УДК 535.41

МЕТОД РАСЧЕТА ХАРАКТЕРИСТИК РАЗРУШЕНИЯ МАТЕРИАЛОВ НА ОСНОВЕ ИНВАРИАНТНЫХ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

Г. В. Дружинин, Ф. К. Смородин

Казанский национальный исследовательский технический университет
им. А. Н. Туполева, 420111 Казань
E-mail: tsmorodina@mail.ru

На основе инвариантного H_2-решения получено аналитическое решение редуцированной задачи о плавлении кристаллического материала. Выведена формула, определяющая унос массы материала в расплавленном виде в окрестности критической точки.

Ключевые слова: газовый поток, тепловое воздействие, плавление, унос массы, тепловая защита, радиационное излучение, подгруппа, дифференциальное уравнение.

Введение. Проблема тепловой защиты в ракетно-космической технике исследуется при решении задач гиперзвукового полета в атмосфере для значений числа Маха $\mathrm{M} > 6$, при которых температура торможения в газовом потоке превышает 1500 K. Поскольку тепловое воздействие может сопровождаться механическими, окислительными и эрозионными процессами, разрушение конструкции возможно при существенно меньших температурах.

Существуют следующие способы отвода тепла: теплопроводность, конвекция, массообмен, радиационное излучение, электромагнитные поля и физико-химические превращения в защитном материале. Каждый из этих способов или их комбинации могут быть использованы в качестве различных методов защиты. Среди указанных методов защиты наиболее широко применяются пористое охлаждение и разрушающаяся тепловая защита.

Существенным преимуществом разрушающихся теплозащитных материалов и покрытий является саморегулирование процесса, т. е. изменение тепловой нагрузки. При этом процессы разрушения сопровождаются фазовыми и химическими превращениями, а также уносом в набегающий поток испаряющихся продуктов разрушения. Таким образом, происходит потеря поверхностного слоя теплозащитного материала, в результате чего сохраняется требуемый тепловой режим для внутренних слоев и защищаемой конструкции. Этот способ используется, например, для защиты баллистических ракет дальнего действия, космических аппаратов, камер сгорания ракетных двигателей.

Таким образом, разработка новых более точных методов расчета разрушения теплозащитных материалов и покрытий является актуальной задачей.

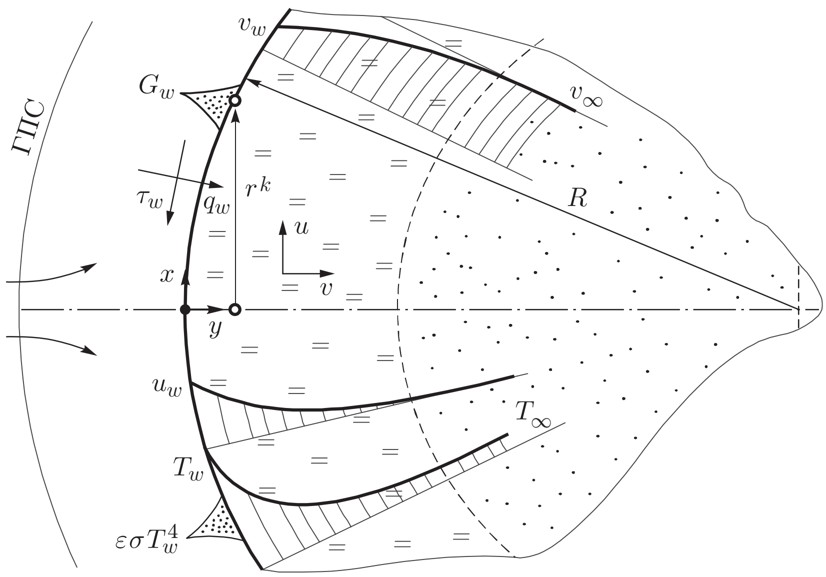

Рис. 1. Схема течения пленки расплава аморфного материала в потоке газа (ГПС — газовый пограничный слой)

1. Постановка задачи. Уравнения пограничного слоя, которые достаточно точно моделируют течение вязких несжимаемых жидкостей (система координат связывается с поверхностью тела), имеют вид [1]

$$\frac{\partial}{\partial x}(r^k u) + \frac{\partial}{\partial y}(r^k v) = 0,$$
$$\rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \rho v \frac{\partial u}{\partial y} + F = \frac{\partial}{\partial y}\Big(\mu \frac{\partial u}{\partial y}\Big), \tag{1.1}$$
$$\rho c\Big(u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y}\Big) = \frac{\partial}{\partial y}\Big(\lambda \frac{\partial T}{\partial y}\Big),$$

где u, v — продольная и поперечная составляющие скорости; $F = dP_e/dx - N$; P_e — статическое давление на внешней границе пограничного слоя; $N(x)$ — касательная составляющая инерционных сил; λ — теплопроводность; μ — динамическая вязкость; c — удельная теплоемкость пленки расплава при постоянном давлении; ρ — плотность; T — абсолютная температура; r^k — расстояние от оси симметрии до рассматриваемой точки жидкой пленки (для плоского течения $k = 0$, для осесимметричного — $k = 1$); F, r^k — функции независимой переменной x; μ, λ, c — функции температуры.

