

10. Р. И. Солоухин. Докл. АН СССР, 1970, 194, 143.
11. Р. И. Солоухин. Ударные волны и детонация в газах. М., Физматгиз, 1963.
12. G. L. Schott. 154-th ACS meeting, Chicago, Illinois, Sept. 12—17, 1968.
13. P. Borrel, J. E. Millward. J. Chem. Phys., 1972, 57, 461.
14. S. B. Skinner. Comb. Flame, 1968, 12, 436.
15. И. С. Заслонко, С. М. Когарко и др. Докл. АН СССР, 1972, 202, 1121.
16. А. И. Демин, Е. М. Кудрявцев и др. Письма в ЖЭТФ, 1973, 18, 249.
17. D. Milks, R. A. Matula. XIV-th Symp. Int. on Combustion, August, 1972.
18. И. С. Заслонко, С. М. Когарко и др. Кинетика и катализ (в печати).
19. И. С. Заслонко, С. М. Когарко, Е. В. Мозжухин. Докл. АН СССР, 1973, 210, 1127.

УДК 662.215.1+662.311.1

ТЕОРИЯ ГОРЕНИЯ КОНДЕНСИРОВАННОГО ТОПЛИВА С ПЛОСКИМ ТЕПЛОПРОВОДЯЩИМ ЭЛЕМЕНТОМ

С. С. Рыбанин, Л. Н. Стесик

(Москва)

Известно, что помещение теплопроводящих элементов (ТЭ), представляющих собой металлические пластины, проволоочки и другие предметы, в конденсированное топливо (КТ) может приводить к увеличению скорости горения вблизи этих элементов [1—3]. Физическая сущность этого увеличения ясна: теплопроводящий элемент увеличивает тепловой поток от продуктов горения к топливу, что приводит к локальному повышению температуры и, следовательно, росту скорости горения вблизи ТЭ.

Теоретический расчет скорости горения КТ с теплопроводящими элементами представляет собой сложную задачу, связанную с решением неоднородных уравнений теплопроводности. Поэтому известные теоретические работы (см. [2] и ссылки к ней) содержат ряд допущений, облегчающих решение задачи, но не позволяющих построить замкнутую теорию и получить достаточно корректные результаты. В настоящей работе предпринята попытка построить замкнутую теорию горения КТ, содержащего плоский ТЭ, на основе асимптотического решения неоднородного уравнения теплопроводности в топливе.

Принимаются следующие обозначения: $a = \lambda/\rho c$ — коэффициент температуропроводности; c — теплоемкость; l_m — теплота плавления металла ТЭ; q — тепловой поток из расплавленной части ТЭ; T — температура; T_0 — начальная температура топлива; T_s — температура поверхности топлива; u — скорость продуктов горения топлива; u_k — фундаментальная скорость горения топлива; $u_k(T_n)$ — скорость горения топлива, нагретого до температуры T_n ; $u_* = \frac{a_m \lambda_k}{\delta l_m} \left(\frac{a_m}{a_k} \right)^{1/2}$ — характерная скорость; v — скорость «носика», образованного ТЭ и поверхностью топлива; x, y — оси координат; $Z = \frac{v}{u_k}$; β — температурный коэффициент скорости горения топлива; β_n — температурный коэффициент скорости «носика»; $\gamma = \left(\frac{d\tau_1}{d\eta} \right)_{\eta=0}^{\max}$ — значение производной $\frac{d\tau_1}{d\eta}$ (при $\eta=0$), при $\eta \rightarrow \infty$ $\tau_1 \rightarrow 0$; δ — половина толщины пластинки ТЭ; $\eta = \frac{xv}{a_m}$ — продоль-

ная безразмерная координата: $\theta = \frac{T_n - T_0}{T_b - T_0}$ — безразмерная температура «носика»;

$$\theta_m = \begin{cases} \frac{T_m - T_0}{T_b - T_0} & \text{при } T_m < T_b \\ 1 & \text{при } T_m \geq T_b; \end{cases}$$

$\kappa = \xi \left(\frac{2c\lambda}{c_k \lambda_k} \right)^{1/2}$ — коэффициент; λ — коэффициент теплопроводности; μ, ν — масштабные коэффициенты температурного поля в конденсированной фазе; ρ — плотность; $\tau = \frac{T_b - T}{T_b - T_n}$ — безразмерная температура; $\phi = v/u_\infty$ — безразмерная скорость «носика»; $\psi = yv/a_m$ — безразмерная поперечная координата; $\Omega = \frac{\left(\frac{d\tau_1}{d\eta} \right)_{\eta=0}}{\left(\frac{d\tau_1}{d\eta} \right)_{\eta=0}^{\max}}$ — параметр. Индексы относятся: к — к кон-

денсированному топливу (КТ), м — к теплопроводящему элементу (ТЭ), m — к точке плавления металла ТЭ, 1, 2, 3 — к температуре различных участков ТЭ и КТ (рис. 1). Теплофизические величины без индекса относятся к продуктам горения топлива.

