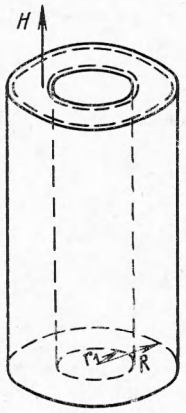
НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА ЦИЛИНДРИЧЕСКОГО ПЛАЗМЕННОГО КОНДЕНСАТОРА

В. А. Погосян, О. С. Торосян

(*Москва, Ереван*)

В данной работе рассматриваются переходные процессы, происходящие в цилиндрическом плазменном конденсаторе, находящемся в статическом магнитном поле H_0 при внезапном наложении на плазменный слой постоянного электрического поля E_0, перпендикулярного магнитному. Временные характеристики переходных процессов определяются динамикой поляризации плазмы во внешнем электрическом и магнитном полях [1,2]. Как и в работах [1, 2], будем рассматривать электростатическую поляризацию плазмы, когда протекание стационарного тока через плазму исключено.

1. Рассмотрим два неограниченных вдоль оси z коаксиальных цилиндра с внутренним радиусом r_1 и внешним радиусом R_1 (фигура). В пространстве между цилиндрами расположен цилиндрический слой однородной двукомпонентной, частично ионизованной плазмы с внутренним и внешним радиусами r_0 и R соответственно. Магнитное поле H_0 направлено вдоль оси z. Вся система симметрична относительно оси цилиндров. Пространство между цилиндрами разобъем на три области: область *1* ($r_1 \leqslant r \leqslant r_0$), область *2* ($r_0 \leqslant r \leqslant R$) и область *3* ($R \leqslant r \leqslant R_1$).



В областях *1* и *3* отсутствуют заряды.

В некоторый момент времени $t = 0$ к цилиндрам прикладывается разность потенциалов U_0 так, что внутренний цилиндр обладает потенциалом $^1/_2\, U_0$, а внешний — $^1/_2\, U_0$. Электрическое поле при $t = 0$ одинаково во всех трех областях и равно $E_0 = U_0 / R_1 - r_1$ (E_0 — имеет только радиальную составляющую), так как в момент времени $t = 0$ разделение зарядов в плазме еще не происходит, т. е. предполагается, что напряжение на обкладках конденсатора устанавливается гораздо раньше, чем в плазме происходят существенные изменения.

При наличии внешних электромагнитных полей на электроны и ионы будут действовать силы Лоренца, вследствие чего электроны и ионы в плазме двигаются, испытывая при этом соударения с нейтральными атомами газа с частотами ν_e и ν_p соответственно. Благодаря движению заряженных частиц в плазме произойдет изменение концентрации электронов и ионов $n_e(r, t)$ и $n_p(r, t)$ от общего начального уровня концентрации $N_e = N_p = n_0 = \mathrm{Const}$.

За счет неоднородной концентрации электронов и ионов в плазме возникнут диффузионные потоки, кроме того, так как $n_e(r, t) \neq n_p(r, t)$, то возникнет поле пространственных зарядов, которое, в свою очередь, окажет влияние на движение заряженных частиц (температуру электронов и ионов считаем постоянными и равными T_e и T_p соответственно).

2. Используя выражения для $v_{er}(r, t)$ и $v_{pr}(r, t)$, полученные в работе [2] из уравнений непрерывности, легко найти $n_e(r, t)$ и $n_p(r, t)$ с учетом очевидного начального условия

$$n_e(r, 0) = n_p(r, 0) = 0$$

$$n_e(r, t) = -n_0 \sum_j \lambda_j M_j(r) \Big\{ A_e \left(1 - \exp \frac{-\nu_e t}{2} \cos \delta_e t\right) - (B_e + b_e t) \exp \frac{-\nu_e t}{2} \sin \delta_e t + C_e \left(1 - \exp \frac{-\nu_p t}{2} \cos \delta_p t\right) - E_e \exp \frac{-\nu_p t}{2} \sin \delta_p t - Gt \exp \frac{-\nu_e t}{2} \cos \delta_e t + \frac{S_e}{\nu_e} (1 - \exp - \nu_e t) \Big\} \qquad (2.1)$$

