УДК 538.324

КОНЕЧНОЕ ДЕФОРМИРОВАНИЕ ИДЕАЛЬНО ЖЕСТКОПЛАСТИЧЕСКОЙ МЕМБРАНЫ

А. А. Маркин, С. А. Фурсаев

Тульский государственный университет, 300600 Тула
E-mails: markin@tsu.tula.ru, fursaev@mail.ru

Рассматривается конечное деформирование цилиндрической в начальном состоянии мембраны под действием равномерно распределенного по внутренней поверхности давления. Задача решается в рамках модели деформирования несжимаемого жесткопластического материала при условии полной пластичности. Получены точные аналитические зависимости давления и кинематических характеристик от угла поворота нормали на контуре оболочки. Установлены зависимости удлинений и перемещений от радиальной координаты. Определен момент достижения внешним давлением максимального значения. Показано, что изменение толщины мембраны вдоль радиальной координаты является постоянным.

Ключевые слова: мембрана, полная пластичность, конечные деформации.

В 1938 г. А. А. Ильюшиным была рассмотрена задача о конечных деформациях круглой мембраны под действием равномерного давления [1]. Использовался нелинейный закон связи напряжений и деформаций вида $\varepsilon_i = \sigma_i^n/E^n$ (ε_i — компонента тензора деформаций; σ_i — компонента тензора напряжений; E, n — константы материала), а решение было получено в виде рядов. В работе [2] предложено решение данной задачи для материалов с линейным деформационным упрочнением, при этом форма срединной поверхности мембраны в процессе деформации полагалась сферической. В [3] проведено сравнение результатов экспериментов по нагружению диафрагм давлением жидкости с эмпирическими зависимостями напряжений от логарифмических деформаций. Установлено, что для пластин из отожженных металлов давление достигает максимального значения, а при последующем уменьшении давления вблизи полюса пластины происходит ее разрушение. Однако остается нерешенным вопрос о поведении мембран, изготовленных из материалов с развитой площадкой текучести, когда упрочнение практически отсутствует. В данной работе получено аналитическое решение задачи о деформировании мембраны при условии полной пластичности [4].

1. Постановка задачи. Рассмотрим мембрану с закрепленной боковой поверхностью, которая до начала деформации имеет вид цилиндрической пластины.

Движение мембраны рассматривается в цилиндрической системе координат. При этом принимаются следующие обозначения: r, ρ — радиальные координаты материальной точки в начальном и текущем состояниях соответственно; ξ — координата вдоль нормали к срединной поверхности пластины в начальном состоянии.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 10-01-97500) и в рамках Федеральной целевой программы “Научные и научно-педагогические кадры инновационной России” (контракт № П1125).

Так как начальная толщина оболочки значительно меньше ее радиуса, используем обобщенную гипотезу Кирхгофа — Лява

$$\boldsymbol{R}(r,\xi,t) = \boldsymbol{R}_s(r,t) + \xi\lambda_3\boldsymbol{n} = \rho(r,t)\boldsymbol{e}_r + z(r,t)\boldsymbol{e}_z + \xi\lambda_3\boldsymbol{n}, \tag{1}$$

где $\boldsymbol{R}_s(r,t) = \rho(r,t)\boldsymbol{e}_r + z(r,t)\boldsymbol{e}_z$ — радиус-вектор точек срединной поверхности; $\lambda_3(r)$ — утонение оболочки в направлении нормали.

С использованием закона движения (1) получим кинематические соотношения

$$\lambda_2 = \frac{u_r}{r} + 1; \tag{2}$$

$$\lambda_1 = -\frac{\partial u_z}{\partial r}\,\frac{1}{\sin\gamma}; \tag{3}$$

$$\frac{\partial}{\partial r}\,(\lambda_2 r) = \lambda_1\cos\gamma, \tag{4}$$

где $\lambda_1 = |d\boldsymbol{R}_s/dr|$ — относительное удлинение срединной поверхности в меридиональном направлении; $\lambda_2 = \rho/r$ — относительное удлинение срединной поверхности в окружном направлении; u_r — перемещение срединной плоскости в начальном состоянии в направлении радиальной координаты; u_z — перемещение срединной плоскости в начальном состоянии вдоль оси Oz; γ — угол поворота нормали к срединной поверхности.