На рис. 1 схематически изображено горение конденсированного топлива с плоским ТЭ. Части теплопроводящего элемента 1 и 2 находятся в продуктах горения 4 и топливе 3 соответственно. Система координат связана с «носиком», образованным поверхностями КТ и ТЭ. В этой системе координат топливо движется со скоростью «носика» v , которая считается независимой от времени. Предполагается, что КТ превращается в продукты горения с температурой T_b мгновенно. При расчете теплообмена ТЭ с продуктами горения конденсированного топлива химическая реакция между ними и излучение не учитываются. Величина коэффициента теплоотдачи α рассчиты-

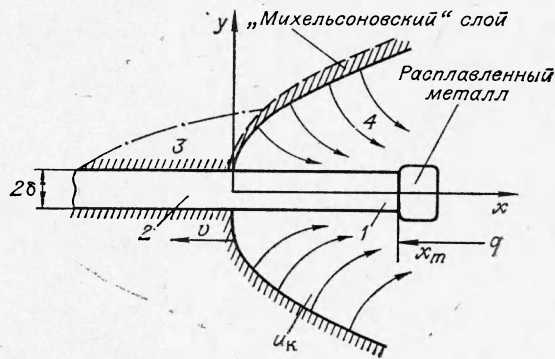


Рис. 1.

вается по формуле, соответствующей обтеканию пластины ламинарным потоком [4], причем величина плотности на границе ламинарного пограничного слоя считается равной $\rho u = 2 \langle \rho u \rangle$, где $\langle \rho u \rangle$ — плотность потока продуктов горения, осредненная по сечению канала, образованного ТЭ и поверхностью КТ. Расчеты, проведенные в работе [2], свидетельствуют о хорошей точности такого предположения. Легко показать, что $\langle \rho u \rangle = \rho_k v$, поэтому формулу для вычисления коэффициента α можно записать в следующем виде [4]:

$$\alpha = \frac{\xi \lambda}{x} \text{Re}^{1/2} \text{Pr}^{1/3} = \frac{\xi \lambda}{x \text{Pr}^{1/6}} \left(\frac{2 \rho_k v x c}{\lambda} \right)^{1/2},$$

где Re и Pr — числа Рейнольдса и Прандтля соответственно. Коэффициент ξ будем считать постоянным ($\xi = 0,332$ [4]), хотя для более точных расчетов следует учитывать зависимость ξ от градиента температуры в пограничном слое, от угла «носика», а также возможную турбулизацию потока при больших числах Рейнольдса.

Теплопроводящий элемент считается достаточно тонким, поэтому распределением температуры поперек ТЭ пренебрегаем. Это допущение справедливо при условии, когда толщина ТЭ $2\delta \ll \frac{a_m}{v}$.

При таких предположениях уравнение теплопроводности для части ТЭ, находящейся в продуктах горения, имеет вид:

$$\lambda_m \frac{d^2 T_1}{dx^2} - c_m \rho_m v \frac{dT_1}{dx} + \frac{\alpha (T_b - T_1)}{\delta} = 0,$$

а после перехода к безразмерным переменным

$$\frac{d^2 \tau_1}{d\eta^2} - \frac{d\tau_1}{d\eta} - \frac{\kappa \tau_1}{\varphi \eta^{1/2}} = 0. \quad (1)$$

В определение безразмерной температуры $\tau = \frac{T_b - T}{T_b - T_n}$ входит величина T_n — температура «носика», смысл введения которой будет понятен из дальнейшего изложения.

Граничные условия:

$$\eta = 0, \quad \tau_1 = \tau_2, \quad \frac{d\tau_1}{d\eta} = \frac{d\tau_2}{d\eta}.$$

Граничное условие на конце ТЭ в точке $\eta = \eta_m$ зависит от соотношения между температурой плавления T_m и температурой продуктов горения T_b :

если $T_b \leq T_m$, то при $\eta \rightarrow \infty$ $\tau_1 \rightarrow 0$,

если $T_b > T_m$, то при $\eta = \eta_m$ $\tau_1 = \tau_m, \left(\frac{d\tau_1}{d\eta}\right)_m = 0$.