$$n_p(r, t) = n_0 \sum_j \gamma_j L_j(r) \Big\{ A_p \left(1 - \exp \frac{-\nu_p t}{2} \cos \delta_\mu t\right) - (B_p + b_p t) \exp \frac{-\nu_p t}{2} \sin \delta_p t - G_p t \exp \frac{-\nu_p t}{2} \cos \delta_p t + \frac{S_p}{\nu_p} (1 - \exp - \nu_p t) \Big\}$$

Здесь

$$M_j(r)=\frac{J_0(\lambda_j r)}{J_1(\lambda_j r_0)}-\frac{y_0(\lambda_j r)}{y_1(\lambda_j r_0)}, \qquad L_j(r)=\frac{J_0(\gamma_j r)}{J_1(\gamma_j r_0)}-\frac{J_0(\gamma_j r)}{J_1(\gamma_j r_0)} \tag{2.2}$$

$$A_{ep}\frac{1}{{}^1/_4\nu_{ep}^2+\delta_{ep}^2}\left\{P_{ep}\delta_{ep}+Q_{ep}\frac{\nu_{ep}}{2}+\frac{p_{ep}\nu_{ep}\delta_{ep}+q_{ep}(\nu_{ep/4}^2-\delta_{ep}^2)}{{}^1/_4\nu_{ep}^2+\delta_{ep}^2}\right\}$$

$$B_{ep}=\frac{1}{{}^1/_4\nu_{ep}^2+\delta_{ep}^2}\left\{P_{ep}\frac{\nu_{ep}}{2}-Q_{ep}\delta_{ep}-\frac{q_{ep}\nu_{ep}\delta_{ep}-p_{ep}({}^1/_4\nu_{ep}^2-\delta_{ep}^2)}{{}^1/_4\nu_{ep}^2+\delta_{ep}^2}\right\}$$

$$C_e=\frac{R_e\delta_p}{{}^1/_4\nu_p^2+\delta_p^2}, \quad E_e=\frac{{}^1/_2\nu_p R_e}{{}^1/_4\nu_p^2+\delta_p^2}, \quad G_{ep}=\frac{p_{ep}\delta_{ep}+q_{ep}{}^1/_2\nu_{ep}}{{}^1/_4\nu_{ep}^2+\delta_{ep}^2}$$

$$B_{ep}=\frac{{}^1/_2\nu_{ep}p_{ep}-q_{ep}\delta_{ep}}{{}^1/_4\nu_{ep}^2+\delta_{ep}^2}$$

где I_0, I_1 и y_0, y_1 — функции Бесселя и Неймана нулевого и первого порядков соответственно. Параметры λ_j и γ_j определяются из трасцендентных уравнений (18) и (19) работы [2]. Коэффициенты A_e, A_p, B_e, B_p, b_e, b_p, и C_e, C_p получим, если в (2.2) учтем только соответствующий индекс, коэффициенты же P_{ep}, Q_{ep}, p_{ep}, q_{ep}, R_e, S_e, S_p так же, как и параметры δ_e и δ_p, определены в [2]. Коэффициенты, входящие в (2.1) и (2.2), зависят от напряженности магнитного поля H_0. Причем при больших значениях H_0 коэффициенты ведут себя как $1/H^\mu$, где $\mu \geqslant 2$.

Полученные выражения для распределения электронного и ионного концентраций по существу характеризуют динамику электростатической поляризации плазмы в магнитном поле при скачкообразном наложении электростатического радиального поля.

