Прикладная механика и техническая физика, 1996, т. 37, № 2

ГРУППОВАЯ КЛАССИФИКАЦИЯ ДВУМЕРНЫХ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ ВЯЗКОГО ТЕПЛОПРОВОДНОГО СОВЕРШЕННОГО ГАЗА

УДК 517.95+519.46

В. В. Бублик

**Институт теоретической и прикладной механики СО РАН,
630090 Новосибирск**

1. Общая постановка задачи. Исследуются групповые свойства системы дифференциальных уравнений, описывающих плоские ($\nu = 0$) и осесимметричные ($\nu = 1$) движения вязкого теплопроводного совершенного газа:

$$\rho_t + u\rho_x + v\rho_y + \rho u_x + \rho v_y + \nu\frac{\rho u}{x} = 0; \tag{1.1}$$

$$\rho(u_t + uu_x + vu_y) = -p_x - \frac{2}{3}\Big(\mu\Big(u_x + v_y + \nu\frac{u}{x}\Big)\Big)_x +$$
$$2(\mu u_x)_x + (\mu(u_y + v_x))_y + 2\nu\mu\Big(\frac{u}{x}\Big)_x; \tag{1.2}$$

$$\rho(v_t + uv_x + vv_y) = -p_y - \frac{2}{3}\Big(\mu\Big(u_x + v_y + \nu\frac{u}{x}\Big)\Big)_y +$$
$$+2(\mu u_y)_y + (\mu(u_y + v_x))_x + \nu\frac{\mu}{x}(u_y + v_x); \tag{1.3}$$

$$p_t + up_x + vp_y + p\Big(1 + \frac{R}{\varepsilon'}\Big)\Big(u_x + v_y + \nu\frac{u}{x}\Big) = \frac{1}{\varepsilon'}\Big(\Big(\text{æ}\Big(\frac{p}{\rho}\Big)_x\Big)_x + \Big(\text{æ}\Big(\frac{p}{\rho}\Big)_y\Big)_y + \nu\frac{\text{æ}}{x}\Big(\frac{p}{\rho}\Big)_x\Big)+$$
$$+2\mu\frac{R}{\varepsilon'}\Big(\frac{2}{3}\Big(u_x^2 - u_xv_y + v_y^2 + \nu\frac{u}{x}\Big(\frac{u}{x} - u_x - v_y\Big)\Big) + \frac{1}{2}(v_x + u_y)^2\Big). \tag{1.4}$$

Здесь ρ — плотность; p — давление; μ — коэффициент вязкости; æ — коэффициент теплопроводности; ε — внутренняя энергия газа; $\varepsilon' = d\varepsilon/dT$; T — температура.

Газ подчиняется уравнению Клапейрона $p = R\rho T$. Для совершенного газа внутренняя энергия зависит только от температуры [1]. Коэффициенты вязкости и теплопроводности считаются зависящими также только от температуры:

$$\mu = \mu(p/\rho), \quad \text{æ} = \text{æ}(p/\rho), \quad \varepsilon = \varepsilon(p/\rho). \tag{1.5}$$

Для уравнений (1.1)–(1.4) ставится задача групповой классификации по отношению к произвольным элементам μ, æ, ε [2]. Газ считается существенно вязким и теплопроводным ($\mu \neq 0$, $\text{æ} \neq 0$).

Допускаемая группа преобразований ищется в пространстве переменных t, x, y, u, v, ρ, p.