Предположение $\left(\frac{d\tau_1}{d\eta}\right)_m = 0$ требует пояснения. Точное условие, определяющее значение производной $\left(\frac{d\tau_1}{d\eta}\right)_m$ имеет вид (для более ясного понимания запишем его в размерном виде):

$$2\delta \lambda_m \left(\frac{dT_1}{dx}\right)_m = q - 2\delta l_m \rho_m v.$$

Рассчитать величину потока тепла q из расплавленной части ТЭ довольно трудно. Это связано с неустойчивым поведением расплавленной части ТЭ в потоке продуктов горения. Можно показать, что расплавленный металл собирается в капли, которые срываются и уносятся этим потоком. Поэтому в строгом смысле условия на расплавленном конце ТЭ — нестационарные. Однако можно считать в первом приближении, что величина теплового потока в среднем по времени равна количеству тепла, идущего на плавление металла ТЭ, т. е. $\langle q \rangle \approx 2\delta l_m \rho_m v$, поэтому $\left(\frac{dT_1}{dx}\right)_m \approx 0$ и $\left(\frac{d\tau_1}{d\eta}\right)_m \approx 0$.

Уравнение теплопроводности для части ТЭ (см. рис. 1), находящейся в КТ, запишем сразу в безразмерном виде

$$\frac{d^2 \tau_2}{d\eta^2} - \frac{d\tau_2}{d\eta} + \frac{1}{\varphi} \left(\frac{a_k}{a_m}\right)^{1/2} \left(\frac{\partial \tau_2}{\partial \psi}\right)_{\psi=\psi\delta} = 0. \quad (2)$$

Граничные условия:

$$\eta = 0, \quad \tau_2 = \tau_1, \quad \frac{d\tau_2}{d\eta} = \frac{d\tau_1}{d\eta};$$

$$\eta \rightarrow -\infty, \quad \tau \rightarrow \tau_0.$$

Запишем уравнение теплопроводности для топлива

$$\frac{\partial^2 \tau_3}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 \tau_3}{\partial \psi^2} - \frac{a_m}{a_k} \frac{\partial \tau_3}{\partial \eta} = 0. \quad (3)$$

Граничные условия из-за симметрии запишем только для $\psi > 0$:

$$\eta = 0, \quad \psi = \psi_\delta = \frac{\delta v}{a_m}, \quad \tau_3 = \tau_2 = \tau_1;$$

$$\psi = \psi_\delta, \quad \tau_3 = \tau_2;$$

$$\eta \rightarrow -\infty, \quad \psi \rightarrow \infty, \quad \tau_3 \rightarrow \tau_0.$$

Кроме того, должны быть заданы граничные условия на поверхности горения, которые будут обсуждаться ниже.

Методом разделения переменных можно найти асимптотическое решение уравнения (3), удовлетворяющее граничным условиям при $\eta \rightarrow -\infty, \psi \rightarrow \infty$:

$$\tau_3 = \tau_0 + C_1 e^{v_1 \eta + \mu(\psi_\delta - \psi)} + C_2 e^{v_2 \eta + \mu(\psi_\delta - \psi)}, \quad (4)$$

где v_1, v_2, μ, C_1, C_2 — константы ($v > 0, \mu > 0$). Величины v и μ связаны следующим соотношением:

$$v^2 + \mu^2 - \frac{a_m}{a_k} v = 0. \quad (5)$$

Из равенства (4) и условия $\tau_2 = \tau_3$ при $\psi = \psi_\delta$ следует:

$$\tau_2 = \tau_0 + C_1 e^{v_1 \eta} + C_2 e^{v_2 \eta},$$

$$\left(\frac{\partial \tau_3}{\partial \psi} \right)_{\psi = \psi_\delta} = -\mu (C_1 e^{v_1 \eta} + C_2 e^{v_2 \eta}).$$

Подставив эти выражения в уравнение (2), получим еще одно соотношение для определения v и μ :

$$v^2 - v - \frac{\mu}{\varphi} \left(\frac{a_k}{a_m} \right)^{1/2} = 0. \quad (6)$$

Окончательный вид асимптотического решения уравнения (3), удовлетворяющего граничным условиям при $\eta \rightarrow \infty$ и $\psi \rightarrow \infty$:

$$\tau_3 = \tau_0 + C_1 e^{v \eta + \mu(\psi_\delta - \psi)}. \quad (7)$$

Асимптотическое решение уравнения (2) также описывается соотношением (7) при $\psi = \psi_\delta$

$$\tau_2 = \tau_0 + C_1 e^{v \eta}. \quad (8)$$

Для определения v и μ служат соотношения (5), (6). Выразим из них φ и μ через v :

$$\varphi = \frac{1}{v-1} \left(\frac{1}{v} - \frac{a_k}{a_m} \right)^{1/2}, \quad (9)$$

$$\mu = \left[v \left(\frac{a_m}{a_k} \right) \right]^{1/2}. \quad (10)$$

Третье уравнение, связывающее величины φ, μ и v , можно получить из условия сшивки решений уравнений (1)–(2) в точке $\eta = 0$. Однако найти точное решение уравнения (2) при $\eta \rightarrow 0$ не удастся, поэтому для сшивки решений (1)–(2) воспользуемся приближенными соотношениями, при этом ограничимся предельными случаями, когда $v \ll \frac{a_m}{a_k}$ и $v \rightarrow \frac{a_m}{a_k}$. С этой целью проанализируем масштабы температур-

ного поля в топливе по осям x и y в области, где справедливо асимптотическое решение (7). Эта область простирается от границы слоя, прогретого в результате горения («михельсоновского» слоя), размеры которого у «носика» порядка $\frac{a_k}{v}$ до значений $x \rightarrow -\infty$.