Рассматривается задача обтекания гиперзвуковым вязким потоком газа тел, на поверхности которых под воздействием теплового потока, градиента давления и трения образуется движущаяся пленка расплава.

Модель процесса разрушения (оплавления) аморфного материала в высокотемпературном газовом потоке, обтекающем окрестность точки торможения затупленного тела, представлена на рис. 1. При решении задачи об оплавлении принимаются следующие допущения: 1) уравнения, описывающие движение пленки расплава, решаются отдельно от уравнений движения газа, обтекающего тело; 2) влияние движения расплава на течение в пограничном слое газового потока не учитывается; 3) значения теплового потока и трения на поверхности раздела газ — жидкая пленка принимаются такими же, как на аналогичной неподвижной поверхности с учетом поправки на вдув продуктов испарения; 4) в уравнениях (1.1) пренебрегается инерционными составляющими $u\,(\partial u/\partial x)$, $v\,(\partial u/\partial y)$, скорость изменения формы оплавляющегося тела считается незначительной.

Допущения 1–4 принимаются вследствие того, что вязкость расплава значительно больше вязкости газа и скорость движения пленки много меньше скорости движения газа [2]. С учетом данных допущений система уравнений, описывающих установившееся движение пленки расплава, в системе координат, связанной с поверхностью раздела газ — жидкая пленка, принимает следующий вид:

$$\begin{gathered}\frac{\partial}{\partial x}\,(r^k u) + \frac{\partial}{\partial y}\,(r^k v) = 0,\\ \frac{\partial}{\partial y}\left(\mu\,\frac{\partial u}{\partial y}\right) = \frac{dP_e}{dx} - N \equiv F,\\ \rho c\Big(u\,\frac{\partial T}{\partial x} + v\,\frac{\partial T}{\partial y}\Big) = \frac{\partial}{\partial y}\Big(\lambda\,\frac{\partial T}{\partial y}\Big).\end{gathered}\tag{1.2}$$

Система уравнений (1.2) замыкается соответствующей системой граничных условий

$$\begin{aligned}&y = 0: && -\left(\lambda\,\frac{\partial T}{\partial y}\right)_w - G_w \Delta Q_w + \varepsilon\sigma T_w^4 = \left(\frac{\alpha}{c_p}\right)_w (J_e - J_w),\\ &&& (\rho v)_w = -G_w,\\ &&& \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_w = -\frac{\tau_w}{\mu_w(T_w)},\\ &y \to \infty: && T \to T_\infty, \qquad u \to 0,\end{aligned}\tag{1.3}$$

где α — коэффициент теплоотдачи; $G_w = (\alpha/c_p)_w f(T_w, P_e)$ — массовая скорость испарения; ΔQ_w — суммарный тепловой эффект испарения; ε — коэффициент, учитывающий степень черноты разрушающейся поверхности; σ — постоянная Стефана — Больцмана; $J_e - J_w$ — перепад энтальпии в пограничном слое; $(\alpha/c_p)_w$ — коэффициент конвективного теплообмена, учитывающий вдув продуктов испарения; τ_w — касательное напряжение на поверхности тела; индекс e соответствует внешней границе пограничного слоя, индекс w — условию на поверхности, индекс “∞” — невозмущенному потоку или непрогретому материалу.

В основу математической модели (1.2), (1.3), базирующейся на уравнениях пограничного слоя (1.1), положены общепринятые допущения [3, 4].

Для материалов с четко выраженной температурой плавления (при тех же допущениях, что и в задаче (1.2), (1.3)), предлагается следующая математическая модель (при $y = 0$ граничные условия сохраняются):

$$\begin{gathered}\frac{\partial}{\partial x}\,(r^k u) + \frac{\partial}{\partial y}\,(r^k v) = 0 \qquad (0 < x < l, \quad 0 < y < \delta),\\ \frac{\partial}{\partial y}\Big(\mu\,\frac{\partial u}{\partial y}\Big) = \frac{dP_e}{dx} - N \equiv F,\\ \rho c\Big(u\,\frac{\partial T}{\partial x} + v\,\frac{\partial T}{\partial y}\Big) = \frac{\partial}{\partial y}\Big(\lambda\,\frac{\partial T}{\partial y}\Big), \qquad \rho_1 c_1 v_m\Big(\frac{\partial T_1}{\partial y}\Big) = \frac{\partial}{\partial y}\Big(\lambda_1\,\frac{\partial T_1}{\partial y}\Big);\end{gathered}\tag{1.4}$$