Рассматриваемое тело деформируется под действием нагрузки постоянной интенсивности $\boldsymbol{p}$, распределенной по внутренней поверхности и направленной по нормали к внутренней поверхности мембраны (рис. 1). Распределение напряжений и деформаций по толщине оболочки считается однородным, т. е. задача рассматривается в мембранном приближении.

С помощью вариационного принципа Журдена запишем условие равновесия мембраны. С учетом условия несжимаемости получаем

$$\int\limits_S \boldsymbol{p}\cdot\delta\boldsymbol{V}\,dS = \int\limits_V (\tilde{\sigma}\cdot\cdot\,\delta\tilde{W})\,dV,$$

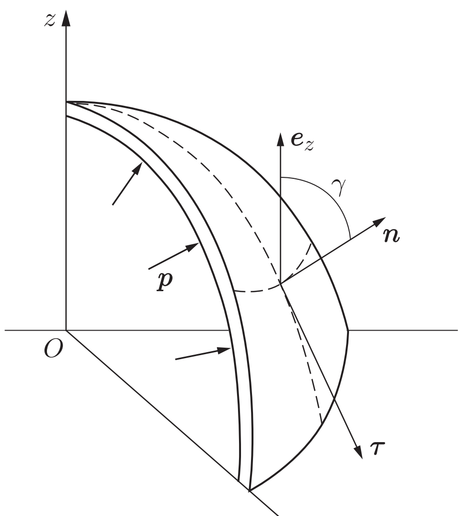

Рис. 1. Сегмент срединной поверхности оболочки, находящейся под действием внутреннего давления p

где V — объем пространства, занимаемый оболочкой в произвольный момент времени; S — площадь поверхности, на которую действуют усилия $\boldsymbol{p}$; $\tilde{\sigma}$ — девиатор тензора напряжений; $\delta\boldsymbol{V}$ — вариация поля скоростей; $\tilde{W}$ — девиатор тензора скорости деформации. С использованием закона движения (1) и принципа Журдена систему уравнений равновесия оболочки представим в дифференциальном виде

$$\frac{\sigma_{11}h_0}{\lambda_1}\sin\gamma = \frac{p}{2}\,\lambda_2^2 r, \qquad \frac{\partial\gamma}{\partial r}\,\frac{\sigma_{11}h_0}{\lambda_1}\,r - p\lambda_2\lambda_1 r + \frac{\sigma_{22}h_0}{\lambda_2}\sin\gamma = 0, \qquad \sigma_{33} = 0, \tag{5}$$

где γ — угол поворота подвижного базиса; p — давление; σ_{11}, σ_{22}, σ_{33} — компоненты тензора напряжений; $h_0(r) = h(r)/\lambda_3(r)$ — начальная толщина оболочки; $h(r)$ — текущая толщина оболочки.

2. Построение аналитического решения. Рассмотрим деформирование оболочки при условии полной пластичности: $\sigma_{11} = \sigma_{22} = \sigma^0 = \mathrm{const}$ [4]. В этом случае система (5) принимает вид

$$\frac{\sigma^0 h_0}{\lambda_1}\sin\gamma = \frac{p}{2}\,\lambda_2^2 r, \qquad \frac{\partial\gamma}{\partial r}\,\frac{\sigma^0 h_0}{\lambda_1}\,r - p\lambda_2\lambda_1 r + \frac{\sigma^0 h_0}{\lambda_2}\sin\gamma = 0. \tag{6}$$