Упомянутые масштабы таковы (см. (7)):

$$\Delta_x = \frac{a_m}{v\mu}, \quad \Delta_y = \frac{a_m}{\mu v}.$$

Когда $v \ll \frac{a_m}{a_k}$ и $\mu \ll \frac{a_m}{a_k}$, имеем:

$$\Delta_x \gg \frac{a_k}{v} \quad \text{и} \quad \Delta_y \gg \frac{a_k}{v}. \quad (11)$$

Эти соотношения означают, что размеры области, прогретой до температуры «носика» T_n , под которой понимается температура на границе «михельсоновского» слоя, намного превосходят толщину этого слоя вблизи «носика» (см. рис. 1). В этом случае в первом приближении можно считать, что скорость горения вблизи «носика» v равна скорости горения топлива, прогретого до температуры «носика» T_n .

$$v = u_k(T_n). \quad (12)$$

Принимая во внимание относительно малые размеры «михельсоновского» слоя и малую роль его в теплообмене, будем считать приближенно, что асимптотическое решение (7) справедливо вплоть до поверхности топлива, а теплообмен ТЭ с продуктами горения начинается с температуры T_n при $\eta=0$.

Оценки показывают, что такое приближение хорошо оправдывает себя, когда температура плавления теплопроводящих элементов T_m выше температуры поверхности конденсированного топлива T_s . В этом случае условия сшивки решений уравнений (1), (2) ($\tau_1 = \tau_2$ и $\frac{d\tau_1}{d\eta} = \frac{d\tau_2}{d\eta}$ при $\eta=0$) приобретают вид:

$$\tau_1|_{\eta=0} = 1, \quad (13)$$

$$\left(\frac{d\tau_1}{d\eta}\right)|_{\eta=0} = v(1 - \tau_0) = -\frac{v\theta}{1 - \theta}, \quad (14)$$

где для удобства дальнейших рассмотрений введена безразмерная температура «носика»:

$$\theta = \frac{T_n - T_0}{T_b - T_0}.$$

Интервал изменения величины безразмерной скорости «носика» ϕ , при котором справедливы соотношения (11)–(14) (для $\frac{a_k}{a_m} \in [10^2, 10^3]$), составляет $[10^{-2}, \infty]$, что можно установить по формулам (9), (10).

Таким образом, получены приближенные соотношения (12)–(14), позволяющие замкнуть систему уравнений для нахождения безразмерной скорости «носика» ϕ в наиболее интересной области изменения ϕ , где действие ТЭ наиболее эффективно.

В другом крайнем случае, когда $v \rightarrow \frac{a_m}{a_k}$, имеем $\Delta_x \rightarrow \frac{a_k}{v}$, $\Delta_y \rightarrow \infty$. Это означает, что размеры области прогретой ТЭ до температуры «носика» и «михельсоновского» слоя одного порядка. Кроме того, при $v \rightarrow \frac{a_m}{a_k}$ $\phi \rightarrow 0$ (см. (9)). Таким образом, в этом случае эффективность ТЭ мала,

поэтому скорость «носика» приблизительно равна фундаментальной скорости горения

$$v = u_k. \quad (12')$$

Перейдем теперь к решению уравнения (1) с целью определения величины $\left(\frac{d\tau_1}{d\eta}\right)_{\eta=0}$, входящей в условие сшивки (14). Точного аналитического решения уравнения (1) не существует, можно лишь найти приближенное решение, удовлетворяющее (1) при $\eta \rightarrow 0$ и $\eta \rightarrow \infty$, что сделано в Приложении. Поэтому уравнение (1) решалось численно на ЭВЦМ с точностью до третьего знака при следующих граничных условиях:

$$\begin{aligned} \eta &= 0, \quad \tau_1 = 1; \\ \eta &= \eta_m, \quad \tau_1 = \tau_m, \quad \left(\frac{d\tau_1}{d\eta}\right)_{\eta_m} = 0. \end{aligned}$$

