

# О СТРУКТУРЕ СОПРЯЖЕННЫХ СКАЧКОВ НАСЫЩЕННОСТИ И КОНЦЕНТРАЦИИ В ЗАДАЧАХ ВЫТЕСНЕНИЯ НЕФТИ РАСТВОРОМ АКТИВНОЙ ПРИМЕСИ

О. М. Алишаева, В. М. Ентов, А. Ф. Зазовский

(Москва)

В работах [1—5] рассмотрено общее описание процессов вытеснения нефти раствором активной примеси как в основном случае наличия одного активного фактора, так и в более сложных ситуациях. При этом центральную роль играет возможность построения решения в крупномасштабном приближении, т. е. в пренебрежении диффузионными процессами различной физической природы (капиллярность, собственно диффузия, теплопроводность). Эти процессы существенно влияют на решение лишь в зонах резкого изменения переменных, которым в крупномасштабном приближении отвечают скачки. Ниже исследуется тонкая структура переходных зон. Результаты такого исследования могут оказаться полезными для оценки пределов применимости крупномасштабного приближения и времени разрушения оторочек активной примеси, а также для отработки численных и приближенных методов расчета.

**1. Формулировка задачи. Внешнее решение.** Рассмотрим одномерное фронтальное вытеснение нефти раствором активной примеси. Запишем уравнения закона фильтрации фаз ( $i = 1$  — вода;  $i = 2$  — нефть) и сохранения в потоке воды, нефти и примеси, считая массовые концентрации примеси в воде  $c$  и нефти  $\varphi$  малыми, а пористость  $m$ , проницаемость  $k$  и плотности фаз  $\rho_1$  и  $\rho_2$  постоянными:

$$(1.1) \quad \begin{aligned} u_i &= -(kf_i(s, c)/\mu_i(c))\partial p_i/\partial x \quad (i = 1, 2), \\ p_2 - p_1 &= p = \gamma(c)J(s), \\ m\partial s/\partial t + \partial u_1/\partial x &= 0, \quad -m\partial s/\partial t + \partial u_2/\partial x = 0, \\ m \frac{\partial}{\partial t} [\kappa cs + \varphi(c)(1-s) + a(c)] + \frac{\partial}{\partial x} [\kappa cu_1 + \varphi(c)u_2] &= \frac{\partial}{\partial x} \left( D \frac{\partial c}{\partial x} \right). \end{aligned}$$

Здесь  $s$  — водонасыщенность;  $m\rho_2 a$  — масса сорбированной примеси в единице объема пористой среды;  $f_i$ ,  $\mu_i$ ,  $p_i$  — фазовая проницаемость, вязкость и давление в  $i$ -й фазе;  $D$  — коэффициент диффузии примеси;  $p$  — капиллярное давление, зависимость которого от поверхностного натяжения учитывается коэффициентом  $\gamma(c)$ ;  $J$  — функция Леверетта;  $x$  — координата;  $t$  — время;  $\kappa = \rho_1/\rho_2$ .

Введем безразмерные переменные

$$\begin{aligned} x' &= x/L, \quad t' = u_0 t/L, \quad u'_i = u_i/u_0, \quad p'_i = p_i/\Delta p, \quad u_0 = k\Delta p/\mu_1(0)L, \\ \mu'_i &= \mu_i/\mu_1(0), \quad D' = D/D_0, \quad \gamma'(c) = \gamma(c)/\gamma(0), \quad \varepsilon = \gamma(0)/\Delta p, \quad v = D_0/u_0 L, \end{aligned}$$

где  $L$ ,  $\Delta p$ ,  $D_0$  — характерные значения размера области течения, внешнего перепада давления и коэффициента диффузии.

Опуская далее штрихи при безразмерных переменных, исключая из системы (1.1) давления и считая суммарный объемный расход  $U = u_1 + u_2$  постоянным, получим

$$(1.2) \quad \begin{aligned} m \frac{\partial s}{\partial t} + U \frac{\partial F}{\partial x} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial x} (\Phi \Omega) &= 0, \quad F = f_1/(f_1 + f_2\mu_1/\mu_2), \quad \Phi = Ff_2/\mu_2, \\ m \frac{\partial}{\partial t} [s(\kappa c - \varphi) + \varphi + a] + U \frac{\partial}{\partial x} [F(\kappa c - \varphi) + \varphi] + \varepsilon \frac{\partial}{\partial x} [(\kappa c - \varphi)\Phi\Omega] &= \\ &= v \frac{\partial}{\partial x} \left( D \frac{\partial c}{\partial x} \right), \end{aligned}$$

$$\Omega = \gamma J' \partial s / \partial x + \gamma' J \partial c / \partial x, \quad \gamma' = d\gamma/dc, \quad J' = dJ/ds;$$

$$(1.3) \quad s(x_2, 0) = s_0, \quad c(x, 0) = c_0, \quad s(0, t) = s^0, \quad c(0, t) = c^0.$$

Полагая в (1.2)  $\varepsilon = \nu = 0$ , получим задачу, соответствующую крупномасштабному приближению [1]:

$$(1.4) \quad m \frac{\partial s}{\partial t} + U \frac{\partial F}{\partial x} = 0, \quad m \frac{\partial}{\partial t} [s(\kappa c - \varphi) + \varphi + a] + U \frac{\partial}{\partial x} [F(\kappa c - \varphi) + \varphi] = 0, \\ s(x, 0) = s_0, \quad c(x, 0) = c_0 (x \geq 0), \quad s(0, t) = s^0, \quad c(0, t) = c^0 (t > 0).$$

