УДК 532.54

В. А. Хребтов

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ ГИДРАВЛИЧЕСКОГО УДАРА В УПРУГОДЕФОРМИРУЕМЫХ ТРУБАХ

Проблема гидроудара в различных технических устройствах продолжает привлекать внимание исследователей. Так, в работе [1] модель гидроудара Н. Е. Жуковского обобщается с учетом нелинейности и трения в квазистационарной постановке, гидроудар вызывается изменением режима течения жидкости на одном из концов трубопровода и рассчитывается методом последовательных приближений. В [2] рассмотрено движение сжимаемой ньютоновской вязкой жидкости в упругой оболочке с учетом ее инерционных свойств. При давлениях гидроудара, меньших 100 МПа, уравнение состояния для воды в форме Тэта может быть линеаризовано [3]. В [4] в рамках модели Н. Е. Жуковского рассматривается гидроудар в системах охлаждения, обусловленный действием на систему подвижной распределенной нагрузки и массовых сил инерции. Методом выделения разрыва подвижной распределенной нагрузки (т. е. рассмотрением условий сохранения массы и импульса на разрыве) в [4] построено аналитическое решение в линейном приближении. В данной работе показано, что такой подход применим лишь при дозвуковых режимах движения подвижной нагрузки. В [5] подчеркивается, что модель гидроудара Н. Е. Жуковского позволила решить ряд таких сложных технических задач, как распространение волн в трубах переменного сечения, в коаксиальных трубах, однако эта теория не может объяснить дисперсию волн, волнообразное изменение давления в окрестности фронта и т. д. К недостаткам модели Н. Е. Жуковского следует отнести и ее незамкнутость, проявляющуюся, например, при переходе через резонанс. В [6] рассмотрены асимптотические решения для резонансных режимов, возникающих в различных технических задачах. В настоящей работе в рамках модели гидроудара Н. Е. Жуковского методом характеристик найдено новое аналитическое решение задачи Коши для уравнений гидравлического удара, вызванного бегущей вдоль оси упругодеформируемой трубы распределенной нагрузкой. Решение в стационарном случае и для линейного резонанса получено точно. Переход через резонанс описан в рамках асимптотического подхода. Проведено сравнительное изучение стационарных и нестационарных решений, а также методов выделения и размазывания разрыва подвижной распределенной нагрузки.

Рассмотрим длинную круглую цилиндрическую трубу, внутри которой течет малосжимаемая идеальная капельная баротропная жидкость (например, вода). Заметим, что изучаемая ниже математическая модель описывает и случай двух коаксиальных труб, когда жидкость циркулирует в образовавшемся зазоре, а подвижная нагрузка бежит по внутренней поверхности внутренней трубы [4] или по наружной поверхности наружной трубы.

Поведение жидкости в подобных технических устройствах описывается в гидравлическом приближении следующей системой уравнений [4]:

$$\frac{\partial \rho F}{\partial t} + \frac{\partial \rho u F}{\partial x} = 0; \tag{1}$$

$$\frac{\partial \rho u F}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\left[\rho u^2 F + pF\right] = p\,\frac{\partial F}{\partial x}, \quad (p+B)/\rho^m = \mathrm{const}, \tag{2}$$
$$F = F_0 - A_1 P + A_2 p.$$

Здесь ρ, p и u — средние плотность, давление и скорость жидкости в фиксированном сечении канала с неподвижной координатой x; F — площадь канала; P — подвижная распределенная нагрузка; t — время; B и m — константы в условии баротропности жидкости; F_0, A_1, A_2 — константы в уравнении для площади канала (формулы для расчета этих констант для системы коаксиальных труб приведены в [4]).