2. Преобразования эквивалентности. Проведение групповой классификации требует нахождения группы эквивалентностей, допускаемой уравнениями (1.1)–(1.4). Далее будут использованы следующие обозначения:

$$q = (t, x, y), \qquad w = (u, v, \rho, p), \qquad \tau = (\varepsilon', \mu, \text{æ}, \mu', \text{æ}'), \qquad h = (t, x, y, u, v, \rho, p),$$

$$w_i^k = \partial w^k/\partial q^i, \qquad w_{ij}^k = \partial w_i^k/\partial q^j, \qquad \tau_m^l = \partial \tau^l/\partial h^m$$

$$(k = 1,\ldots,4;\ i,j = 1,2,3;\ l = 1,\ldots,5;\ m = 1,\ldots,7).$$

К системе (1.1)–(1.4) добавляются условия на функции μ, $æ$, ε', которые являются следствием предположений (1.5):

$$\tau_i^k = 0 \quad (k,i = 1,\ldots,5); \tag{2.1}$$

$$\frac{\partial\mu}{\partial p} = \frac{\mu'}{R\rho}, \qquad \frac{\partial æ}{\partial p} = \frac{æ'}{R\rho}, \qquad \frac{\partial\varepsilon'}{\partial p} = \frac{\varepsilon''}{R\rho}, \tag{2.2}$$

$$\frac{\partial\mu}{\partial\rho} = -\frac{p\mu'}{R\rho^2}, \qquad \frac{\partial æ}{\partial\rho} = -\frac{pæ'}{R\rho^2}, \qquad \frac{\partial\varepsilon'}{\partial\rho} = -\frac{p\varepsilon''}{R\rho^2}. \tag{2.3}$$

В системе (1.1)–(1.4) производные по пространству от вязкости и теплопроводности представляются в виде

$$\frac{\partial\mu}{\partial x} = \left(\frac{p_x}{\rho} - \frac{p\rho_x}{\rho^2}\right)\mu', \qquad \frac{\partial\mu}{\partial y} = \left(\frac{p_y}{\rho} - \frac{p\rho_y}{\rho^2}\right)\mu', \qquad \frac{\partial æ}{\partial x} = \left(\frac{p_x}{\rho} - \frac{p\rho_x}{\rho^2}\right)æ',$$

$$\frac{\partial æ}{\partial y} = \left(\frac{p_y}{\rho} - \frac{p\rho_y}{\rho^2}\right)æ', \qquad \mu' = d\mu/dT, \qquad æ' = dæ/dT, \qquad \varepsilon'' = d\varepsilon'/dT.$$

Для системы (1.1)–(1.4), (2.1)–(2.3) решается задача о построении основной группы преобразований пространства переменных t, x, y, u, v, ρ, p, μ, $æ$, ε', μ', $æ'$ с допускаемым оператором $X^e = \xi^i\partial_{q^i} + \eta^j\partial_{w^j} + \alpha^k\partial_{\tau^k}$, где ξ^i, η^j, α^k — функции от t, x, y, u, v, ρ, p, μ, $æ$, ε', μ', $æ'$.

Координаты продолженного оператора $X_p^e = X^e + \zeta_j^i\partial_{w_j^i} + \zeta_{jk}^i\partial_{w_{jk}^i} + \beta_j^i\partial_{\tau_j^i}$ с учетом (2.1) находятся по формулам

$$\zeta_j^i = D_j\eta^i - w_k^i D_j\xi^k, \qquad \zeta_{jk}^i = D_k\zeta_j^i - w_{jl}^i D_k\xi^l, \qquad \beta_j^i = D'_j\alpha^i - \tau_3^i D'_j\eta^3 - \tau_7^i D'_j\eta^4.$$

Здесь

$$D_j = \partial_{q^j} + w_j^k\partial_{w^k} + w_{ij}^k\partial_{w_i^k} \quad (j = 1,2,3);$$

$$D'_j = \partial_{h^j} \quad (j = 1,\ldots,5); \qquad D'_k = \partial_{h^k} + \tau_k^i\partial_{\tau^i} \quad (k = 6,7).$$

Различие в вычислении координат ζ_j^i и β_j^i возникает из-за того, что переменные u, v, ρ, p и ε', μ, $æ$, μ', $æ'$ находятся в разных пространствах.

