ПМТФ, № 4, 1969

О НЕКОТОРЫХ ИНВАРИАНТНЫХ РЕШЕНИЯХ УРАВНЕНИЙ ТИПА КОРТЕВЕГА ДЕ ВРИЗА

В. М. Костин

(Москва)

Используя найденные группы Ли построены инвариантные решения уравнений. Один класс решений, выраженный через трансцендентные функции Пенлеве, связан с начальной стадией развития возмущения в диспергирующей среде.

Для выяснения роли дисперсии в нелинейных процессах и характера возникающих при этом явлений в последнее время широко используется уравнение Кортевега де Вриза [1-6]

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + \beta\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0 \tag{0.1}$$

Оно получается, когда отклонение закона дисперсии от линейного невелико и выражается в виде

$$\omega = v_f\, k\,(1 + \delta k^2) \tag{0.2}$$

где v_f — фазовая скорость малых колебаний $\delta k^2 \ll 1$, а δ — некоторая постоянная, характеризующая величину дисперсионных эффектов. В этом случае для целого ряда задач с конечными, но малыми возмущениями (например, для поверхностных волн в мелкой воде [1], для плазменных волн [2,6]) основные уравнения сводятся к (0.1). Исследования решений этого уравнения проводились как численно [2-5], так и при помощи приближенного аналитического метода, развитого Уитемом [7] в работах [3,4].

В данной статье исследуются групповые свойства уравнения (0.1), находятся инфинитезимальные операторы, порождающие алгебру Ли основной группы, что позволяет построить инвариантные [9] решения. При этом наряду с известными решениями (солитоны, периодические волны [1,3-5], автомодельные решения [2-4]) найдены новые решения (0.1) которые ранее не рассматривались.

Кроме этого, рассмотрим еще два уравнения типа (0.1) с соответствующими законами дисперсии

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + \beta\frac{\partial^3 u}{\partial t\partial x^2} = 0, \qquad \omega = \frac{v_f k}{1 + \delta k^2} \tag{0.3}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + \beta u\frac{\partial^3 u}{\partial t^3} = 0, \qquad \omega = v_f k + \delta\omega^3 \tag{0.4}$$

Во второй и третьей частях статьи разбираются инвариантные решения уравнений (0.3), (0.4) соответственно.

1. В работах [8,9] дано понятие инвариантных решений и разработан метод, с помощью которого можно находить наборы частных решений. Используя этот метод, можно показать, что алгеба Ли основной группы уравнения (0.1) порождается следующими инфинитезимальными операторами

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial t}, \quad X_2 = \frac{\partial}{\partial x}, \quad X_3 = t\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial u}$$
$$X_4 = x\frac{\partial}{\partial x} + 3t\frac{\partial}{\partial t} - 2u\frac{\partial}{\partial u} \tag{1.1}$$

Эти операторы соответствуют следующим преобразованиям: X_1 — трансляция по времени, X_2 — трансляция по координате, X_3 — галилеев перенос, X_4 — растяжение по всем переменным.

Для построения существенно различных инвариантных решений необходимо знание всех неподобных подгрупп основной группы. Остальные инвариантные решения строятся преобразованием функций и переменных без какого-либо интегрирования дифференциальных уравнений [8,9]. Оптимальная система однопараметрических подгрупп имеет вид

$$X_1, X_2, X_3, X_4, X_5 = X_1 + \alpha X_3 \tag{1.2}$$

где α — произвольная постоянная.

Для подгруппы X_1 имеем два инварианта $I_1 = x$, $I_2 = u$. Решение ищется в виде $u = u(x)$ и выражается через эллиптические функции Якоби [10]. Преобразование $x_1 = x - vt$ дает класс решений, отвечающий нелинейным периодическим волнам, которые ранее широко обсуждались

$$u = v + \frac{2}{3}a\left(1 + \frac{1}{s^2}\right) - 2asn^2\left(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{6\beta}}\frac{x - vt}{s}, s\right) \tag{1.3}$$

Здесь a — амплитуда волны, s — модуль эллиптической функции. Отметим, что здесь и далее рассматриваются подгруппы, приводящие к нетривиальным решениям.