Систему (6) необходимо дополнить кинематическими соотношениями (2)–(4) и граничными условиями

$$u_z\big|_{r=R} = 0, \qquad u_r\big|_{r=R} = 0.$$

Запишем систему (6) в безразмерном виде (величины с размерностью длины отнесены к начальному радиусу оболочки R, величины с размерностью напряжения — к пределу текучести σ^0):

$$\frac{\sin\gamma}{\lambda_1} = \frac{p^b}{2h_0^b}\,\lambda_2^2 r^b, \qquad \frac{\partial\gamma}{\partial r^b}\,\frac{r^b h_0^b}{\lambda_1} - p^b\lambda_2\lambda_1 r^b + \frac{h_0^b\sin\gamma}{\lambda_2} = 0. \tag{7}$$

Далее индексы b у безразмерных величин опускаются. В результате несложных преобразований из системы (7) и уравнения (4) получаем

$$\lambda_1 = \frac{2h_0\sin\gamma}{p\lambda_2^2 r}, \qquad \frac{\partial\gamma}{\partial r} = \frac{p}{2h_0}\,(\lambda_1)^2\lambda_2, \qquad \frac{\partial\lambda_2}{\partial r}\,r + \lambda_2 = \lambda_1\cos\gamma. \tag{8}$$

Добавим к этим уравнениям граничные условия

$$\gamma\big|_{r=0} = 0, \qquad \lambda_2\big|_{r=R} = 1. \tag{9}$$

Система (8) представляет собой систему нелинейных уравнений, относительно неизвестных удлинений λ_1, λ_2 и угла поворота γ.

Угол поворота нормали в полюсе оболочки ($r = 0$) равен нулю, так как вектор внешней нормали параллелен вертикальной оси Oz; удлинение λ_2 в окружном направлении на границе ($r = R$) отсутствует в силу условия закрепления.

Исключим из системы (8) меридиональную деформацию λ_1. Вводя новую переменную $f = \lambda_2 r$, получаем

$$\frac{p}{h_0}\,\frac{\partial\gamma}{\partial r} = 2r(\sin\gamma)^2\,\frac{1}{f^3}, \qquad \frac{p}{h_0}\,\frac{\partial f}{\partial r} = r\sin(2\gamma)\,\frac{1}{f^2}. \tag{10}$$

Следствием системы (10) является зависимость между производными γ и f вида

$$\operatorname{ctg}\gamma\,\frac{\partial\gamma}{\partial r} = \frac{1}{f}\,\frac{\partial f}{\partial r}, \tag{11}$$

из которой в свою очередь следует зависимость между неизвестными, определяемая с точностью до параметра C_1 в виде

$$\sin\gamma = C_1 f. \tag{12}$$

Подставляя (12) в первое уравнение системы (10), получаем дифференциальное уравнение относительно угла поворота

$$\frac{p}{h_0}\frac{\partial\gamma}{\partial r} = \frac{2rC_1^3}{\sin\gamma}.$$

Общее решение данного уравнения имеет вид

$$\frac{p}{h_0}\cos\gamma = -C_1^3 r^2 + C_2. \tag{13}$$

Параметры C_1, C_2 находим из краевых условий для угла поворота

$$\gamma\big|_{r=0} = 0, \qquad \gamma\big|_{r=R=1} = \gamma_k. \tag{14}$$

С учетом (14), (13) получаем

$$C_1^3 = \frac{p}{h_0}(1-\cos\gamma_k), \qquad C_2 = \frac{p}{h_0}. \tag{15}$$

С использованием выражений (13), (15) закон изменения угла поворота записывается в виде

$$\cos\gamma = 1 - (1-\cos\gamma_k)r^2. \tag{16}$$

С учетом (15), (12) функция f определяется по формуле

$$f = \frac{\sin\gamma}{\sqrt[3]{(p/h_0)(1-\cos\gamma_k)}}. \tag{17}$$

Подставляя в (17) выражение

$$f\big|_{r=R=1} = 1,$$

следующее из граничного условия (9), устанавливаем зависимость между давлением и углом поворота нормали γ_k на контуре мембраны:

$$p = \frac{h_0\sin^3\gamma_k}{1-\cos\gamma_k}. \tag{18}$$

3. Распределение кинематических характеристик вдоль радиуса мембраны. Из формулы (17) и зависимости (18) найдем закон изменения окружного удлинения

$$\lambda_2 = \frac{\sin\gamma}{r\sin\gamma_k}, \tag{19}$$

а из выражений (8), (18), (19) — закон изменения меридионального удлинения

$$\lambda_1 = \frac{2(1-\cos\gamma_k)}{\sin\gamma_k}\,\frac{r}{\sin\gamma}. \tag{20}$$