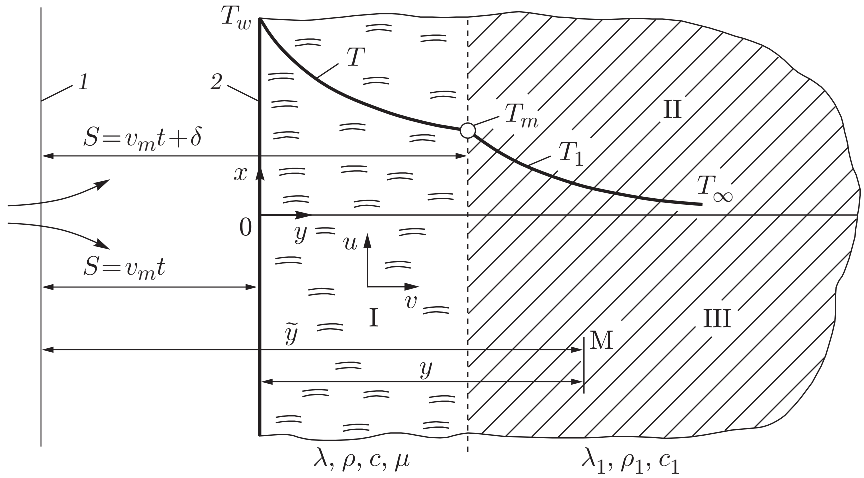

Рис. 2. Схема плавления кристаллического материала:
1 — положение поверхности тела в момент выхода на квазистационарный режим разрушения; *2* — текущее положение разрушающейся поверхности; 0 — точка торможения; I — жидкий расплав, II — исходный материал, III — зона разложения

$$y = \delta: \qquad \Big(\lambda \frac{\partial T}{\partial y}\Big)_{\delta-0} = \Big(\lambda_1 \frac{\partial T_1}{\partial y}\Big)_{\delta+0} + H\rho_1 v_m(x,\delta),$$

$$u = 0, \qquad (T)_{\delta-0} = (T_1)_{\delta+0} \equiv T_m,$$

$$y \to \infty: \qquad T_1 \to T_\infty.$$

Здесь δ — толщина пленки расплава; H — удельная теплота плавления материала; T_m — температура плавления; $v_m(x,\delta)$ — скорость плавления тела, которая заранее неизвестна; нижний индекс 1 соответствует исходному твердому материалу.

Модель процесса разрушения (плавления) материала в окрестности точки торможения затупленного тела при квазистационарном разрушении показана на рис. 2 ($y = \tilde{y} - v_m t$; $\tilde{y}$ — расстояние от начального положения поверхности тела до произвольной точки разрушающегося материала; t — время).

В работе [5] найдена подгруппа H_2 с оператором $\langle X_2\rangle$, на которой можно построить все автомодельные решения уравнений стационарного пограничного слоя в качестве частного случая. Автомодельное решение является частным случаем инвариантного решения, и это решение (в узком смысле) строится на группе растяжения. Инвариантное решение системы дифференциальных уравнений называется автомодельным (в широком смысле), если допускаемая группа этой системы является абелевой [6].

Оператор X_2 имеет вид

$$X_2 = \omega\chi \frac{\partial}{\partial x} - \frac{y}{4}\,(\alpha\omega\chi - 1)\,\frac{\partial}{\partial y} + \frac{u}{2}\,[(\alpha - 2\varphi)\omega\chi + 1]\,\frac{\partial}{\partial u} -$$
$$- \Big[\frac{uy}{4}\,[(\alpha' - \varphi\alpha)\omega\chi + \alpha] - \frac{v}{4}\,(\alpha\omega\chi - 1)\Big]\,\frac{\partial}{\partial v}, \qquad (1.5)$$

где

$$\omega = \exp\Big(-\int\varphi\,dx\Big), \qquad \chi = \int\exp\Big(\int\varphi\,dx\Big)\,dx, \qquad \alpha = \varphi + Q, \quad \alpha' = \varphi' + Q',$$
$$\varphi = \frac{Q}{3} + \frac{4R_r}{3}, \qquad Q = \frac{F'}{F}, \qquad R_r = \frac{(r^k)'}{r^k}. \tag{1.6}$$

Первые интегралы определим из системы уравнений

$$\frac{dx}{\omega\chi} = \frac{4\,dy}{-y(\omega\chi\alpha-1)} = \frac{2\,du}{[(\alpha-2\varphi)\omega\chi+1]u} =$$
$$= \frac{4\,dv}{-uy[(\alpha'-\varphi\alpha)\omega\chi+\alpha]+v(\alpha\omega\chi-1)} = \frac{dT}{0},$$
$$C_1 = y\exp\Big(\frac{1}{4}\int\Big(\alpha-\frac{1}{\omega\chi}\Big)\,dx\Big), \quad C_2 = u\exp\Big(-\frac{1}{2}\int\Big(\alpha-2\varphi+\frac{1}{\omega\chi}\Big)\,dx\Big), \quad C_4 = T. \tag{1.7}$$

Третий интеграл находим из уравнения

$$\frac{dv}{dx} = -\frac{uy}{4}\Big[(\alpha'-\alpha\varphi)+\frac{\alpha}{\omega\chi}\Big] + \frac{v}{4}\Big(\alpha-\frac{1}{\omega\chi}\Big). \tag{1.8}$$