Переходя от неподвижной системы координат x к подвижной X, движущейся со скоростью $V(t)$, с помощью соотношений

$$x = X + \xi(t), \quad \xi(t) = \int_0^t V(t)\,dt, \quad u = \omega + V(t) \tag{3}$$

и проводя линеаризацию, уравнения в частных производных гиперболического типа (1), (2) можно представить в характеристической форме

$$(4)\qquad \left[\frac{\partial}{\partial t}+(-V\pm c_0)\frac{\partial}{\partial X}\right]\left(\omega+V\pm\frac{p}{\rho_0 c_0}\mp c_0\frac{A_1}{F_0}P\right)=-f(X,t),$$

$$f(X,t)=c_0^2\frac{A_1}{F_0}\frac{\partial P(X,t)}{\partial X},$$

где ω — средняя скорость жидкости в подвижной системе координат X; ρ_0 — линеаризованное значение плотности жидкости; c_0 — линеаризованное значение скорости звука в жидкости в канале с упругими стенками (или скорости гидроудара по Н. Е. Жуковскому).

Общее решение задачи Коши для системы (4) при известных начальных значениях $p(X, 0)$ и $\omega(X, 0)$ имеет вид

$$(5)\qquad \omega(X,t)=-V(t)+V(0)+\frac{1}{2}\Bigg\{\omega(\tau,0)+\omega(\eta,0)+\frac{p(\tau,0)+p(\eta,0)}{\rho_0 c_0}+$$
$$+c_0\frac{A_1}{F_0}[P(\eta,0)-P(\tau,0)]-\int_0^t[f(-\xi(z)-c_0z+\eta,z)+$$
$$+f(-\xi(z)+c_0z+\tau,z)]\,dz\Bigg\};$$

$$(6)\qquad p(X,t)=\frac{\rho_0c_0}{2}\Bigg\{\omega(\tau,0)-\omega(\eta,0)+\frac{p(\tau,0)+p(\eta,0)}{\rho_0c_0}+$$
$$+c_0\frac{A_1}{F_0}[2P(X,t)-P(\tau,0)-P(\eta,0)]+$$
$$+\int_0^t[f(-\xi(z)-c_0z+\eta,z)-f(-\xi(z)+c_0z+\tau,z)]\,dz\Bigg\},$$
$$\tau=X+\xi(t)-c_0t,\quad \eta=X+\xi(t)+c_0t.$$

Решение (5), (6) описывает как свободные, так и вынужденные колебания жидкости в канале с упругими стенками. Вынужденные колебания возникают под действием подвижной нагрузки P на канал с жидкостью. Свободные колебания, обусловленные начальными условиями, в данной работе не исследуются. Будем полагать также, что нагрузку P можно представить как $P(X, t) = P_0(t)\varphi(X)$.

Рассмотрим ряд режимов движения нагрузки P, позволяющих выявить отличия стационарных решений от нестационарных. Для первых двух режимов (стационарный режим и линейный резонанс) квадратуры решения (5), (6) могут быть вычислены точно, для общего случая движения нагрузки P получить решения в конечном виде можно лишь асимптотически.

1. Стационарный режим получаем при $P_0(t) = \mathrm{const}$, $V(t) = V_0 = \mathrm{const}$ и $V_0 \neq c_0 (\mathrm{M} = V_0/c_0 \neq 1)$ для $t > 0$. Вычислим, например, стационарное решение при

$$(7)\qquad V(t)=V_0\theta(t),\ P(X,t)=R\theta(t)\varphi(X)=\theta(t)P_c(X),$$

где $\theta(t) = 1$ при $t \geqslant 0$; $\theta(t) = 0$ при $t < 0$. В результате точного вычисления интегралов в (5), (6) находим решение для вынужденных колебаний в виде

$$\omega(X,t)=-V_0+\frac{1}{2}c_0\frac{A_1}{F_0}\left[\frac{2\mathrm{M}^2}{\mathrm{M}^2-1}P_c(X)-\frac{P_c(\tau)}{\mathrm{M}-1}-\frac{P_c(\eta)}{\mathrm{M}+1}\right],$$

$$p(X,t)=\frac{\rho_0c_0^2}{2}\frac{A_1}{F_0}\left[\frac{2\mathrm{M}^2}{\mathrm{M}^2-1}P_c(X)-\frac{P_c(\tau)}{\mathrm{M}-1}+\frac{P_c(\eta)}{\mathrm{M}+1}\right],\quad \mathrm{M}=V_0/c_0,$$