В результате вычислений группы эквивалентностей, проведенных на ЭВМ, получаются преобразования, соответствующие оператору

$$t\partial_t + x\partial_x + y\partial_y + \mu\partial_\mu + æ\partial_æ + \mu'\partial_{\mu'} + æ'\partial_{æ'} \tag{2.4}$$

и ядру основных групп ($\nu = 0, 1$), которое выписано ниже.

3. Результат групповой классификации. Уравнения (1.1)–(1.4) рассматриваются как система дифференциальных уравнений второго порядка на четыре неизвестные функции: u, v, ρ, p. Допускаемый этими уравнениями оператор ищется в виде

$$X = \xi^i\partial_{q^i} + \eta^j\partial_{w^j},$$

где ξ^i, η^j — функции от t, x, y, u, v, ρ, p.

Алгоритм нахождения допускаемой группы [2] требует большого объема промежуточных выкладок. Так, число определяющих уравнений в данном случае равно 28192. Поэтому

Таблица 1

№ п/п	ε	μ	$æ$	r	Базис L_r
1	$f\left(\frac{p}{\rho}\right)$	$g\left(\frac{p}{\rho}\right)$	$h\left(\frac{p}{\rho}\right)$	7	1, 2, 3, 4, 5, 6, 7
2	$\frac{p}{(\gamma-1)\rho}$	$\left(\frac{p}{\rho}\right)^\omega$	$æ_0\left(\frac{p}{\rho}\right)^\omega$	8	1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8

Таблица 2

	X_2	X_4	X_6	X_7	X_8
X_2	0	0	0	X_2	X_2
X_4	0	0	$-X_2$	0	X_4
X_6	0	X_2	0	X_6	0
X_7	$-X_2$	0	$-X_6$	0	0
X_8	$-X_2$	$-X_4$	0	0	0

их вывод выполнен на ЭВМ. Для проведения этих вычислений была написана программа на языке системы аналитических вычислений Reduce [3].

В результате вычислений получаются классифицирующие уравнения

$$c\left(R\frac{\mu}{\mu'} - \frac{p}{\rho^2}\left(\frac{\mu}{\mu'}\right)'\right) = 0, \quad c\left(R\frac{æ}{æ'} - \frac{p}{\rho^2}\left(\frac{æ}{æ'}\right)'\right) = 0; \tag{3.1}$$

$$c(\mu/æ)' = 0, \qquad c\varepsilon'' = 0 \tag{3.2}$$

с константой c, связанной с координатами ξ^i, η^k инфинитезимального оператора:

$$\xi^1 = c_6 + c_7 t, \quad \xi^2 = \nu(c_1 + c_3 t + c_5 y) + (c_7 + c)x, \quad \xi^3 = c_2 + c_4 t - \nu c_5 x + (c_7 + c)y,$$

$$\eta^1 = \nu(c_3 + c_5 v) + cu, \quad \eta^2 = c_4 - \nu c_5 u + cv, \quad \eta^3 = (-c_7 + 2(\omega - 1)c)\,\rho, \quad \eta^4 = (-c_7 + 2\omega c)p.$$

При нахождении ядра основных групп предполагается, что функции μ, $æ$, ε произвольные, следовательно, $c = 0$. Поэтому в случае плоской симметрии ($\nu = 0$) ядро является семипараметрической группой, а в случае осевой симметрии ($\nu = 1$) — четырехпараметрической.

Специализация элементов μ, $æ$, ε следует из уравнений (3.1), (3.2).

