorname{Im}\frac{8\beta U}{i\Omega}\left[1-\left(\frac{\overline{W}-a}{\overline{W}+a}\right)^\beta\right]^{-1}=0. \tag{2.4}$$

Кривая, определяемая этим уравнением, симметрична относительно вертикальной оси. Вблизи, например, точки a $\psi_* \approx -\frac{8\beta U}{a\Omega}\left(\frac{q}{2a}\right)^\beta\sin\beta\delta$, $\beta < 2$, где q, δ — соответственно модуль и фаза возмущения комплексной координаты $\overline{W}$ в точке a. Из полученного равенства следует, что нижняя граница отходит от плоскости в точке a под углом $2(\pi-\alpha)$, т. е. касательная к верхней границе в точке a является биссектрисой этого угла (см. рис. 2).

Найдем условие существования присоединенного вихря в траншее. Для этого надо найти координату точки, в которой нижняя граница вихря пересекает вертикальную ось (точка пересечения должна лежать выше точки $Y^0 = ia\,\mathrm{ctg}\,(\pi/\beta)$. Введем новые переменные r, φ, задаваемые равенством $(\overline{W} - a)/(\overline{W} + a) = re^{i\varphi}$. На вертикальной оси $r = 1$ и точка пересечения нижней границы с этой осью $\overline{W}_* = ia\,\mathrm{ctg}\,(\varphi_*/2)$ определяется уравнением

$$1 - \mathrm{ctg}^2\frac{\varphi_*}{2} + \sin^{-2}\frac{\pi}{\beta}\ln\left(\left|\mathrm{ctg}\frac{\varphi_*}{2} + \mathrm{ctg}\frac{\pi}{\beta}\right|^2 \sin^2\frac{\pi}{\beta}\right) -$$
$$- 2\,\mathrm{ctg}\frac{\pi}{\beta}\,\mathrm{ctg}\frac{\varphi_*}{2} - \frac{4\beta U}{a\Omega}\mathrm{ctg}\frac{\beta\varphi_*}{2} = 0.$$

Его удобно переписать в форме

$$1 + \ln\left[\sin^2\alpha\left(\mathrm{ctg}\frac{\varphi_*}{2} - \mathrm{ctg}\,\alpha\right)^2\right] - \left(\mathrm{ctg}\frac{\varphi_*}{2} - \mathrm{ctg}\,\alpha\right)^2 = \frac{4\beta U}{a\Omega}\sin^2\alpha\,\mathrm{ctg}\frac{\beta\varphi_*}{2}. \tag{2.5}$$

Поскольку рассматривается случай вихря в траншее, величина Y_* должна лежать в интервале от $-a\,\mathrm{ctg}\,\alpha$ до нуля. Соответствующие этому интервалу значения φ_* удовлетворяют неравенству

$$2\alpha < \varphi_* < \pi. \tag{2.6}$$

Условия существования присоединенного вихря удобно выяснить с помощью графического метода. Внутри интервала изменения φ_* левая часть (2.5) всегда отрицательна. Кривая зависимости правой части от φ_* отрицательна на интервале от 0 до $\pi - \alpha$ (напомним, что $U(a\Omega)^{-1}$ отрицательна). Представив качественно ход этих кривых, нетрудно сделать два важных вывода: вихрь в траншее существует только в том случае, если дуга окружности верхней границы вихря подходит к плоскости под углом $\alpha < \pi/3$ (т. е. нуль правой части (2.5) лежит внутри интервала (2.6) или $\pi - \alpha > 2\alpha$); при выбранном α $|U(a\Omega)^{-1}|$ должна превышать некоторое критическое значение $|U(a\Omega)_*^{-1}|$, определяемое α. Отметим, что в отличие от обтекания бугорка присоединенный вихрь образуется при превышении скорости однородного потока критического значения характерной скорости в вихре (для обтекания бугорка справедлив обратный результат).

Как следует из соотношений (1.7), (2.4), форма бугорка и траншеи может быть в значительной степени произвольной в зависимости от значений $U(\Omega a)^{-1}$ и α (при обтекании траншеи). При рассмотрении задач обтекания неоднородностей заданной формы это обстоятельство позволяет из множества возможных профилей траншеи и бугорка выбрать профиль, наиболее близкий к заданному. Из физических соображений ясно (и в этом убеждают известные численные расчеты), что малая деформация вида обтекаемого контура не может существенным образом повлиять на характер течения. Поэтому полученные решения можно использовать и для практически важных задач обтекания профилей заданной формы с образованием присоединенного вихря.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Лаврентьев М. А., Шабат Б. В.** Проблемы гидродинамики и их математические модели.— М.: Наука, 1973.
2. **Гольдштик М. А.** Вихревые потоки.— Новосибирск: Наука, 1981.
3. **Абрашкин А. А., Якубович Е. И.** О стационарных течениях с постоянной завихренностью.— Горький, 1986.— (Препринт/ИПФ АН СССР; № 128).
4. **Садовский В. В.** О завихренной области вблизи твердой стенки.— Учен. зап. ЦАГИ.— 1971.— Т. 2, № 4.

Поступила 29/VII 1986 г.