откуда следует, что стационарное решение зависит от стационарной нагрузки P_c и скорости ее движения. При $M = 1$ решение становится сингулярным, поэтому с физической точки зрения его надо отбросить и можно утверждать, что при $M = 1$ стационарных решений нет (при $M = 1$ имеет место линейный резонанс, рассмотренный ниже). Зададим функцию $\varphi(X)$ в виде размазанной ступеньки с помощью выражения

$$\varphi(X) = \frac{1}{2}\left[1 - \operatorname{erf}\left(X\sqrt{\frac{n}{2}}\right)\right], \quad \operatorname{erf}(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^z \exp(-y^2)\,dy.$$

При $n \to \infty$ $\varphi(X) \to \theta(-X)$, т. е. $\varphi(X)$ переходит в функцию-ступеньку, а стационарное решение этого пункта — в регулярное обобщенное автомодельное решение, для которого на рис. 1 представлены волновые картины и распределения давления p, отнесенные к $p_c = \rho_0 c_0^2 (A_1/F_0)R$ для дозвукового (a, $M < 1$) и сверхзвукового (b, $M > 1$) режимов движения нагрузки P. Предельный переход $n \to \infty$ означает переход к методу выделения разрыва нагрузки P [4]. Этот переход корректен как с математической точки зрения (приводит к регулярным обобщенным функциям), так и с физической (решения конечны). Заметим, что значение n не влияет при этом на максимум решения. Поэтому метод размазывания разрыва нагрузки P (метод сквозного счета), для которого n конечно, дает при расчете максимумов гидродинамических параметров для обобщенного автомодельного решения тот же результат, что и метод выделения разрыва нагрузки P ($n \to \infty$). При достаточно больших t фронты волн, распространяющиеся по характеристикам I и II семейств, убегают достаточно далеко и в окрестности разрыва P_c (сечение $X = 0$) имеются стационарные решения, рассмотренные в [7].

Задавая условия, аналогичные (7), можно получить и другие стационарные решения.

2. Линейный резонанс имеет место при $P_0(t) = \text{const}$, $V(t) = V_0 = \text{const}$ и $V_0 = c_0$ ($M = 1$) для $t > 0$. Для вычисления решения в этом случае воспользуемся, как и выше, условиями (7), полагая в них $V_0 = c_0$. Вычисляя точно интегралы в (5), (6), для вынужденных колебаний при линейном резонансе находим решение

$$\omega(X, t) = c_0\left\{-1 - \frac{A_1}{2F_0}\left[\frac{\partial P_c}{\partial X} c_0 t + \frac{P_c(\eta) - P_c(X)}{2}\right]\right\},$$

$$p(X, t) = \frac{\rho_0 c_0^2}{2}\frac{A_1}{F_0}\left\{\frac{3}{2}P_c(X) + \frac{1}{2}P_c(\eta) - \frac{\partial P_c}{\partial X} c_0 t\right\},$$

которое в отличие от полученного выше содержит нестационарный член, не равный нулю там, где $\partial P_c/\partial X \neq 0$. В этих точках параметры растут линейно по времени и при $t \to \infty$ $p \to \infty$, $\omega \to \infty$ (как видно из численных расчетов для нелинейной модели, гидродинамические параметры оказываются ограниченными при нелинейном резонансе). Вычисляя производную $\frac{\partial P_c}{\partial X} = -R\sqrt{\frac{n}{2\pi}} \times \exp\left(-\frac{n}{2}X^2\right)$, видим, что нестационарная часть найденного решения пропорциональна корню квадратному из номера δ-образной последовательности n, т. е. зависит от того, как размазана нагрузка P. Поскольку