Результаты решения изображены на рис. 2 и 3 в виде графиков зависимостей τ_m от $\Omega = \left(\frac{d\tau_1}{d\eta}\right)_{\eta=0} \left/\left(\frac{d\tau_1}{d\eta}\right)_{\eta=0}^{\max}\right.$ и τ_m от $\left(\frac{\kappa}{\varphi}\right)^{2/3} \eta_m$ при различных значениях κ/φ . Величина производной $\left(\frac{d\tau_1}{d\eta}\right)_{\eta=0}^{\max} = \gamma$ соответствует решению при $\tau_m = 0$ и находится из уравнения

$$\frac{5\gamma^2(9-5\gamma)}{256} = \left(\frac{\kappa}{\varphi}\right)^2 \quad (\gamma < 0). \quad (15)$$

Представив τ_m в виде $\tau_m = \frac{1-\theta_m}{1-\theta}$ и исключив θ из этого выражения и равенства (14), получим еще одно соотношение, связывающее τ_m и Ω :

$$\tau_m = (1 - \theta_m) \left(1 - \frac{\gamma\Omega}{\gamma}\right). \quad (16)$$

Совместное решение уравнения (1) (см. рис. 2), уравнений (9) и (16) целесообразно представить в виде зависимости безразмерной скорости φ от безразмерной температуры «носика» θ , которая находится следующим образом:

- 1) задаются параметры κ и θ_m ;
- 2) выбирается одно из значений κ/φ , для которых имеются решения уравнения (1) (см. рис. 2 и 3) и определяется соответствующее значение φ ;
- 3) по этому значению φ из соотношения (9) определяется величина γ ;
- 4) из соотношения (15) определяется $\gamma = \left(\frac{d\tau_1}{d\eta}\right)_{\eta=0}^{\max}$;
- 5) строится прямая (16) (рис. 2, а);
- 6) находится пересечение этой прямой и соответствующего (по κ/φ) решения уравнения (1), (рис. 2), а по нему значения τ_m и $\left(\frac{d\tau_1}{d\eta}\right)_{\eta=0}$;
- 7) из уравнения (14) находится величина θ ;
- 8) по найденному зна-

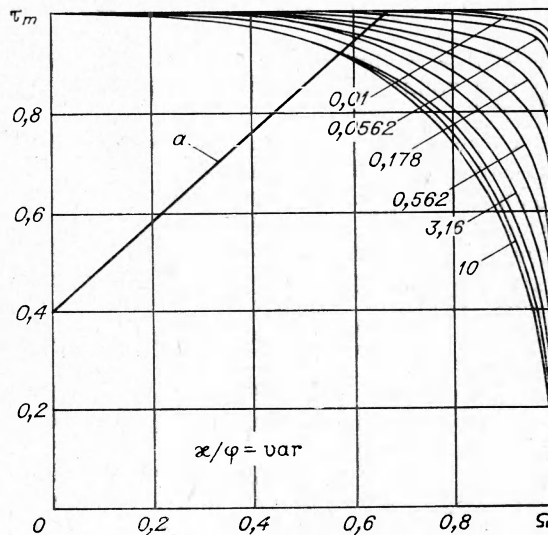


Рис. 2.

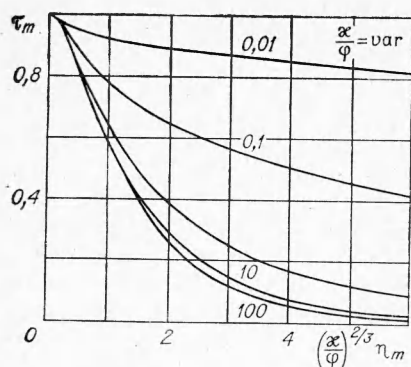


Рис. 3.

чению τ_m отыскивается величина $\eta_m \kappa / \varphi$ (см. рис. 3).

Графики зависимости $\lg \varphi$ от θ , построенные таким способом для различных значений θ_m и $\kappa = 0.5$, представлены на рис. 4.

Отметим основные особенности функции $\varphi(\theta)$. При $\theta \rightarrow \infty$ $\varphi \rightarrow \infty$, при $\theta \rightarrow \theta_m$ $\varphi \rightarrow 0$. Эти соотношения имеют ясный физический смысл: чем ниже температура, до которой следует нагревать конденсированную фазу, тем выше скорость тепловой волны и, следовательно, φ . Отметим еще одно обстоятельство, касающееся физического

смысла характерной скорости $u_* = \frac{a_m \lambda_{\kappa}}{\delta \lambda_m} \left(\frac{a_m}{a_{\kappa}} \right)^{1/2}$. Когда $\varphi \gg 1$ ($v \gg u_*$)

количество тепла, поступающего от ТЭ в конденсированную фазу, расходуется в основном на нагревание ТЭ и лишь незначительная часть тепла поступает в топливо. Когда $\varphi \ll 1$ ($v \ll u_*$) практически все тепло идет на нагревание топлива. При $\varphi \sim 1$ ($v \sim u_*$) тепло между ТЭ и топливом распределяется приблизительно поровну.