Подставляя u, y из выражений (1.7) в уравнение (1.8), получаем

$$\frac{dv}{dx} - \frac{v}{4}\Big(\alpha-\frac{1}{\omega\chi}\Big) = -\frac{1}{4}\,C_1\exp\Big(-\frac{1}{4}\int\Big(\alpha-\frac{1}{\omega\chi}\Big)\,dx\Big)\times$$
$$\times\, C_2\exp\Big(\frac{1}{2}\int\Big(\alpha-2\varphi+\frac{1}{\omega\chi}\Big)\,dx\Big)\Big(\alpha'-\alpha\varphi+\frac{\alpha}{\omega\chi}\Big). \tag{1.9}$$

Интегрируя уравнение (1.9), находим

$$v = \exp\Big(\frac{1}{4}\int\Big(\alpha-\frac{1}{\omega\chi}\Big)\,dx\Big)\Big[C_3 - \frac{C_1C_2}{4}\int\exp\Big(\int\Big(\frac{1}{\omega\chi}-\varphi\Big)\,dx\Big)\Big(\alpha'-\varphi\alpha+\frac{\alpha}{\omega\chi}\Big)\,dx\Big].$$

Проинтегрировав по частям второе выражение в квадратных скобках, получаем искомое решение

$$v = \exp\Big(\frac{1}{4}\int\Big(\alpha-\frac{1}{\omega\chi}\Big)\,dx\Big)\Big[C_3 - \frac{C_1C_2}{4}\,\alpha\exp\Big(-\int\Big(\frac{1}{\omega\chi}-\varphi\Big)\,dx\Big)\Big]. \tag{1.10}$$

С учетом (1.6), (1.7), (1.10) H_2-решение запишем в виде

$$u = J_1(z)\exp\Big(\frac{1}{2}\int\Big(\alpha-2\varphi+\frac{1}{\omega\chi}\Big)\,dx\Big),$$
$$v = \exp\Big(\frac{1}{4}\int\Big(\alpha-\frac{1}{\omega\chi}\Big)dx\Big)\Big[J_2(z) - \frac{zJ_1(z)}{4}\alpha\exp\Big(\int\Big(\frac{1}{\omega\chi}-\varphi\Big)\,dx\Big)\Big], \tag{1.11}$$
$$T = J_3(z),$$

где $z = y\exp\Big(\dfrac{1}{4}\displaystyle\int\Big(\alpha-\dfrac{1}{\omega\chi}\Big)\,dx\Big)$.

С учетом (1.6) H_2-решение (1.11) можно представить в виде

$$u = |F|^{1/3}|r^k|^{-2/3}\Big(\int\limits_0^x |F|^{1/3}|r^k|^{4/3}\,dt\Big)^{1/2} J_1(z), \qquad T = J_3(z),$$

$$v = |F|^{1/3}|r^k|^{1/3}\Big(\int\limits_0^x |F|^{1/3}|r^k|^{4/3}\,dt\Big)^{-1/4} J_2(z) - \tag{1.12}$$

$$-\frac{J_1(z)z}{3}\Big(\frac{F'}{F}+\frac{(r^k)'}{r^k}\Big)\frac{1}{|F|^{1/3}|r^k|^{4/3}}\int\limits_0^x |F|^{1/3}\,|r^k|^{4/3}\,dt,$$

где

$$z = y\,|Fr^k|^{1/3}\Big(\int\limits_0^x |F|^{1/3}\,|r^k|^{4/3}\,dt\Big)^{-1/4}.$$

Нетрудно убедиться, что, подставляя в оператор (1.5) значения $u_e = u_1x^n$, $k = 0$ (плоский случай), $N = 0$, можно получить следующий оператор растяжения (на котором строится автомодельное решение):

$$X_2' = \frac{3x}{2(n+1)}\,\frac{\partial}{\partial x} - \frac{3y(n-1)}{4(n+1)}\,\frac{\partial}{\partial y} + \frac{3nu}{2(n+1)}\,\frac{\partial}{\partial u} + \frac{3v(n-1)}{4(n+1)}\,\frac{\partial}{\partial v}.$$

Решение H_2', построенное с помощью оператора X_2', будем искать в виде

$$u = x^n J_1(z), \quad v = x^{(n-1)/2} J_2(z), \qquad T = J_3(z), \tag{1.13}$$

где $z = yx^{(n-1)/2}$.

Решение (1.13) представляет собой известное автомодельное решение, которое допускает физическую интерпретацию [1], а именно обтекание жидкостью (газом) клиновидного тела вблизи критической точки.

2. Редукция дифференциальных уравнений для аморфного материала. С использованием подгруппы H_2 с оператором X_2 сведем систему (1.2) к системе обыкновенных дифференциальных уравнений. Выбор этой подгруппы обусловлен тем, что на ней можно построить H_2-решение, которое обобщает известные классические автомодельные решения. При редукции исходной системы к системе обыкновенных дифференциальных уравнений теплофизические характеристики материала $\mu(T)$, $\lambda(T)$, $c(T)$ и функции, определяющие форму тела dP_e/dx, $r^k(x)$, а также касательная составляющая инерционных сил $N(x)$ считаются произвольно заданными.