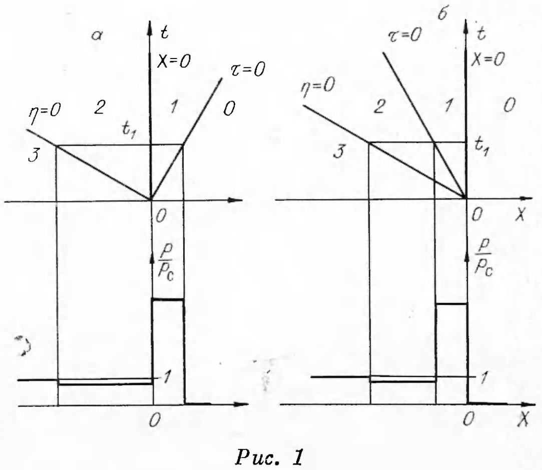

Рис. 1

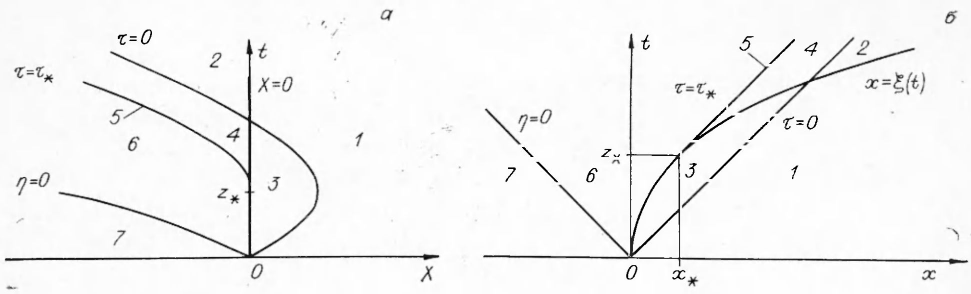

Рис. 2

одномерная модель не дает никакой информации о размазывании, она является незамкнутой по существу и для своего замыкания требует данных эксперимента или пространственного расчета. Ясно, что для физически реальных движений n конечно. Поэтому любой метод сквозного счета есть метод размазывания разрыва нагрузки P (для метода выделения $n = \infty$). С математической точки зрения предельный переход $n \to \infty$ корректен, ибо приводит к сингулярным обобщенным решениям, с физической же точки зрения некорректен, ибо приводит к бесконечным давлениям гидроудара, что противоречит физическому смыслу и эксперименту. Значит, рассчитать явление линейного резонанса методом выделения разрыва нагрузки P нельзя. Для расчета же линейного резонанса методом размазывания разрыва нагрузки P необходимо знать n. Взяв в качестве исходных соотношения, отличные от (7), можно получить и другие решения для линейного резонанса.

3. Рассмотрим общий случай движения нагрузки P. На закон движения $\xi(t)$ наложим естественное ограничение $W > 0$ — движение нагрузки P считаем ускоренным. При таком ограничении на $\xi(t)$ характеристики I семейства ($\tau = \mathrm{const}$) пересекутся с $X = 0$ в общем случае дважды, а характеристики II семейства ($\eta = \mathrm{const}$)— один раз. Вычислять асимптотику интегралов в решении (5), (6) будем при $n \to \infty$, когда фронт нагрузки P переходит в разрыв. При этом стационарными точками при вычислении интегралов методом Лапласа являются точки пересечения характеристик I и II семейств с законом движения ($X = 0$) разрыва нагрузки P. Полученное решение имеет обобщенную структуру (кусочно-непрерывную). В зависимостях, приводимых ниже для соответствующих областей *1—7* (рис. 2, *а*), знак равенства заменен знаком асимптотического соответствия, а экспоненциально малые члены, стремящиеся к нулю при $n \to \infty$, отброшены:

1) $\tau > 0 \cap X > 0$:

$$\omega(X, t) \sim -V(t), \; p(X, t) \sim 0;$$

2) $\tau > 0 \cap X < 0$:

$$\omega(X, t) \sim -V(t) + \frac{1}{2} c_0 \frac{A_1}{F_0} \left[\frac{P_0(z_1)}{\mathrm{M}(z_1) - 1} + \frac{P_0(z_2)}{\mathrm{M}(z_2) + 1} \right],$$

$$p(X, t) \sim \rho_0 c_0^2 \frac{A_1}{F_0} \left\{ P_0(t) + \frac{1}{2} \left[\frac{P_0(z_1)}{\mathrm{M}(z_1) - 1} - \frac{P_0(z_2)}{\mathrm{M}(z_2) + 1} \right] \right\};$$

3) $\tau_* > \tau > 0 \cap X > 0$:

$$\omega(X, t) \sim -V(t) + \frac{1}{2} c_0 \frac{A_1}{F_0} \frac{P_0(z_3)}{1 - \mathrm{M}(z_3)}, \quad p(X, t) \sim \frac{1}{2} \rho_0 c_0^2 \frac{A_1}{F_0} \frac{P_0(z_3)}{1 - \mathrm{M}(z_3)};$$

4) $\tau_* > \tau > 0 \cap X < 0 \cap t > z_*$:

$$\omega(X, t) \sim -V(t) + \frac{1}{2} c_0 \frac{A_1}{F_0} \left[\frac{P_0(z_3)}{1 - \mathrm{M}(z_3)} + \frac{P_0(z_1)}{\mathrm{M}(z_1) - 1} + \frac{P_0(z_2)}{\mathrm{M}(z_2) + 1} \right],$$

$$p(X, t) \sim \rho_0 c_0^2 \frac{A_1}{F_0} \left\{ P_0(t) + \frac{1}{2} \left[\frac{P_0(z_3)}{1 - \mathrm{M}(z_3)} + \frac{P_0(z_1)}{\mathrm{M}(z_1) - 1} - \frac{P_0(z_2)}{\mathrm{M}(z_2) + 1} \right] \right\};$$

5) $\tau = \tau_* \cap t > z_*$:

$$\omega(X, t) \sim -V(t) + \frac{1}{2} c_0 \frac{A_1}{F_0} \left[P_0(z_*) \sqrt[4]{n} \sqrt{\frac{c_0^2}{W(z_*)}} 1{,}2163 + \frac{P_0(z_2)}{\mathrm{M}(z_2) + 1} \right],$$

$$p(X, t) \sim \rho_0 c_0^2 \frac{A_1}{F_0} \left\{ P_0(t) + \frac{1}{2} \left[P_0(z_*) \sqrt[4]{n} \sqrt{\frac{c_0^2}{W(z_*)}} 1{,}2163 - \frac{P_0(z_2)}{\mathrm{M}(z_2) + 1} \right] \right\};$$

6) $(0 < \eta < \eta_* \cap X < 0) \cup (\eta > \eta_* \cap \tau < \tau_*)$:

$$\omega(X, t) \sim -V(t) + \frac{1}{2} c_0 \frac{A_1}{F_0} \frac{P_0(z_2)}{\mathrm{M}(z_2) + 1},$$

$$p(X, t) \sim \rho_0 c_0^2 \frac{A_1}{F_0} \left[P_0(t) - \frac{1}{2} \frac{P_0(z_2)}{\mathrm{M}(z_2) + 1} \right];$$

7) $\eta < 0$:

$$\omega(X, t) \sim -V(t), \quad p(X, t) \sim \rho_0 c_0^2 \frac{A_1}{F_0} P_0(t).$$

Здесь $\mathrm{M}(z) = V(z)/c_0$;

(8) $$z_1 = z_1(\tau),\ z_2 = z_2(\eta),\ z_3 = z_3(\tau);$$

z_1 и z_3 — большее и меньшее значения времени пересечения характеристики I семейства с $X = 0$; z_2 — время пересечения характеристики II семейства с $X = 0$.