Используя законы (19), (20), из уравнений (2), (3) получаем компоненты вектора перемещений точек срединной плоскости

$$U_z = \frac{1-\cos\gamma_k}{\sin\gamma_k}(1-r^2), \qquad U_r = \frac{\sin\gamma}{\sin\gamma_k} - r. \tag{21}$$

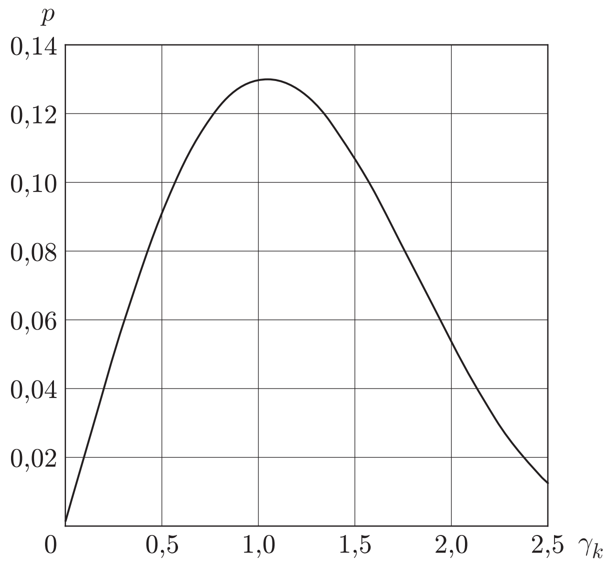

Рис. 2. Зависимость приложенного давления от параметра γ_k

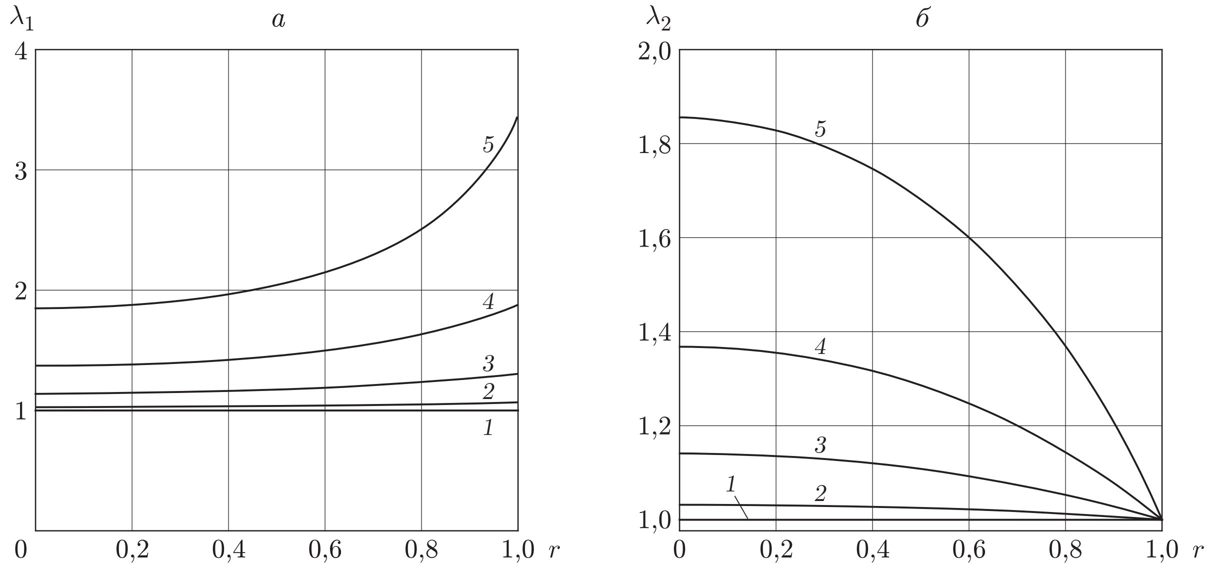

Рис. 3. Распределение меридиональной (*а*) и радиальной (*б*) деформации по радиусу:
1 — $\gamma_k(t) = 0{,}1$; *2* — $\gamma_k(t) = 0{,}5$; *3* — $\gamma_k(t) = 1{,}0$; *4* — $\gamma_k(t) = 1{,}5$; *5* — $\gamma_k(t) = 2{,}0$

Из условия несжимаемости $\lambda_1\lambda_2\lambda_3 = 1$ определяем утонение оболочки

$$\lambda_3 = \frac{\sin^2\gamma_k}{2(1-\cos\gamma_k)}. \qquad (22)$$

Из формулы (22) следует, что при полной пластичности утонение оболочки вдоль радиуса является постоянным.

На рис. 2 приведен график зависимости давления p от параметра γ_k, полученной из закона (18). Из рис. 2 следует, что существует момент, когда процесс деформирования становится неустойчивым. При дальнейшем деформировании давление на оболочку начинает уменьшаться.

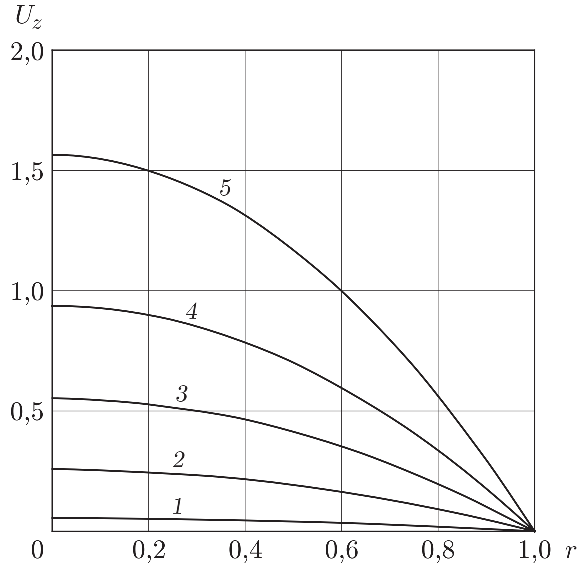

Рис. 4. Распределение по радиусу перемещения вдоль оси Oz (обозначения те же, что на рис. 3)