Запишем H_2-решение (1.12) следующим образом:

$$u = (\chi\omega\beta F)^{1/2}\Phi(\xi),$$

$$v = \Big(\frac{\beta F}{\omega\chi}\Big)^{1/4}\Omega(\xi) - \frac{(\chi\omega\beta F)^{1/2}}{4}\Big(\frac{\omega\chi}{\beta F}\Big)^{1/4}\xi\alpha\Phi(\xi),$$

$$T = J_3(\xi).$$

Здесь

$$\xi = \Big(\frac{\beta F}{\omega\chi}\Big)^{1/4} y, \qquad \alpha = \frac{4F'}{3F} + \frac{4(r^k)'}{3r^k}, \qquad \omega\chi = \frac{1}{|F|^{1/3}|r^k|^{4/3}}\int\limits_0^x |F|^{1/3}\,|r^k|^{4/3}\,dt.$$

Подставляя H_2-решение в уравнения (1.2), получаем

$$\frac{\Phi}{2}-\frac{\xi}{4}\,\frac{d\Phi}{d\xi}+\frac{d\Omega}{d\xi}=0,\quad \frac{d}{d\xi}\Big(\mu\,\frac{d\Phi}{d\xi}\Big)=\frac{1}{\beta},\quad \Big(\Omega-\frac{\xi\Phi}{4}\Big)\frac{dJ_3}{d\xi}=\frac{d}{d\xi}\Big(a\,\frac{dJ_3}{d\xi}\Big), \tag{2.1}$$

где $1/\beta=-1$ при $F<0$, $1/\beta=1$ при $F>0$.

Значение $\beta=-1$ при $N=0$ соответствует "конфузорному" участку (с возрастающей вниз по потоку течения толщиной жидкой пленки), значение $\beta=1$ — "диффузорному" участку.

Принимая в качестве масштабов скалярных величин ξ, Φ, Ω, T не определенные пока постоянные величины ξ, Φ^0, Ω^0, a^0, $\mu^* T^*$, приведем систему (2.1) к безразмерной форме:

$$\bar\xi=\frac{\xi}{\xi^0},\quad \bar\Phi=\frac{\Phi}{\Phi^0},\quad \bar\Omega=\frac{\Omega}{\Omega^0},\quad \bar\theta=\frac{T-T_\infty}{T^*},\quad \bar\mu=\frac{\mu}{\mu^*},\quad \bar a=\frac{a}{a^0},$$

где черта сверху соответствует безразмерным переменным; μ^* — вязкость расплава при некоторой температуре T^*; $a=\lambda/(\rho c)$ — температуропроводность; T_∞ — температура в непрогретом материале. Тогда система (1.1) принимает вид

$$\frac{\bar\Phi}{2}-\frac{\bar\xi}{4}\,\frac{d\bar\Phi}{d\bar\xi}+\frac{\Omega^0}{\xi^0\Phi^0}\,\frac{d\bar\Omega}{d\bar\xi}=0,\qquad \frac{d}{d\bar\xi}\Big(\bar\mu\,\frac{d\bar\Phi}{d\bar\xi}\Big)\Big(\frac{\Phi^0\mu^*}{(\xi^0)^2}\Big)=\frac{1}{\beta},$$

$$\Big[\bar\Omega-\frac{\bar\xi\bar\Phi}{4}\,\frac{\Omega^0}{\xi^0\Phi^0}\Big]\frac{d\bar\theta}{d\bar\xi}=\frac{a^0}{\xi^0\Omega^0}\,\frac{d}{d\bar\xi}\Big(\bar a\,\frac{d\bar\theta}{d\bar\xi}\Big).$$

Полагая

$$\frac{\Omega^0}{\xi^0\Phi^0}=1,\qquad \frac{a^0}{\xi^0\Omega^0}=1,\qquad \frac{\Phi^0\mu^*}{(\xi^0)^2}=1$$

и выражая эти параметры через a^0 и μ^*, получаем

$$\Phi^0=\Big(\frac{a^0}{\mu^*}\Big)^{1/2},\qquad \Omega^0=\frac{(a^0)^{3/4}}{(\mu^*)^{1/4}},\qquad \xi^0=(a^0\mu^*)^{1/4}.$$

С учетом этого H_2-решение запишем в виде

$$u=(\beta\,\overline{\omega\chi}\,\bar F)^{1/2}\Big(\frac{aP_{e0}}{\mu^*}\Big)^{1/2}\bar\Phi(\bar\xi),$$

$$v=\frac{(a^0)^{3/4}}{(\mu^*)^{1/4}}\Big(\frac{P_{e0}}{R^2}\Big)^{1/4}\Big[\Big(\frac{\beta\bar F}{\overline{\omega\chi}}\Big)^{1/4}\bar\Omega(\bar\xi)-\frac{(\overline{\omega\chi}\,\beta\bar F)^{1/2}}{4}\Big(\frac{\overline{\omega\chi}}{\beta\bar F}\Big)^{1/4}\bar\xi\bar\alpha\bar\Phi(\bar\xi)\Big], \tag{2.2}$$

$$T=T^*\bar\theta+T_\infty,$$

где

$$\overline{\omega\chi}=\frac{\omega\chi}{R}=\frac{1}{|\bar F|^{1/3}|\bar r^k|^{4/3}}\int\limits_0^{\bar x}|\bar F|^{1/3}\,|\bar r^k|^{4/3}\,d\bar t,\quad \bar r^k=\frac{r^k}{R},\quad \bar\alpha=\frac{4}{3}\Big(\frac{\bar F''}{\bar F}+\frac{(\bar r^k)'}{\bar r^k}\Big).$$