При $n \to \infty$ полученное обобщенное решение переходит в сингулярное обобщенное решение (см. п. 2). На характеристике $\tau = \tau_*$ при $t > z_*$ значения гидродинамических параметров сингулярны. Поэтому методом выделения разрыва нагрузки P рассчитать переход через $\mathrm{M} = 1$ и последующее движение не удается. Для расчета перехода через $\mathrm{M} = 1$ методом размазывания разрыва нагрузки P необходимо определить значение n. Это можно сделать на основе сравнения расчета по одномерной модели с результатами пространственного расчета или эксперимента, т. е. на основе решения задачи параметрической идентификации для данной механической системы.

Для конечной по длине системы необходим учет левого и правого граничных условий. В этом случае решение п. 3 надо записать с помощью соотношений (3) в неподвижной системе координат (рис. 2, *б*) и модифицировать так, чтобы оно содержало произвольные функции τ и η для удовлетворения правого и левого граничных условий.

Из решения п. 3 при конечном n следует, что на характеристике $\tau = \tau_*$ при $t > z_*$ гидродинамические параметры зависят от ускорения в точке $(0, z_*)$ плоскости (X, t) рис. 2, *а*. Для прочих областей решение зависит лишь от нагрузки P и ее относительной скорости $\mathrm{M} = V/c_0$, как и для стационарных или регулярных обобщенных автомодельных решений. Поэтому в [8] они названы квазиавтомодельными. По существу это решения, полученные методом выделения разрыва нагрузки P ($n = \infty$). Квазиавтомодельные решения при $\mathrm{M} < 1$ являются предельными (дают максимальные давления гидроудара) по отношению к реальным движениям нагрузки P. Сравнивая формулы п. 1 и 3 для области *3*, видим, что в области *3* на соответствующих характеристиках $\tau = \mathrm{const}$ значения p и ω будут те же, что и для регулярных обобщенных автомодельных решений при значениях P и V в момент первого пересечения характеристики I семейства и закона движения нагрузки P ($X = 0$).

Сравнивая решения п. 2 и 3, видим, что при конечном n максимальные давления (в области *5*) будут конечны в любой момент времени для ускоренного движения нагрузки $P(W(z_*) \neq 0)$ и конечного $P_0(z_*)$, в то время как при линейном резонансе и конечном n для $t \to \infty$ $p \to \infty$. Зависимость от n при линейном резонансе (в формулы п. 2 входит $\sqrt{n}$)

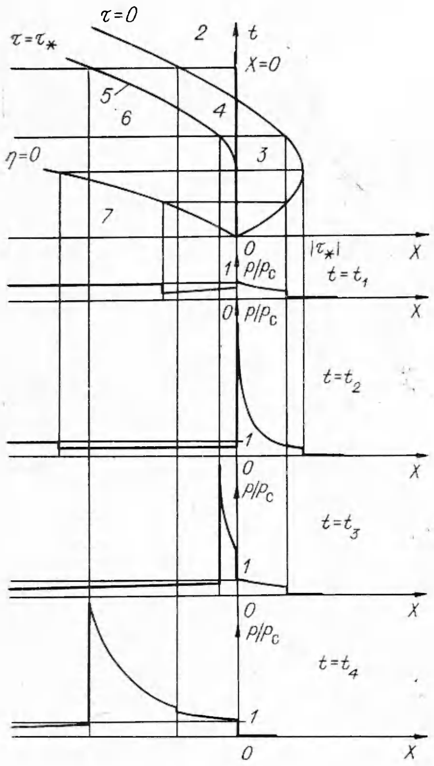

Рис. 3

более сильная, чем при ускоренном переходе через $\mathrm{M} = 1$ (в формулы для области 5 п. 3 входит $\sqrt[1]{n}$).