Группа растяжения дает автомодельные решения [9]. Инвариантами X_4 будут

$$I_1 = x^3 / t, \qquad I_2 = ut^{2/3}$$

Решение ищется в виде

$$u = (\beta(3t)^{-2})^{1/3}U(\lambda), \qquad \lambda = (3\beta)^{1/3}xt^{-1/3}$$

и удовлетворяет уравнению

$$\frac{d^3U}{d\lambda^3} + U\frac{dU}{d\lambda} - \lambda\frac{dU}{d\lambda} - 2U = 0 \tag{1.4}$$

Важность автомодельных решений в исследовании вопроса асимптотического развития возмущения в диспергирующих средах весьма полно показана в работе [4].

Для нелинейных уравнений характерно появление перемещающихся особых точек [11]. Так, уравнение (1.4) имеет перемещающийся полюс второго порядка

$$U = -\frac{12}{(\lambda - \lambda_0)^2} + \lambda_0 + a(\lambda - \lambda_0)^2 - \frac{\lambda_0}{3}(\lambda - \lambda_0)^3 + h(\lambda - \lambda_0)^4 -$$
$$-\frac{6a + 5\lambda_0}{216}(\lambda - \lambda_0)^6 + \frac{5a\lambda_0 + 18h}{450}(\lambda - \lambda_0)^7 - \frac{\lambda_0^2 + 18ah}{792}(\lambda - \lambda_0)^8 + \ldots \tag{1.5}$$

Здесь λ_0, a, h — произвольные постоянные интегрирования.

Отметим, что при учете дисперсии, т. е. в (0.1), необходимо ввести еще член $\nu d^2u/dx^2$; тогда уравнение не будет допускать группу растяжения X_4.

Наибольший интерес вызывают решения (0.1), которые определяются дисперсией (должен входить параметр дисперсии β) и сохраняют свою функциональную зависимость от x и t при учете диссипации. Такими решениями наряду с даваемыми подгруппой X_1 будут инвариантные решения, даваемые подгруппой X_5. Инвариантами X_5 будут $I_1 = x - {}^1/_2\alpha t^2$, $I_2 = u - \alpha t$. Ищем решение в виде $u = \alpha t + U(\lambda)$, где $\lambda = x - {}^1/_2\alpha t^2$

$$\beta \frac{d^3U}{d\lambda^3} + U\frac{dU}{d\lambda} + \alpha = 0 \tag{1.6}$$

Уравнение (1.6) допускает преобразование $x_1 = x + a$, поэтому при первом интегрировании (1.6) константу интегрирования можно взять *равной* нулю. Если положить

$$U(\lambda) = -(12^3\alpha^2\beta)^{1/5}W, \qquad \lambda = (12\alpha^{-1}\beta^2)^{1/5}z$$

то получим

$$\frac{d^2W}{dz^2} = 6W^2 + z \tag{1.7}$$

Решением этого уравнения будет существенно трансцендентная функция Пенлеве [11]. Решение уравнения свободно от перемещающихся критических точек, но имеет перемещающиеся полюса

$$W = \frac{1}{(z-z_0)^2} - \frac{z_0}{10}(z-z_0)^2 - \frac{1}{6}(z-z_0)^3 + h(z-z_0)^4 + \frac{z_0^2}{300}(z-z_0)^6 + \ldots \tag{1.8}$$

Физический смысл полученного решения выясним из рассмотрения предельного случая $\beta \to 0$. При этом $u = \alpha t - \sqrt{\alpha^2t^2 - 2\beta x}$ дает развитие ударной волны из параболического профиля, а константа α будет радиусом кривизны носовой части параболы.