С учетом наличия пленки расплава и твердого материала (см. рис. 2) редуцированные дифференциальные уравнения (1.4) в окрестности точки торможения принимают вид

$$\frac{\bar\Phi}{2}-\frac{\bar\xi}{4}\,\frac{d\bar\Phi}{d\bar\xi}+\frac{d\bar\Omega}{d\bar\xi}=0,\qquad \frac{d}{d\xi}\Big(\mu\,\frac{d\Phi}{d\xi}\Big)=\frac{1}{\beta},$$

$$\Big(\bar\Omega-\frac{1}{4}\,\bar\xi\bar\Phi\Big)\,\frac{d\bar\theta}{d\bar\xi}=\frac{d}{d\bar\xi}\Big(\bar a\,\frac{d\bar\theta}{d\bar\xi}\Big), \tag{2.3}$$

$$\bar\Omega_m\,\frac{d\bar\theta_1}{d\bar\xi}=\frac{d}{d\bar\xi}\Big(\bar a_1\,\frac{d\bar\theta_1}{d\bar\xi}\Big),\qquad \bar\xi_\delta<\bar\xi<\infty.$$

Величина трения в окрестности точки торможения определяется с помощью аналогии Рейнольдса [4]: $\tau_w = (\alpha/c_p)_0 u_e(x)\,\mathrm{Pr}^{2/3}$ (Pr — число Прандтля).

При

$$\bar F = \frac{d\bar P_e}{d\bar x} - \bar N, \quad \bar P_e = \frac{P_e}{P_{e0}}, \quad \bar r^k(\bar x) = \bar x, \quad \bar P_e = 1 - \bar x^2$$

функции (2.2) принимают вид

$$\bar\omega\bar\chi = \frac{3}{8}\,\bar x, \quad (\bar\omega\bar\chi\beta\bar F)^{1/2} = \frac{\sqrt{3}}{2}\,\bar x, \quad \frac{\bar\omega\bar\chi}{\beta\bar F} = \frac{\sqrt[4]{3}}{2}.$$

В окрестности точки торможения ($x = 0$, $y = 0$) в газообразном пограничном слое примем

$$N = 0, \qquad u_e = x\,\frac{du_e}{dx}, \qquad r^k(x) = x,$$

$$\Big(\frac{\alpha}{c_p}\Big)_w = \Big(\frac{\alpha}{c_p}\Big)_0 = \mathrm{const}, \qquad \tau_w = \Big(\frac{\alpha}{c_p}\Big)_0 x\Big(\frac{du_e}{dx}\Big)_0 \mathrm{Pr}^{2/3},$$

$$\Big(\frac{\alpha}{c_p}\Big)_0 = \frac{q_0}{I_{e0} - I_w} \approx 0{,}7\sqrt{\rho_{e0}\mu_{e0}\Big(\frac{du_e}{dx}\Big)_0}\,(\mathrm{Pr}_{e0})^{-2/3},$$

$$\tau_0 \approx \frac{1}{I_{e0} - I_w}\,q_0\Big(\frac{du_e}{dx}\Big)_0 x(\mathrm{Pr}_e)^{2/3},$$

где

$$\Big(\frac{du_e}{dx}\Big)_0 = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{2P_{e0}}{\rho_{e0}}}.$$

Для определения давления P_{e0}, плотности ρ_{e0}, температуры торможения T_{e0}, энтальпии I_{e0} за прямым скачком уплотнения на внешней границе пограничного слоя используем формулы из работы [7], которые могут быть применены в потоке со сравнительно небольшими сверхзвуковыми скоростями, когда изменение удельных теплоемкостей ($K = c_p/c_v$) в сжатом газе пренебрежимо мало (этим скоростям приблизительно соответствуют числа Маха $\mathrm{M} \leqslant 6$):

$$P_{e0} = P_\infty \frac{166{,}7\,\mathrm{M}_\infty^2}{(7 - 1/\mathrm{M}_\infty^2)^{2{,}5}}, \qquad \rho_{e0} = \rho_\infty\Big(1 + 5\,\frac{P_{e0}/P_\infty - 1}{P_{e0}/P_\infty + 6}\Big),$$

$$T_{e0} = T_\infty\Big(1 + \frac{K-1}{2}\,\mathrm{M}_\infty^2\Big), \qquad I_{e0} = I_\infty\Big(1 + \frac{K-1}{2}\,\mathrm{M}_\infty^2\Big).$$