В табл. 1 приведен результат групповой классификации для случая плоской симметрии с точностью до преобразований эквивалентности (2.4). В ней f, g, h — произвольные функции указанных аргументов, $\gamma \neq 1$, ω, $æ_0$ — произвольные постоянные. Базис допускаемой алгебры представлен номерами операторов

$$X_1 = \partial_x, \ X_2 = \partial_y, \ X_3 = t\partial_x + \partial_u, \ X_4 = t\partial_y + \partial_v, \quad X_5 = y\partial_x - x\partial_y + v\partial_u - u\partial_v, \ X_6 = \partial_t,$$

$$X_7 = t\partial_t + x\partial_x + y\partial_y - \rho\partial_\rho - p\partial_p, \quad X_8 = x\partial_x + y\partial_y + u\partial_u + v\partial_v + 2(\omega - 1)\rho\partial_\rho + 2\omega p\partial_p.$$

В случае осевой симметрии уравнения не допускают операторы X_1, X_3, X_5, а в остальном результат классификации совпадает с представленным в табл. 1.

4. Точные решения. Для модели политропного газа со степенной зависимостью вязкости и теплопроводности от температуры были построены инвариантные и частично ин-

Таблица 3

Автоморфизм	x^2	x^4	x^6	x^7	x^8
A_2	$x^2 + a_2(x^7 + x^8)$	x^4	x^6	x^7	x^8
A_4	$x^2 - a_4x^4$	$x^4 + a_4x^8$	x^6	x^7	x^8
A_6	$x^2 + a_6x^4$	x^4	$x^6 + a_6x^7$	x^7	x^8
A_7	a_7x^2	x^4	a_7x^6	x^7	x^8
A_8	a_8x^2	a_8x^4	x^6	x^7	x^8
E_1	$-x^2$	x^4	$-x^6$	x^7	x^8
E_2	x^2	$-x^4$	$-x^6$	x^7	x^8

вариантные решения. В данной работе приводятся только некоторые решения уравнений осесимметричных движений газа.

Чтобы выделить классы существенно неподобных решений, требуется построить оптимальную систему подалгебр алгебры Ли $L_5 = \{X_2, X_4, X_6, X_7, X_8\}$. Для этого использован алгебраический подход к построению оптимальной системы подалгебр, который развит в последнее время [4–6].

В табл. 2 приведена таблица коммутаторов алгебры Ли L_5.

В табл. 3 даются действия внутренних автоморфизмов алгебры Ли L_5 на координаты вектора $X = x^iX_i$, где добавлены два дискретных автоморфизма: E_1 и E_2, соответствующих изменению направления осей y и t (в первом случае) и оси y (во втором) на противоположное.

В табл. 4 представлена оптимальная система подалгебр алгебры Ли L_5. Первое число в номере подалгебры обозначает ее размерность, а второе — ее номер среди подалгебр данной размерности. Коэффициент α может принимать любое вещественное значение, коэффициенты β и γ не могут принимать значения 0 и -1 соответственно. Самонормализованные подалгебры помечены знаком равенства. Верхний индекс означает, что в указанной подалгебре значение параметра берется равным верхнему индексу (например, через 4.1^0 обозначается подалгебра 4.1 с $\alpha = 0$).

В качестве примеров точных решений рассмотрим решения, полученные на основе трехмерных подалгебр. В этом случае инвариантные решения представляются системой алгебраических уравнений, а частично инвариантные — системой обыкновенных дифференциальных уравнений.

Под физическим решением будет пониматься решение системы (1.1)–(1.4), удовлетворяющее условиям $\rho > 0$, $p > 0$.

Необходимому условию существования инвариантного решения [2, теорема 19.3] удовлетворяют подалгебры 3.1 ($\alpha \neq -1$), 3.4, 3.5, 3.6, 3.7, 3.9. Ниже приводятся решения, построенные на основе этих подалгебр.