В общем случае зависимости (8) можно получить лишь численно (или графически, что существенно проще) на основе решения нелинейных уравнений $\xi(z) = c_0 z + \tau$, $\xi(z) = -c_0 z + \eta$, точное решение которых можно найти, например, в случае равноускоренного движения разрыва нагрузки P с законом движения $\xi = Wt^2/2$:

$$z_1 = \frac{c_0}{W} + \sqrt{\left(\frac{c_0}{W}\right)^2 + \frac{2\tau}{W}},$$

$$z_2 = -\frac{c_0}{W} + \sqrt{\left(\frac{c_0}{W}\right)^2 + \frac{2\eta}{W}},$$

$$z_3 = \frac{c_0}{W} - \sqrt{\left(\frac{c_0}{W}\right)^2 + \frac{2\tau}{W}}.$$

Полагая $P(X, t) = R\theta(t)\varphi(X)$, получим обозримое решение (рис. 3), которое легко анализируется методами математического анализа. При $n \to \infty$ $\varphi(X) \to \theta(-X)$ и рассматриваемое решение будет совпадать с решением [8], полученным методом выделения разрыва нагрузки P при $\mathrm{M} < 1$.

На рис. 3 представлены распределение давления жидкости в подвижной системе координат для $t_1 = \frac{c_0}{2W}\left(\mathrm{M} = \frac{1}{2}\right)$, $t_2 = \frac{c_0}{W}(\mathrm{M} = 1)$, $t_3 = \frac{3}{2}\frac{c_0}{W}\left(\mathrm{M} = \frac{3}{2}\right)$, $t_4 = \frac{5}{2}\frac{c_0}{W}\left(\mathrm{M} = \frac{5}{2}\right)$ и волновая конфигурация к асимптотическому решению для равноускоренного движения стационарной нагрузки P: *1—7* — области с непрерывным распределением давления и скорости жидкости, $\tau_* = -c_0^2/2W$.

Вышеизложенные аналитические результаты могут быть использованы при отладке и тестировании численных алгоритмов и позволяют, кроме того, понять некоторые особенности численных решений одномерной задачи гидроудара, возникающего при движении разрыва нагрузки P.

В заключение следует отметить, что проблема незамкнутости возникает лишь при одномерном описании явления гидроудара и что одномерная модель дает только одно значение критической скорости, при которой имеет место резонанс.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Кочина Н. Н.** О неустановившемся движении вязкой жидкости в длинной трубе // Изв. АН СССР. МЖГ.— 1980.— № 6.
2. **Вольмир А. С.** Оболочки в потоке жидкости и газа // Задачи гидроупругости.— М.: Наука, 1979.
3. **Яковлев Ю. С.** Гидродинамика взрыва.— Л.: Судпромиздат, 1961.
4. **Алдошин Г. Т.** Гидравлический удар в деформируемом трубопроводе // Вести. ЛГУ. Математика. Механика. Астрономия.— 1961.— № 19, вып. 4.
5. **Мнев Е. Н., Перцев А. К.** Гидроупругость оболочек.— Л.: Судостроение, 1970.
6. **Слепян Л. И.** Нестационарные упругие волны.— Л.: Судостроение, 1972.
7. **Хребтов В. А.** О неустановившемся движении малосжимаемой жидкости в канале с упругими стенками.— Л., 1982.— Деп. в ЦНИИ «Румб» 19.04.83, № ДР — 1649.
8. **Хребтов В. А.** Об одном неавтомодельном решении.— Л., 1982.— Деп. в ЦНИИ «Румб» 19.04.83, № ДР — 1650.

г. Ленинград

Поступила 9/II 1988 г.,
в окончательном варианте — 27/IV 1988 г.