При отсутствии магнитного поля выражения для концентрации будут иметь вид

$$n_e(r,t)|_{H_0=0}=-n_0\sum_j\lambda_j M_j(r)\left\{\frac{eE_0}{m({}^1/_4\nu_e^2+\delta_e^2)}\left(\frac{\omega_p^2\beta_j}{\delta_p({}^1/_4\nu_e^2+\delta_e^2)}-\frac{\alpha_j}{\delta_e}\right)\right.$$
$$\left[\delta_e(1-\exp-{}^1/_2\nu_e t\cos\delta_e t)-\frac{\nu_e}{2}\exp-{}^1/_2\nu_e t\sin\delta_e t\right]+$$
$$\left.+\frac{\omega_e^2 eE_0\beta_j}{M({}^1/_4\nu_e^2+\delta_e^2)({}^1/_4\nu_p^2+\delta_p^2)}\left[(1-\exp-{}^1/_2\nu_p t\cos\delta_p t)-\frac{{}^1/_2\nu_p}{\delta_p}\exp-{}^1/_2\nu_p t\sin\delta_p t\right]\right\} \tag{2.3}$$

$$n_p(r,t)|_{H_0=0}=n_0\sum_j\gamma_j L_j(r)\left\{\frac{eE_0}{M({}^1/_4\nu_p^2+\delta_p^2)}\left(\frac{\omega_e^2\alpha_j}{{}^1/_4\nu_e^2+\delta_e^2}-\beta_j\right)\right.$$
$$\left.\left[1-\exp-{}^1/_2\nu_p t\cos\delta_p t-\frac{{}^1/_2\nu_p}{\delta_p}\exp-{}^1/_2\nu_p t\sin\delta_p t\right]\right\} \tag{2.4}$$

Здесь ω_{ep}, α_j, β_j определены в работе [2].

Из (2.3) и (2.4) следует, что концентрация электронов колеблется как с электронными, так и с ионными частотами, причем в амплитуду колебаний электронов входят затухающие экспоненциальные функции, в которых фактор затухания определяется частотами столкновений электронов и ионов с нейтральными атомами, концентрация же ионов колеблется только с ионными частотами, и фактор затухания зависит только от частоты столкновений ионов с нейтралами.

Наложение магнитного поля не создает направленного движения заряженных частиц, но при наличии электрического поля уменьшает подвижность электронов и ионов и тем самым замедляет процесс расслоения плазмы. Концентрации электронов и ионов при увеличении магнитного поля, как следует из (2.1) и (2.2), уменьшаются, и при $H_0 \to \infty$ имеем $n_e(r,t) \to 0$ и $n_p(r,t) \to 0$ как $1/H^2$.

При $t \to \infty$ устанавливается поляризованное состояние плазмы с распределениями концентраций

$$n_e(r,\infty)=-n_0\sum_j\lambda_j M_j(r)\left\{A_e+C_e+\frac{S_e}{\nu_e}\right\}, \quad n_p(r,\infty)=n_0\sum_j\gamma_j L_j(r)\left\{A_p+\frac{S_p}{\nu_p}\right\}$$

3. Поскольку в областях *1* и *3* зарядов нет (стенки, ограничивающие плазму, непроницаемы), распределение потенциала в этих областях удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\Delta U_1 = 0 \quad (r_1 \leqslant r \leqslant r_0), \qquad \Delta U_3 = 0 \quad (R \leqslant r \leqslant R_1) \tag{3.1}$$

Соответственно распределение потенциала в области *2* удовлетворяет уравнению Пуассона

$$\Delta U_2 = -4\pi\rho \quad (r_0 \leqslant r \leqslant R), \qquad \rho = e(n_p - n_e) \tag{3.2}$$

Подставляя в (3.2) значения n_e и n_p из (2.1) и (2.2), получим

$$\Delta U_2 = -4\pi e n_0 \sum_j [\gamma_j L_j(r)\psi_p(t) + \lambda_j M_j(r)\psi_e(t)] \tag{3.3}$$

В качестве граничных условий для (3.1), (3.2) и (3.3) примем соотношения

$$U_1(r_1, t) = {}^1/_2 U_0,\ U_3(R_1, t) = -{}^1/_2 U_0, \quad U_1(r_0, t) = U_2(r_0, t), \quad U_3(R, t) = U_2(R, t)$$

$$[\partial U_1/\partial r]_{r=r_0} = [\partial U_2/\partial r]_{r=r_0}, \qquad [\partial U_3/\partial r]_{r=R} = [\partial U_2/\partial r]_{r=R} \tag{3.4}$$