Подмодель 3.1 ($\alpha \neq -1$). Рассмотрим следующие случаи:

а) при $\alpha = 0$ решение имеет вид $u \equiv u_0 \neq 0$, $v = 0$, $\rho = \rho_0/x$, $p = p_0/x$, константы u_0, ρ_0, p_0 связаны соотношением

$$\left(\frac{p_0}{\rho_0}\right)^\omega = \frac{3}{4}\frac{p_0}{u_0};$$

Таблица 4

Номер подалгебры	Базис	Нормализатор
4.1	$2; 4; 6; 7 + \alpha 8$	L_5
4.2	$2; 6; 7; 8$	$= 4.2$
4.3	$2; 4; 7; 8$	$= 4.3$
4.4	$2; 4; 6; 8$	L_5
3.1	$2; 6; 7 + \alpha 8$	4.2
3.2	$2; 4; 7 + \alpha 8$	4.3
3.3	$6; 7; 8$	$= 3.3$
3.4	$4; 7; 8$	$= 3.4$
3.5	$2; 7; 8$	$= 3.5$
3.6	$2; 4 + 6; 7 + 8$	$= 3.6$
3.7	$2; 6; 4 + 7$	4.1^0
3.8	$2; 4; 6 + 8$	4.4
3.9	$2; 6; 8$	4.2
3.10	$2; 4; 8$	4.3
3.11	$2; 4; 6$	L_5
2.1	$6; 7 + \alpha 8$	3.3
2.2	$4; 7 + \alpha 8$	4.4
2.3	$2; 7 + \beta 8$	3.5
2.4	$7; 8$	$= 2.4$
2.5	$6; 2 + 7 - 8$	3.1^{-1}
2.6	$4; 2 + 7 - 8$	3.2^{-1}
2.7	$4; 7 - 8$	4.3
2.8	$4 + 6; 7 + 8$	$= 2.8$
2.9	$2; 4 + 7$	3.2^0
2.10	$2; 7$	4.3
2.11	$2; 6 + 8$	3.9
2.12	$6; 8$	4.2
2.13	$4; 8$	3.4
2.14	$2; 8$	4.2
2.15	$2; 4 + 6$	3.11
2.16	$2; 6$	L_5
2.17	$2; 4$	L_5
1.1	$7 + \gamma 8$	2.4
1.2	$2 + 7 - 8$	2.3^{-1}
1.3	$7 - 8$	3.5
1.4	$6 + 8$	2.12
1.5	$4 + 7$	2.2^0
1.6	$4 + 6$	3.6
1.7	8	3.3
1.8	6	4.2
1.9	4	4.3
1.10	2	L_5

б) при $\alpha = -1/2$ решением является состояние покоя:

$$u = v = 0, \quad \rho = \rho_0 x^{-2\omega}, \quad p = p_0 x^{-2(\omega+1)};$$

в) при других α $(\alpha \neq 0,\ \alpha \neq -1/2)$ физические решения существуют только при $\omega = 0$, т. е. когда μ, $æ$ — const:

$$u = u_0 x^{\alpha/(\alpha+1)}, \quad v = v_0 x^{\alpha/(\alpha+1)}, \quad \rho = \rho_0 x^{-(2\alpha+1)/(\alpha+1)}, \quad p = p_0 x^{-1/(\alpha+1)},$$

константы u_0, v_0, ρ_0, p_0 могут быть связаны двумя способами:

1) $$v_0 = 0, \qquad p_0 = \Big(\alpha\rho_0 u_0 + \frac{4}{3}\frac{2\alpha+1}{\alpha+1}\Big)u_0,$$

$$(1-2\alpha\gamma-\gamma)\rho_0^2 u_0^2 + \Big(4\frac{\alpha^2}{\alpha+1}\frac{\gamma-1}{R}æ_0 - \frac{4}{3}\frac{\alpha-1}{\alpha+1} - 4\frac{(\alpha-1)^2}{(\alpha+1)^2}\gamma\Big)\rho_0 u_0 + \frac{16}{3}\frac{2\alpha+1}{(\alpha+1)^2}\frac{\gamma-1}{R}æ_0 = 0;$$