На рис. 3,*а,б* соответственно представлены распределения меридиональной и радиальной деформации по радиусу для различных моментов “времени” (различных значений монотонно возрастающего параметра γ_k). На рис. 4 показано распределение по радиусу перемещения в направлении оси Oz.

Таким образом, в результате построения решения задачи о деформировании мембраны при условии полной пластичности получены точные аналитические зависимости удлинений и перемещений срединной поверхности мембраны от радиальной координаты и монотонно возрастающего параметра γ_k. Найден закон изменения внешнего давления в зависимости от γ_k, определен момент достижения давлением максимального значения. После достижения этого значения давление уменьшается, т. е. процесс становится неустойчивым.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Ильюшин А. А.** Труды. Т. 1. 1935–1945 / Сост. Е. А. Ильюшина, М. Р. Короткина. М.: Физматлит, 2003.
2. **Hill E. A.** A theory of the plastic bulging of a metal diaphragm by lateral pressure // Philos. Mag. 1950. Ser. 7. P. 41.
3. **Джонсон Ч.** Теория пластичности для инженеров / Ч. Джонсон, П. Б. Меллор. М.: Машиностроение, 1979.
4. **Хаар А., Карман Т.** К теории напряженных состояний в пластических и сыпучих средах // Теория пластичности: Сб. ст. М.: Изд-во иностр. лит., 1948. С. 41–56.

Поступила в редакцию 3/III 2010 г.