3. Аналитическое решение редуцированной задачи о плавлении кристаллических материалов. С учетом наличия пленки расплава и твердого материала (см. рис. 1) решения (2.2) в точке торможения принимают вид

$$u = \frac{\sqrt{3}}{2}\,\Big(\frac{a^0 P_{e0}}{\mu^*}\Big)^{1/2} \bar x\bar\Phi(\bar\xi),$$
$$v = \frac{(a^0)^{3/4}}{(\mu^*)^{1/4}}\Big(\frac{P_{e0}}{R^2}\Big)^{1/4}\Big[\frac{2}{\sqrt[4]{3}}\,\bar\Omega(\bar\xi) - \frac{\sqrt{27}}{6}\,\bar\xi\bar\Phi(\bar\xi)\Big], \tag{3.1}$$
$$T = T^*\bar\theta(\bar\xi), \qquad T_1 = T^*\bar\theta_1(\bar\xi).$$

Здесь

$$\bar\xi = \Big(\frac{P_{e0}}{R^2}\Big)^{1/4}\frac{2}{\sqrt[4]{3}}\,\frac{1}{(\mu^* a^0)^{1/4}}\,y.$$

Решения системы (2.3) при постоянных теплофизических свойствах кристаллических материалов записываются в виде

$$\bar{\Phi} = \frac{1}{2\bar{\mu}\beta}\,\bar{\xi}^2 + C_1\bar{\xi} + C_2, \qquad \bar{\Omega} = -\frac{1}{8}\,C_1\bar{\xi}^2 - \frac{1}{2}\,C_2\bar{\xi} + C_3,$$

$$\bar{\theta} = C_4 + C_5 \int\limits_0^{\bar{\xi}} \exp\Big(\frac{1}{a}\int\limits_0^{\xi}\Big(\bar{\Omega} - \frac{1}{4}\,\bar{\xi}\bar{\Phi}\Big)\,dt\Big)\,dt,$$

$$\bar{\Omega} - \frac{1}{4}\,\bar{\xi}\bar{\Phi} = \frac{1}{8\bar{\mu}\beta}\,\bar{\xi}^3 - \frac{3}{8}\,C_1\bar{\xi}^2 - \frac{1}{2}\,C_2\bar{\xi} + C_3, \tag{3.2}$$

$$\bar{\theta}_1 = C_6\exp\Big(\frac{\bar{\Omega}_m}{\bar{a}_1}\,(\bar{\xi} - \bar{\xi}_\delta)\Big) + C_7 \qquad (\bar{\Omega}_m < 0),$$

где

$$\bar{\xi}_\delta = \Big(\frac{P_{e0}}{R^2}\Big)^{1/4}\,\frac{2}{\sqrt[4]{3}}\,\frac{1}{(\mu^* a^0)^{1/4}}\,\delta, \qquad \bar{\Omega}_m(\bar{\xi}_\delta) = -\frac{1}{8}\,C_1\bar{\xi}_\delta^2 - \frac{1}{2}\,C_2\bar{\xi}_\delta + C_3.$$

В решениях (3.2) константы интегрирования определяются из (1.3):

$$C_1 = \frac{1}{\sqrt[4]{3}\,(a^0)^{1/4}(P_{e0})^{3/4}\mu_w(T_w)}\,R^{3/2}(\mu^*)^{3/4}\Big(\frac{\alpha}{c_p}\Big)_0\Big(\frac{du_e}{dx}\Big)_0\mathrm{Pr}^{2/3}, \qquad C_2 = -\frac{1}{\bar{\mu}\beta}\,\bar{\xi}_\delta^2 + C_1\bar{\xi}_\delta,$$

$$C_3 = -G_w\,\frac{\sqrt[4]{3}}{2}\,\Big(\frac{R^2}{P_{e0}}\Big)^{1/4}\,\frac{(\mu_w)^{1/4}}{\rho(a_0)^{3/4}}, \qquad C_4 = \frac{T_w}{T_*},$$

$$C_5 = \frac{T_m - T_w}{T_*} \Big/ \int\limits_0^{\bar{\xi}_\delta}\exp\Big(\frac{1}{\bar{a}}\int\limits_0^{t}\Big(\bar{\Omega} - \frac{1}{4}\,t\bar{\Phi}\Big)\,dt\Big), \qquad C_6 = \frac{T_\infty}{T_*}, \qquad C_7 = \frac{T_m - T_\infty}{T_*}.$$

Подставляя решения (3.1) в уравнения баланса тепла:

$$y = 0: \qquad -\Big(\lambda\,\frac{\partial T}{\partial y}\Big)_w - G_w\Delta Q_w + \varepsilon\sigma T_w^4 = q_w,$$

$$y = \delta: \qquad \Big(\lambda\,\frac{\partial T}{\partial y}\Big)_{\delta-0} = \Big(\lambda_1\,\frac{\partial T_1}{\partial y}\Big)_{\delta+0} + H\rho_1 v_m(\delta),$$

получаем

$$-\lambda(T_m - T_w)\Big/\int\limits_0^{\bar{\xi}_\delta}\exp\Big(\frac{1}{\bar{a}}\int\limits_0^{t}\Big(\bar{\Omega} - \frac{1}{4}\,t\bar{\Phi}\Big)\,dt\Big) - G_w\Delta Q_w + \varepsilon\sigma T_w^4 = \Big(\frac{\alpha}{c_p}\Big)_w(J_e - J_w),$$

$$G_w = -\rho v_w, \tag{3.3}$$

$$\lambda(T_m - T_w) = \Big(-\frac{1}{8}\,C_1\bar{\xi}_\delta^2 - \frac{1}{2}\,C_2\bar{\xi}_\delta + C_3\Big)\Big(\lambda_1(T_m - T_\infty)\exp\Big(\frac{1}{\bar{a}_1}\,\bar{\Omega}(\bar{\xi}_\delta)\Big) + H\rho_1 a^0\Big).$$

Из уравнений (3.3) находим толщину пленки расплава δ и температуру T_w.