2) $$p_0 = \frac{\alpha(3\alpha^2-8\alpha+4)}{3(\alpha+1)^2}\frac{1}{\rho_0},$$

$$\alpha^2(\gamma-1)v_0^2 + \frac{\alpha^3}{(\alpha+1)^3}\frac{1}{\rho_0^2}\Big(\frac{4}{3} - 4\gamma + \frac{4}{3}(3\alpha^2-8\alpha+4)\frac{\gamma-1}{R}æ_0 - 2\alpha^2\gamma - 5\alpha\gamma - \frac{\alpha}{3}\Big) = 0.$$

Подмодель 3.4. Физические решения существуют только при $\omega \neq 0$:

$$u = \frac{\omega-1}{\omega}\frac{x}{t}, \qquad v = v_0\frac{x}{t} + \frac{y}{t}, \qquad \rho = \rho_0 x^{2(\omega-1)} t^{1-2\omega},$$

$$p = p_0 x^{2\omega} t^{-2\omega-1}, \qquad \Big(\frac{p_0}{\rho_0}\Big)^\omega = \frac{3}{4}\frac{\omega-1}{\omega^2}\rho_0 - \frac{3}{2}\omega p_0.$$

Константы v_0, ρ_0, p_0 могут быть связаны двумя способами:

а) $$v_0 = 0, \qquad \frac{1-\omega}{\omega^4}\rho_0^2 + \Big(3 - \frac{2}{\omega(\gamma-1)} + 3\frac{1-\omega^2}{\omega^2}\frac{æ_0}{R}\Big)\rho_0 p_0 + 6\omega(\omega+1)\frac{æ_0}{R}p_0 = 0;$$

б) $$\rho_0 = \frac{6\omega^3(2\omega+1)}{(2\omega+3)(\omega-1)}p_0, \qquad v_0^2 = \frac{(1-\omega^2)(2\omega+3)}{2\omega^4}\frac{æ_0}{R} + \frac{2\omega^2-\omega-2}{2\omega^3} - \frac{2\omega+3}{3\omega^3}\frac{1}{\gamma-1}.$$

Подмодель 3.5. Физические решения существуют при $\omega \neq 0$, $\omega \neq 1/2$:

$$u = \frac{2\omega-1}{2\omega}\frac{x}{t}, \qquad v = v_0\frac{x}{t}, \qquad \rho = \rho_0 x^{2(\omega-1)} t^{1-2\omega},$$

$$p = p_0 x^{2\omega} t^{-1-2\omega}, \qquad \Big(\frac{p_0}{\rho_0}\Big)^\omega = \frac{3\omega p_0}{2\omega-1} - \frac{3\rho_0}{8\omega^2}.$$

Константы v_0, ρ_0, p_0 могут быть связаны двумя способами:

а) $$v_0 = 0, \quad \frac{12\omega(\omega+1)}{2\omega+1}\frac{\gamma-1}{R}æ_0 p_0^2 + \frac{-4\omega^2+4\omega-1}{8\omega^4}(\gamma-1)\rho_0^2 + \Big(\frac{1}{\omega} - \frac{3(\omega+1)}{2\omega^2}\frac{\gamma-1}{R}æ_0\Big)p_0\rho_0 = 0;$$

б) $$v_0^2 = \frac{2\omega-1}{12\omega^3(2\omega+1)}\Big(3(2\omega-1)(2\omega+1)^2 + 2\frac{æ_0}{R}(2\omega+3)(\omega+1) + 4\omega^2 - 8\omega - 3\Big),$$

$$p_0 = \frac{4\omega^2+4\omega-3}{2\omega^3(2\omega+1)}\rho_0.$$

Подмодель 3.6. Физическое решение существует только при $\omega = 0$, т. е. когда μ, $æ$ — const:

$$u = u_0\sqrt{x}, \qquad v = t + v_0\sqrt{x}, \qquad \rho = \frac{v_0}{2(u_0v_0+2)x\sqrt{x}}, \qquad p = \frac{(5v_0+8)u_0}{2(u_0v_0+2)\sqrt{x}},$$

$$\left(5\frac{\gamma-1}{R}æ_0 - \frac{11}{4}\gamma - \frac{21}{4}\right)u_0^3v_0^2 + 2\left(9\frac{\gamma-1}{R}æ_0 - 2\gamma\right)u_0^2v_0 +$$

$$+\frac{\gamma-1}{R}u_0v_0^4 + \frac{\gamma-1}{2}v_0^3 + 16\frac{\gamma-1}{R}æ_0u_0 = 0, \qquad u_0v_0 + 2 \neq 0.$$

Подмодели 3.7 *и* 3.9 физических решений не имеют.