Последнее из равенств (3.4) отражает наблюдаемое экспериментально отсутствие тонких слоев заряда на поверхностях $r = r_0$ и $r = R$, $\psi_e(t)$ и $\psi_p(t)$, входящие в (3.3), равны

$$\psi_e(t) = A_e(1 - \exp - {}^1/_2\nu_e t\cos\delta_e t) - (B_e + b_e t)\exp - {}^1/_2\nu_e t\sin\delta_e t +$$
$$+ C_e(1 - \exp - {}^1/_2\nu_p t)\cos\delta_p t - E_e\exp - {}^1/_2\nu_p t\sin\delta_p t -$$
$$- G_e t\exp - {}^1/_2\nu_e t\cos\delta_e t\,\frac{S_e}{\nu_e}(1 - \exp - \nu_e t)$$

$$\psi_p(t) = A_p(1 - \exp - {}^1/_2\nu_p t\cos\delta_p t) - (B_p + b_p t)\exp - {}^1/_2\nu_p t\sin\delta_p t -$$
$$- G_p t\exp - {}^1/_2\nu_p t\cos\delta_p t + \frac{S_p}{\nu_p}(1 - \exp - \nu_p t)$$

Уравнения (3.1), (3.2) и (3.3) полностью описывают пространственное и временное распределения потенциала внутри плазменного конденсатора.

Решая уравнения (3.1), (3.2) и (3.3) с учетом граничных условий (3.4), получим

$$U_1(r, t) = \frac{U_0}{2}\frac{\ln(r^2/r_1)R_1}{\ln(r_1/R_1)} - \frac{4\pi e n_0\ln(r/r_1)}{\ln(r_1/R_1)} \times$$
$$\times\left\langle\sum_j\left\{\frac{1}{\gamma_j}[L_j(r_0) - L_j(R)]\psi_p(t) + \frac{1}{\gamma_j}[M_j(r_0) - M_j(R)]\psi_e(t)\right\}\right\rangle \tag{3.5}$$

$$U_2(r, t) = \frac{U_0}{2}\frac{\ln(r^2/r_1)R_1}{\ln(r_1/R_1)} + \frac{4\pi e n_0\ln r_1}{\ln(r_1/R_1)}\left\langle\sum_j\left\{\frac{1}{\gamma_j}[L_j(r) - L_j(R)]\psi_p(t) +\right.\right.$$
$$\left.\left. + \frac{1}{\gamma_j}[M_j(r) - M_j(R)]\psi_e(t)\right\}\right\rangle - \frac{4\pi e n_0\ln R_1}{\ln r_1/R_1}$$
$$\left\langle\sum_j\left\{\frac{1}{\gamma_j}[L_j(r) - L_j(r_0)]\psi_p(t) + \frac{1}{\lambda_j}[M_j(r) - M_j(r_0)]\psi_e(t)\right\}\right\rangle -$$
$$- \frac{4\pi e n_0\ln r}{\ln r_1/R_1}\left\langle\sum_j\left\{\frac{1}{\gamma_j}[L_j(r_0) - L_j(R)]\psi_p(t) + \frac{1}{\lambda_j}[M_j(r_0) - M_j(r)]\psi_e(t)\right\}\right\rangle \tag{3.6}$$

$$U_3(r, t) = \frac{U_0}{2}\frac{\ln r^2/r_1R_1}{\ln r_1/R_1} - \frac{4\pi e n_0\ln(r/R_1)}{\ln(r_1/R_1)}\left\langle\sum_j\left\{\frac{1}{\gamma_j}[L_j(r_0) - L_j(R)]\psi_p(t) +\right.\right.$$
$$\left.\left. + \frac{1}{\lambda_j}[M_j(r_0) - M_j(R)]\psi_e(t)\right\}\right\rangle \tag{3.7}$$

Функции $\psi_e(t)$ и $\psi_p(t)$ определяют времена релаксации переходного процесса и являются затухающими во времени.