Уменьшение параметра θ_m приводит к уменьшению φ , что заметно только при малых φ . При $\varphi \rightarrow \infty$ величина φ практически не зависит от θ_m и кривые $\varphi(\theta)$ сливаются (см. рис. 4). Увеличение параметра κ приводит к увеличению φ . Изменение параметра a_m/a_{κ} в пределе 100—1000, который практически одинаков для всех топлив и металлов, не влияет заметным образом на φ вплоть до $\varphi \sim 10^{-2}$ (см. (9)).

Таким образом, получена и проанализирована зависимость безразмерной скорости φ от температуры «носика» θ . Для нахождения величин φ и θ необходимо еще одно соотношение, связывающее эти величины. В случае $v \ll \frac{a_m}{a_{\kappa}}$ и $\mu \ll \frac{a_m}{a_{\kappa}}$, это соотношение (12), которое, если учесть,

что $u_{\kappa}(T_n) = u_{\kappa} \exp \int_{T_0}^{T_n} \beta dT$, можно записать в следующем виде:

$$\varphi = \frac{u_{\kappa}}{u_*} \exp \theta (T_b - T_0) \int_{T_0}^{T_n} \frac{\beta dT}{T_n - T_0} = \frac{u_{\kappa}}{u_*} \exp \theta (T_b - T_0) \langle \beta \rangle, \quad (17)$$

где $\langle \beta \rangle$ — среднее значение температурного коэффициента скорости горения топлива в интервале температур $[T_0, T_n]$.

Определение величины безразмерной скорости «носика» φ легко провести графически путем нахождения точки пересечения кривой $\lg \varphi(\theta)$, полученной из решения уравнений (1)—(3) (см. рис. 4), и кривой $\lg \varphi(\theta)$, построенной по уравнению (17) (см. рис. 4, б). Например, для кривой $\lg \varphi(\theta)$ при $\theta_m = 1$ и кривой б это точка В.

Проанализируем зависимость величины скорости «носика» v от различных параметров. Как видно из рис. 4 и соотношения (17), чем больше значение безразмерной фундаментальной скорости u_{κ}/u_* , тем больше величина φ и, следовательно, v . Чем больше произведение

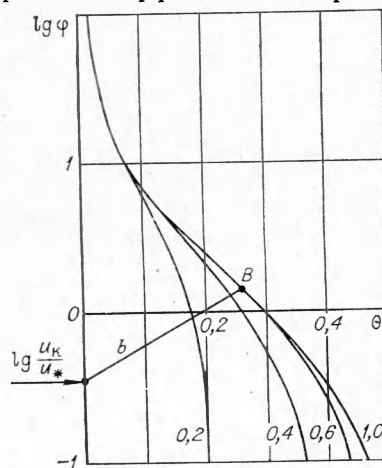


Рис. 4.

$(T_b - T_0) < \beta$, тем круче наклон кривой (17), тем больше значения φ и v . Уменьшение параметров κ и θ_m приводит к смещению графика функции $\lg \varphi(\theta)$ вниз (см. рис. 4) и, следовательно, к уменьшению значений φ и v .

Представляет интерес проанализировать зависимость отношения $Z = v/u_\kappa$ от величины u_κ/u_* . Когда $\frac{u_\kappa}{u_*} \rightarrow 0$, то $\varphi \rightarrow 0$, и, как указывалось выше (см. (12')), $v \rightarrow u_\kappa$, поэтому $Z \rightarrow 1$. Такая ситуация может возникнуть, например, при увеличении характерной скорости u_* путем уменьшения толщины ТЭ при постоянном значении фундаментальной скорости горения u_κ ($\frac{u_\kappa}{u_*} \sim \delta$). Когда $\frac{u_\kappa}{u_*} \rightarrow \infty$, то $\varphi \rightarrow \infty$, и решение (точка В, рис. 4) приближается к оси ординат ($\theta \rightarrow 0$), поэтому из соотношения (17) следует: $v \rightarrow u_\kappa$ и $Z \rightarrow 1$.

Таким образом, как при $\frac{u_\kappa}{u_*} \rightarrow 0$, так и при $\frac{u_\kappa}{u_*} \rightarrow \infty$ $Z \rightarrow 1$, поэтому зависимость Z от u_κ/u_* должна иметь максимум.

Интересно отметить, что значение безразмерной скорости «носика» φ , соответствующая максимуму Z , должно быть $\varphi_{\max} \sim 1$. Следовательно, значение максимальной скорости «носика» $v_{\max} \sim u_*$.