Обобщением инвариантных решений являются частично инвариантные решения. При их построении возникает переопределенная система дифференциальных уравнений, требующая исследования на совместность, например, по алгоритму, описанному в [7]. Этот алгоритм, давая ответ на вопрос об интегрируемости системы, не всегда приводит к обозримому представлению решения. Здесь приводятся только два частично инвариантных решения, редуцируемых к инвариантным и имеющих наиболее простой вид.

Подмодель 3.10. Инварианты подгруппы: t, u/x, $\rho x^{2(1-\omega)}$, $px^{-2\omega}$. Решение ищем в виде

$$u = xu_1(t), \qquad \rho = x^{2(\omega-1)}\rho_1(t), \qquad p = x^{2\omega}p_1(t).$$

После исследования на совместность системы уравнений (1.1)–(1.4) для v получаем $v = y/t + x\varphi(t)$. Функции $u_1(t)$, $\varphi(t)$, $\rho_1(t)$, $p_1(t)$ находятся из уравнений

$$\rho_1' + 2\omega u_1\rho_1 + \rho_1/t = 0, \qquad \rho_1\left(u_1' + u_1^2\right) = -2\omega p_1 + \frac{4}{3}\omega\left(u_1 - \frac{1}{t}\right)\left(\frac{p_1}{\rho_1}\right)^{\omega},$$

$$\varphi' + \left(u_1 + \frac{1}{t} - \frac{2\omega+1}{\rho_1}\left(\frac{p_1}{\rho_1}\right)^{\omega}\right)\varphi = 0,$$

$$-p_1' + 4(\omega+1)\frac{\gamma-1}{R}æ_0\left(\frac{p_1}{\rho_1}\right)^{\omega+1} - 2(\omega+1)u_1p_1 - 2(\gamma-1)u_1p_1 - \gamma\frac{p_1}{t} +$$

$$+\frac{4}{3}(\gamma-1)\left(u_1 - \frac{1}{t}\right)^2\left(\frac{p_1}{\rho_1}\right)^{\omega} + \varphi^2\left(\frac{p_1}{\rho_1}\right)^{\omega} = 0.$$

Так как уравнения разрешены относительно первых производных всех искомых функций, то по теореме о редукции [2, теорема 22.7] решение является инвариантным.

Подмодель 3.11. Инварианты подгруппы: x, u, ρ, p. Решение ищем в виде

$$u = u(x), \qquad \rho = \rho(x), \qquad p = p(x).$$

После исследования на совместность системы уравнений (1.1)–(1.4) получаем $u = c_1/x\rho$, $v = v(x)$.

Рассмотрим подалгебру 2.16. Она является подалгеброй для 3.11. Инвариантное решение подмодели 2.16 имеет вид

$$u = u(x), \qquad v = v(x), \qquad \rho = \rho(x), \qquad p = p(x),$$

т. е. подмодель 3.11 является частным случаем подмодели 2.16 (более тщательное исследование показывает, что эти две модели полностью совпадают). Так как при переходе от подмодели 3.11 к подмодели 2.16 ранг решения сохраняется, а дефект уменьшается на единицу, то происходит редукция частично инвариантного решения 3.11 к инвариантному решению 2.16.