Дисперсия среды приводит к тому, что по гладкому профилю перемещается волна модуляции, достигая точек $x - {}^1/_2\alpha t^2$, где α — минимальный радиус кривизны профиля. Это находится в согласии с расчетами работы [4], которые показывают, что асимптотическое развитие начального возмущения на основе уравнения (0.1) приводит к образованию ряда солитонов с осциллирующим хвостом.

2. Уравнение (0.1) используется для задач с начальными данными, так как решение $u(x, t)$ однозначно определяется начальным возмущением. Для уравнения (0.3) начальное возмущение тоже однозначно определяет решение, если принять вполне оправданное физическое требование конечности скорости распространения возмущения. Только для уравнения (0.3) включение в него члена $\nu\partial^2u / \partial x\partial t$ не приводит к сужению группы Ли, а следовательно, не меняет числа инвариантных решений.

Уравнение (0.3) обладает трехпараметрической группой Ли. Алгебра Ли порождается следующими инфинитезимальными операторами:

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial t}, \quad X_2 = \frac{\partial}{\partial x}, \quad X_3 = t\frac{\partial}{\partial t} - u\frac{\partial}{\partial u} \tag{2.1}$$

Эти операторы соответствуют следующим преобразованиям: X_1 — трансляция во времени, X_2 — трансляция по координате, X_3 — растяжения. Проводя выкладки, аналогичные первой части работы, найдем, что оптиальная система однопараметрических подгрупп может быть записана в виде

$$X_1,\ X_2,\ X_3,\ X_4 = \alpha X_2 + X_3,\ X_5 = X_1 + \alpha X_2 \tag{2.2}$$

Подгруппы X_1 и X_2 дают тривиальное решение.

Автомодельное решение дается группой растяжения. Инвариантами оператора X_3 будут $I_1 = x$, $I_2 = ut$. Решение ищется в виде $u = U(x)/t$. Оно удовлетворяет уравнению

$$\beta \frac{d^2U}{dx^2} - U\frac{dU}{dx} + U = 0 \tag{2.3}$$

Параметрическое решение (2.3) сводится к одной квадратуре

$$x = \frac{1}{2}\sqrt{2\beta}\int \frac{(p+1)\,dp}{p^2(p+\ln p + c)^{1/2}}, \qquad U = \sqrt{2\beta}\,(p + \ln p + c)^{1/2} \tag{2.4}$$

где p — параметр, вторая постоянная интегрирования уравнения (2.3) дается допускаемым преобразованием $x_1 = x + a$. Подгруппа X_4 дает решения, предельные к автомодельному. Инвариантами X_4 будут $I_1 = x - \alpha \ln t$, $I_2 = ut$. Решение ищется в виде

$$u = U(\lambda)/t, \quad \lambda = x - \alpha \ln t$$

В результате получаем

$$\beta\left(\alpha\frac{d^3U}{d\lambda^3} + \frac{d^2U}{d\lambda^2}\right) - U\frac{dU}{d\lambda} + U - \alpha\frac{dU}{d\lambda} = 0 \tag{2.5}$$

Стандартной заменой $dU/d\lambda = p(U)$ можно понизить порядок уравнения. Получающееся уравнение не допускает первого интеграла, а из представления решения в виде ряда видно, что общее решение не будет алгебраической функцией обеих постоянных интегрирования. Общее решение в данном случае будет существенно трансцендентной функцией обеих постоянных, отличных от трансцендентных функций, определяемых уравнениями первого порядка с алгебраическими коэффициентами.

Подгруппа X_5 дает нелинейную бегущую волну. Инвариантами X_5 будут $I_1 = u$, $I_2 = x - \alpha t$. Решение ищется в виде $u(\lambda)$. Аналогично (1.3) оно выражается через эллиптическую функцию Якоби

$$u = \alpha - {}^2/_3\, a\,(1 + s^{-2}) + 2a\,\mathrm{sn}^2\left(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{6\beta\alpha}}\,\frac{x-\alpha t}{s},\ s\right) \tag{2.6}$$

Решение (2.6) отличается от (1.3) другими параметрами волны.