Если в (3.5), (3.6) и (3.7) положить $t \to \infty$, то получим выражения для стационарного распределения потенциала, что соответствует затуханию переходных процессов.

Из (3.5), (3.6) и (3.7) видно, что потенциал — непрерывная функция двух переменных r и t. При изменении потенциалов U_1, U_2 и U_3 по времени в цепи конденсатора появится переходный ток. В силу непрерывности тока в областях *1* и *3*, которым соответствуют потенциалы U_1 и U_2, ток смещения будет равняться конвективному току области *2*. Поэтому плотность тока, протекающего через конденсатор, можно определить следующим образом:

$$j = \frac{1}{4\pi}\frac{\partial^2 U_1}{\partial r \partial t} \quad \text{или} \quad j = \frac{1}{4\pi}\frac{\partial^2 U_3}{\partial r \partial t}$$

Следовательно,

$$j(r, t) = -\frac{en_0}{r\ln(r_1/R_1)}\left\langle \sum_j \left\{ \frac{1}{\gamma_j}[L_j(r_0) - L_j(R)]\frac{\partial \psi_p}{\partial t} + \right.\right.$$
$$\left.\left. + \frac{1}{\lambda_j}[M_j(r_0) - M_j(R)]\frac{\partial \psi_e}{\partial t}\right\}\right\rangle$$

Переходный ток является затухающим. Поэтому по истечении достаточно большого промежутка времени (намного большего $2/\nu_p$) ток прекратится, причем заряд, отнесенный на единицу длины цилиндрической поверхности, изменится на величину

$$\Delta\sigma = 2\pi r_1 \int_0^\infty j(r_1, t)\,dt = -\frac{4\pi e n_0}{2\ln(r_1/R_1)}\left\langle \sum_j \left\{ \frac{1}{\gamma_j}[L_j(r_0) - L_j(R)](A_p + S_p/\nu_p) + \right.\right.$$
$$\left.\left. + \frac{1}{\gamma_j}[M_j(r_0) - M_j(R)]\psi_e(t)\right\}\right\rangle \tag{3.8}$$

Изменение заряда на обкладках цилиндрического конденсатора, вызванное введением в него плазмы, влечет за собой изменение емкости такого конденсатора при условии, что разность потенциалов поддерживается неизмененной. Это изменение, отнесенное к единице длины конденсатора, можно найти из (3.8)

$$\Delta C = \frac{4\pi e n_0}{2U_0\ln(r_1/R_1)}\sum_j \left\{ \frac{1}{\gamma_j}[L_j(r_0) - L_j(R)]\left(A_p + \frac{S_p}{\nu_p}\right) + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{\gamma_j}[M_j(r_0) - M_j(R)]\left(A_e + C_e\frac{S_e}{\nu_e}\right)\right\} \tag{3.9}$$

Формула (3.9) дает возможность по измеренным значениям ΔC определить ток и, следовательно,— концентрации электронов и ионов.

Заметим, что при $H_0 \to \infty$ изменение емкости ΔC так же, как и $n_e(r, t)$, $n_p(r, t)$ и $j(r, t)$, стремится к нулю. Это означает, что при очень сильных магнитных полях ($|H/E| \gg 1$) никакого разделения зарядов и, следовательно, поляризации плазмы не происходит, т. е. первоначальное однородное распределение плазмы остается неизменным.

В заключение авторы благодарят С. А. Регирера за полезные замечания.

Поступила 31 I 1967

ЛИТЕРАТУРА

1. Голованивский К. С., Погосян В. А. Некоторые свойства плазменного конденсатора. Ж. техн. физ., 1966, № 2, стр. 297.
2. Голованивский К. С., Погосян В. А., Торосян О. С. Поляризация цилиндрического слоя плазмы во внешнем статическом магнитном поле. Магнитная гидродинамика, 1967, № 1.