В зависимости от значения c_1 решение может быть описано двумя способами:
а) $c_1 \neq 0$; функции $v(x)$, $\rho(x)$, $p(x)$ удовлетворяют уравнениям

$$v'' = v'\Big(\omega\Big(\frac{\rho'}{\rho} - \frac{p'}{p}\Big) + \frac{1}{x}\Big(c_1\Big(\frac{\rho}{p}\Big)^{\omega} - 1\Big)\Big),$$

$$\rho'' = (\omega + 2)\frac{\rho'^2}{\rho} - \omega\frac{\rho' p'}{p} + \Big(\frac{3}{4}c_1\Big(\frac{\rho}{p}\Big)^{\omega} + \frac{3}{2}\omega + 1\Big)\frac{\rho'}{\rho} - \frac{3}{4}\Big(\frac{\rho}{c_1 x^2}\Big(\frac{\rho}{p}\Big)^{\omega} + \frac{2\omega}{p}\Big)\frac{p'}{x\rho} + \frac{3c_1\rho}{4x^2}\Big(\frac{\rho}{p}\Big)^{\omega},$$

$$p'' = -\frac{R}{æ_0}\rho v'^2 - \frac{4c_1^2 R\rho'^2}{3æ_0 x^2\rho^3} + (\omega + 2)\frac{\rho' p'}{\rho} - \Big(c_1\frac{R}{æ_0}x^2\rho p\Big(\frac{\rho}{p}\Big)^{\omega} +$$

$$+4c_1^2\frac{R}{æ_0} + \frac{c_1 x^2\rho p R}{æ_0(\gamma - 1)}\Big(\frac{\rho}{p}\Big)^{\omega} - \frac{3}{4}c_1 x^2\rho p\Big(\frac{\rho}{p}\Big)^{\omega} - \frac{3\omega + 4}{2}x^2\rho p\Big)\frac{\rho'}{x^3\rho^2} -$$

$$-\omega\frac{p'^2}{p} - \Big(\frac{c_1 R}{æ_0(\gamma - 1)}\Big(\frac{\rho}{p}\Big)^{\omega} + \frac{3x^2\rho p}{4c_1}\Big(\frac{\rho}{p}\Big)^{\omega} + \frac{3}{2}\omega + 1\Big)\frac{p'}{x} - \Big(\frac{4c_1 R}{æ_0\rho} - \frac{3}{4}x^2 p\Big(\frac{\rho}{p}\Big)^{\omega}\Big)\frac{c_1}{x^4};$$

б) $c_1 = 0$, $p \equiv p_0$; функции $v(x)$, $\rho(x)$ восстанавливаются из уравнений

$$v' = c_2\rho^{\omega}/x, \qquad \rho'' + \Big(\frac{1}{x} - \frac{\omega + 2}{\rho}\Big)\frac{\rho'}{\rho} - \frac{c_2\rho^{\omega - 1}}{p_0 x} = 0.$$

Остальные частично инвариантные решения, построенные на основе трехмерных подалгебр, имеют громоздкий вид и здесь не приводятся.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 93-013-17361).

ЛИТЕРАТУРА

1. **Овсянников Л. В.** Лекции по основам газовой динамики. М.: Наука, 1981.
2. **Овсянников Л. В.** Групповой анализ дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978.
3. **Hern A. C.** REDUCE user's manual: version 3.3. Santa Monica: RAND Publication, 1987.
4. **Овсянников Л. В.** Программа ПОДМОДЕЛИ. Новосибирск, 1992.
5. **Овсянников Л. В.** Программа ПОДМОДЕЛИ. Газовая динамика // Прикл. математика и механика. 1994. Т. 58, вып. 4. С. 30–55.
6. **Овсянников Л. В.** Об оптимальных системах подалгебр // Докл. РАН. 1993. Т. 333, № 6. С. 702–704.
7. **Kuranishi M.** Lectures on involutive Systems of partial differential Equations. Sao Paoulo, 1967.

Поступила в редакцию 1/III 1995 г.