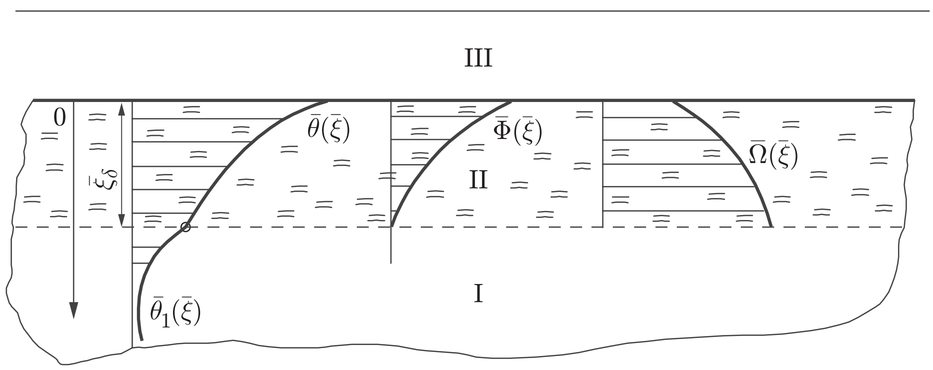

Рис. 3. Решение задачи о плавлении кристаллического материала:
I — исходный материал, II — пленка расплава, III — газовый пограничный слой

Основная характеристика, определяющая скорость уноса массы в расплавленном виде, в окрестности точки торможения находится по формуле

$$G_\Sigma \equiv \rho v_m = \frac{(a^0)^{3/4}}{(\mu^*)^{1/4}} \Big(\frac{P_{e0}}{R^2}\Big)^{1/4} \frac{2}{\sqrt[4]{3}}\, \bar\Omega_m(\bar\xi_\delta),$$

где

$$\bar\Omega_m(\bar\xi_\delta) = -\frac{1}{8}\, C_1 \bar\xi_\delta^2 - \frac{1}{2}\, C_2 \bar\xi_\delta + C_3, \qquad \bar\xi_\delta = \Big(\frac{P_{e0}}{R^2}\Big)^{1/4} \frac{2}{\sqrt[4]{3}}\, \frac{1}{(\mu^* a^0)^{1/4}}\, \delta,$$

C_1, C_2, C_3 определены выше.

Эпюры решения (3.1) представлены на рис. 3.

Заключение. В отличие от решений, предложенных в работах [4, 8, 9], при решении уравнений в данной работе выполнено следующее.

1. Исходная система уравнений в частных производных сведена к обыкновенным дифференциальным уравнениям с соответствующими граничными условиями и получены аналитические решения для аморфных и кристаллических материалов.

2. При построении решения не использовалось допущение о постоянстве скорости пленки расплава, так как при решении уравнения энергии учитывается не только поперечная v, но и продольная u скорость течения пленки расплава.

Вследствие сказанного выше основное соотношение, определяющее унос массы аморфных материалов (полиэтилена) в расплавленном виде, отличается от соотношения, полученного в работе [8]. В частности, скорость уноса массы на 15–20 % больше, чем в работах [3, 8].

ЛИТЕРАТУРА

1. **Лойцянский Л. Г.** Ламинарный пограничный слой. М.: Физматгиз, 1962.
2. **Саттон Г.** Гидродинамика и теплообмен оплавляющейся поверхности // Вопр. ракет. техники. 1958. № 5. С. 37–46.
3. **Полежаев Ю. В.** Тепловая защита / Ю. В. Полежаев, Ф. Б. Юревич. М.: Энергия, 1976.
4. **Бетс Г., Адамс М.** Теория абляции стекловидных материалов // Вопр. ракет. техники. 1960. № 2. С. 63–79.

5. **Дружинин Г. В.** Базисные функции в приближенных решениях краевых задач / Г. В. Дружинин, И. М. Закиров, Н. М. Бодунов. Казань: Изд-во "Фен", 2000.
6. **Овсянников Л. В.** Групповой анализ дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978.
7. **Мхитарян А. М.** Аэродинамика. М.: Машиностроение, 1970.
8. **Горский В. В., Полежаев Ю. В.** О некоторых особенностях, связанных с течением пленки расплава // Теплофизика высоких температур. 1966. Т. 4, № 2. С. 218–227.
9. **Лиз Л.** Параметры подобия в процессе оплавления поверхностей носовой части затупленных тел в высокоскоростном потоке газа // Вопр. ракет. техники. 1960. № 1. С. 40–61.

Поступила в редакцию 16/VIII 2012 г.,
в окончательном варианте — 1/II 2013 г.