3. Перейдем теперь к уравнению (0.4), которое, как и (0.3), обладает трехпараметрической группой Ли. Алгебра Ли порождается следующими инфинитезимальными операторами:

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial t}, \quad X_2 = \frac{\partial}{\partial x}, \quad X_3 = t\frac{\partial}{\partial t} + 3x\frac{\partial}{\partial x} + 2u\frac{\partial}{\partial u} \tag{3.1}$$

Отличие от (2.1) состоит в том, что оператор растяжения X_3 действует на все переменные. Это приводит к тому, что оптимальная система состоит из четырех однопараметрических подгрупп

$$X_1,\ X_2,\ X_3,\ X_4 = X_1 + \alpha X_2 \tag{3.2}$$

Подгруппы X_1 и X_2 дают тривиальное решение. Автомодельные решения для уравнений (0.1), (0.3), (0.4) имеют различную функциональную зависимость от переменных x и t, так как подгруппы растяжения имеют разные коэффициенты растяжения. Автомодельное решение можно искать в виде $u = t^2 \, U \, (x \, / \, t^3)$. Уравнение для $U \, (\lambda)$ имеет вид

$$\beta\left(27\lambda^3 \frac{d^3U}{d\lambda^3} + 54\lambda^2 \frac{d^2U}{d\lambda^2} + 6\lambda \frac{dU}{d\lambda}\right) + 3\,\frac{\lambda}{U}\,\frac{dU}{d\lambda} - \frac{dU}{d\lambda} - 2 = 0 \qquad (3.3)$$

Решение этого уравнения аналогично (1.4) не выражается через алгебраические функции.

Характерной особенностью уравнения (0.4) будет то, что форма стационарной волны не описывается эллиптической функцией. Профиль волны можно неявно выразить через одну квадратуру

$$x = \alpha t + (\alpha\beta)^{3/2} \int \frac{du}{\sqrt{u^2 - 2\alpha u \ln u + c_1 u + c_2}} \qquad (3.4)$$

В заключение автор выражает благодарность Я. Л. Альперту и В. И. Карпману за полезные обсуждения.

Поступила 15 IV 1969

ЛИТЕРАТУРА

1. Korteweg D. J. Vries de G. On the chanqe of Form of long waves advancing in a rectangular canal and a new type of long stationary waves. Philos Mag. Ser., 5, 1895, vol. 39, No. 240.
2. Березин Ю. А., Карпман В. И. К теории волн конечной амплитуды. ЖЭТФ, 1964, т. 46, вып. 6.
3. Березин Ю. А., Карпман В. И. О нелинейной эволюции возмущений в плазме и других диспергирующих средах. ЖЭТФ, 1966, т. 51, вып. 5.
4. Карпман В. И. О структуре течения при двумерном обтекании тонкого тела в диспергирующей среде. ЖЭТФ, 1967, т. 52, вып. 6.
5. Zabusky N. I., Kruskal M. D. Interaction of «solitons» in a collisionless plasma and the recurrence of initial states. Phys. Rev. Letters, 1965, vol. 15, No. 6.
6. Kakutani T., Ono H., Taniuti T., Wei C. C. Reductive perturbation method in Non-linear wave propagation II. Application to hudromagnetic waves in cold plasma. J. Phys. Soc. Japan, 1967, vol. 24, No. 5.
7. Whitham G. B. Non-linear dispersive waves. Proc. Roy. Soc., Ser. A, 1965, vol. 283, No. 1393.
8. Овсянников Л. В. Групповые свойства дифференциальных уравнений. Новосибирск, Изд-во СО АН СССР, 1962.
9. Овсянников Л. В. Лекции по теории групповых свойств дифференциальных уравнений. Новосибирск, Изд-во Новосиб. ун-та, 1966.
10. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. М., «Наука», 1967, т. 3.
11. Айнс Э. Л. Обыкновенные дифференциальные уравнения. Харьков, Гостехиздат, 1939, стр. 443, 463.