Рассмотрим теперь зависимость длины выступающей части ТЭ, которую будем характеризовать величиной $\eta_m \kappa / \varphi$, от величины φ / κ , пропорциональной безразмерной скорости «носика». Зависимость $\eta_m \kappa / \varphi$ от φ / κ , представленная на рис. 5, имеет немонотонный характер. Это связано со следующими обстоятельствами. С одной стороны, увеличение φ / κ приводит к уменьшению θ , и при заданном значении θ_m величина $\eta_m \kappa / \varphi$ должна расти и с ростом φ / κ ; но, с другой — увеличение φ / κ приводит к росту скорости продуктов горения и, следовательно, к интенсификации теплообмена, что приводит к более быстрому прогреванию ТЭ до температуры плавления и уменьшению $\eta_m \kappa / \varphi$.

С противоборством этих факторов и связан минимум зависимости $\eta_m \kappa / \varphi$ от φ / κ . При $\frac{\varphi}{\kappa} \rightarrow \infty$ $\frac{\eta_m \kappa}{\varphi} \rightarrow \infty$. Увеличение температуры плавления θ_m приводит к росту $\eta_m \kappa / \varphi$.

Представляет интерес вычислить температурный коэффициент скорости «носика», т. е. величину $\beta_n = d \ln v / dT_0$. Продифференцировав выражение (17) по T_0 , получим:

$$\beta_n = \frac{d \ln v}{dT_0} = \frac{d \ln u_\kappa}{dT_0} + \beta(T_n) \frac{dT_n}{dT_0} - \beta(T_0) = \beta(T_n) \frac{dT_n}{dT_0}, \quad (18)$$

где $\beta(T_n)$ — значение температурного коэффициента скорости горения ТК при температуре «носика» T_n .

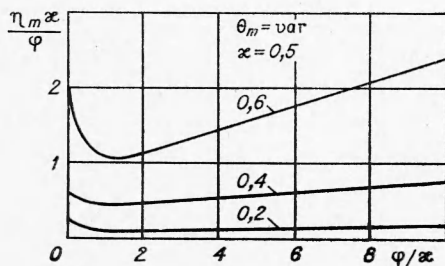


Рис. 5.

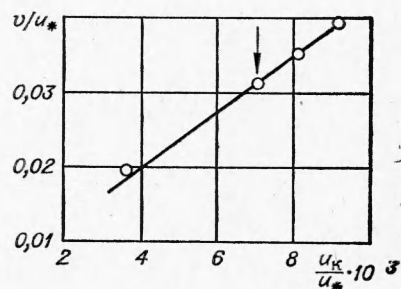


Рис. 6.

Выражая значение dT_n/dT_0 через θ , получим из (18):

$$\beta_n = \frac{\beta(T_n)}{1 - \frac{(T_b - T_0) \beta(T_n)}{d \ln \varphi / d \theta}}.$$

Так как $\frac{d \ln \varphi}{d \theta} < 0$, то всегда $\beta_n < \beta(T_n)$. При $\varphi \rightarrow 0$ и $\varphi \rightarrow \infty$ $\frac{d \ln \varphi}{d \theta} \rightarrow -\infty$, поэтому $\beta_n \rightarrow \beta(T_0)$. Имеющиеся экспериментальные данные по горению КТ с ТЭ подтверждают основные выводы настоящей теории, хотя количество этих данных явно недостаточно, чтобы проверить все выводы.

На рис. 6 представлены экспериментальные данные по работе [3] и теоретические расчеты зависимости безразмерной скорости «носика» v/u_* от безразмерной фундаментальной скорости КТ u_n/u_* для ТЭ из пластины серебра. Величина температурного коэффициента $\langle \beta \rangle$ определялась по одному эксперименту, который на рис. 6 отмечен стрелкой. Оказалось, что $\langle \beta \rangle = 20,5 \cdot 10^{-3}$ град $^{-1}$.

Теплофизические свойства Ag брались из справочника [4], а для топлива принималось, что $\lambda_n = 10^{-3}$ кал/(см·с·град), $a_n = 2 \cdot 10^{-3}$ см 2 /с, $\kappa = 0,5$, $T_b = 1890^\circ$ К. Как видно из рис. 6, совпадение экспериментальных и расчетных данных вполне удовлетворительное.

Приложение

Приближенное решение уравнения (1)

Методом неопределенных коэффициентов можно подобрать функцию, удовлетворяющую уравнению (1) при $\eta \rightarrow 0$ и $\eta \rightarrow \infty$ и аппроксимирующую решения (1) с достаточной для практики точностью ($\sim 1\%$). Одна из таких функций, которая удовлетворяет уравнению (1) при $\eta \rightarrow 0$ с точностью до пятого члена разложения по $\eta^{1/2}$ и имеет нужное асимптотическое поведение при $\eta \rightarrow \infty$, такова:

$$\tau_1 = e^F + \left[\left(\frac{d\tau_1}{d\eta} \right)_{\eta=0} - \gamma \right] e^{-\eta+F} \int_0^\eta e^{\eta-2F} d\eta \quad (19)$$

где

$$F = \frac{\gamma\eta - \frac{4\kappa}{5\varphi} \eta^{3/2}}{1 - \frac{32\kappa}{15\varphi\gamma} \eta^{1/2} + \frac{2}{5} \eta}.$$

Для определения коэффициента γ служит уравнение (15). Из соотношения (19) можно получить уравнения, связывающие τ_m , $\left(\frac{d\tau_1}{d\eta} \right)_{\eta=0}$; и η_m в точке $\eta = \eta_m$, где $\left(\frac{d\tau}{d\eta} \right)_m = 0$. Если вычислить приближенно интеграл в правой части (19), разложив показатель экспоненты в ряд в окрестности $\eta = \eta_m$:

$$\tau_m = \frac{e^{F_m}}{1 + \frac{\left(\frac{dF}{d\eta} \right)_m (1 - e^{-\eta_m + 2F_m})}{1 - 2 \left(\frac{dF}{d\eta} \right)_m}},$$

$$\left(\frac{d\tau_1}{d\eta} \right)_{\eta=0} = \gamma - \frac{\left(\frac{dF}{d\eta} \right)_m e^{-\eta_m + 2F_m}}{1 + \frac{\left(\frac{dF}{d\eta} \right)_m (1 - e^{-\eta_m + 2F_m})}{1 - 2 \left(\frac{dF}{d\eta} \right)_m}},$$

где $F_m = F(\eta_m)$.

Поступила в редакцию
13/II 1974

ЛИТЕРАТУРА

1. G. Golub. J. Spacecraft, 1965, 2, 4, 593.
2. L. H. Caveny. R. L. Glick. J. Spacecraft, 1967, 4, 1, 79.
3. K. Jamazaki, H. Tokui. Bull. Chem. Soc. Japan. 1967, 40, 4, 1249.
4. С. С. Кутателадзе, В. М. Боришанский. Справочник по теплопередаче. М.—Л., ГЭИ, 1959.

УДК 662.612

ТЕОРИЯ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ФРОНТА ПОЛИМЕРИЗАЦИИ

Б. Б. Ханукаев, М. А. Кожушнер, Н. С. Ениколопян

(Москва)

Явление распространения фронта полимеризации в метилметакрилате (ММА) было экспериментально обнаружено в работе [1]. В работе [2] были получены выражения для скорости распространения и ширины фронта в реакции фронтальной полимеризации при условии, что скорость иницирования можно считать постоянной (т. е. за время реакции инициатор не успеет существенно израсходоваться). Как отмечалось в этой работе, это предположение правомерно, если одновременно выполняются неравенства

$$\sqrt{\frac{I_0 k_t}{k_i}} \gg \frac{k_t}{k_{tr}} \gg 1, \quad (1)$$

где I_0 — начальная концентрация инициатора; k_i , k_p , k_t — соответственно константы скорости иницирования, роста и гибели цепи.

Однако больший интерес представляет случай, когда начальная концентрация инициатора мала и нарушается левое из неравенств (1). При этом максимальная степень превращения будет ограничиваться недостатком свободных радикалов, и реакция может не дойти до той стадии, когда у ряда веществ (например, у олигомеров [3]) наступают диффузионные и стерические затруднения, описываемые ростом эффективной энергии активации с глубиной превращения.

В предлагаемой работе одномерная задача о адиабатическом распространении фронта полимеризации в конденсированной фазе рассматривается с учетом расходования инициатора, когда максимальная глубина превращения $\eta > 1$.

Запишем кинетические уравнения процесса иницирования полимеризации в системе координат, связанной с фронтом реакции, причем в уравнении для η учтем автоускорение из-за гель-эффекта [3]:

$$\frac{dI}{dx} = -\frac{k_{i0}}{u} \exp\left(-\frac{E_i}{RT}\right) I, \quad (2a)$$

$$\frac{dR\cdot}{dx} = \frac{k_{i0}}{u} \exp\left(-\frac{E_i}{RT}\right) I - \frac{k_t}{u} R\cdot^2, \quad (2б)$$

$$\frac{d\eta}{dx} = \frac{k_{p0}}{u} \exp\left(-\frac{E_p}{RT}\right) R\cdot (1 - \eta) (1 + \alpha\eta), \quad (2в)$$

где I — концентрация инициатора; k_{i0} — константа скорости иницирования; E_i — энергия активации иницирования; T — температура; $R\cdot$ — концентрация свободных радикалов; k_{p0} — константа скорости