Пусть для определенности  $c^0 > c_0$ . Задача (1.4) имеет автомодельное решение [1—5]  $s = s(\xi)$ ,  $c = c(\xi)$ ,  $\xi = mx/Ut$ , которое будем считать построенным. Как правило, оно содержит скачки, на которых выполняются интегральные законы сохранения ( $V$  — скорость скачка):

$$(1.5) \quad \xi_j [s] = [F], \quad \xi_j \{s^\pm + [\varphi + a]/[\kappa c - \varphi]\} = F^\pm + [\varphi]/[\kappa c - \varphi], \\ \xi_j = mV/U, \quad [f] = f^+ - f^-, \quad f^\pm = f(\xi_j \pm 0).$$

Дополнительное условие устойчивости скачков сводится к требованию (это условие будет уточнено ниже), что число безразмерных характеристических скоростей за и перед скачком, для которых выполняются неравенства

$$(1.6) \quad \xi_i(s^-, c^-) \geq \xi_j, \quad \xi_k(s^+, c^+) \leq \xi_j \quad (i, k = 1, 2),$$

равно трем. Здесь  $\xi_i$  ( $i = 1, 2$ ) — безразмерные характеристические скорости системы (1.4). Характеристики системы (1.4)  $dx/dt = (U/m) \xi_i^\pm$  ( $i = 1, 2$ ), удовлетворяющие неравенствам (1.6), называются приходящими на скачок, остальные — уходящими.

Методика построения автомодельного решения развита в [1—5], так что внешнее решение задачи вытеснения, соответствующее  $\varepsilon = \nu = 0$ , можно считать известным.

**2. Внутреннее решение.** Поскольку структура  $s$ -скачков хорошо известна [6, 7], исследуем структуру сопряженных  $s, c$ -скачков. Для построения внутреннего решения в окрестности  $s, c$ -скачка перейдем в уравнениях (1.2) к системе координат, движущейся вместе со скачком ( $\eta = (x - Vt)/\varepsilon$ ,  $\tau = t$ ), и будем искать нетривиальное стационарное решение системы:

$$(2.1) \quad \left( \frac{m}{U} \frac{\partial}{\partial \tau} - \xi_j \frac{\partial}{\partial \eta} \right) s + \frac{\partial F}{\partial \eta} + \frac{1}{U} \frac{\partial}{\partial \eta} (\Phi \Omega) = 0, \quad \Omega = \gamma J' \frac{\partial s}{\partial \eta} + \gamma' J \frac{\partial c}{\partial \eta}, \\ \left( \frac{m}{U} \frac{\partial}{\partial \tau} - \xi_j \frac{\partial}{\partial \eta} \right) [s(\kappa c - \varphi) + \varphi + a] + \frac{\partial}{\partial \eta} [F(\kappa c - \varphi) + \varphi] + \\ + \frac{1}{U} \frac{\partial}{\partial \eta} [(\kappa c - \varphi) \Phi \Omega] = \frac{\nu}{\varepsilon U} \frac{\partial}{\partial \eta} \left( D \frac{\partial c}{\partial \eta} \right),$$

удовлетворяющее условиям сращивания

$$(2.2) \quad s(\pm \infty) = s^\pm, \quad c(\pm \infty) = c^\pm.$$

При  $\partial s / \partial \tau = \partial c / \partial \tau = 0$ , интегрируя (2.1) с учетом (2.2), получим

$$(2.3) \quad ds/d\eta = -H[BY + (c - c^-)Z]/G, \quad dc/d\eta = H(c - c^-)Z,$$

$$Z(c) = F^-(\kappa - \delta\varphi) + \delta\varphi - \xi_j [s^-(\kappa - \delta\varphi) + \delta\varphi + (a - a^-)/(c - c^-)];$$

$$(2.4) \quad \delta\varphi = (\varphi - \varphi^-)/(c - c^-), \quad Y(s, c) = F - F^- - \xi_j(s - s^-),$$

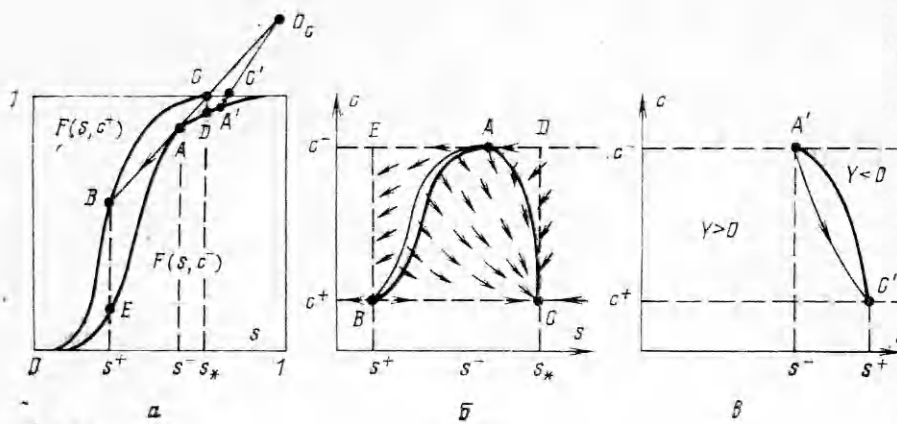
$$H(s, c) = \varepsilon U / \nu D, \quad G(s, c) = \gamma J' / \gamma' J, \quad B(s, c) = \nu D / \varepsilon \gamma' J \Phi.$$

Уравнениям (2.3) в фазовой плоскости  $s, c$  соответствует уравнение

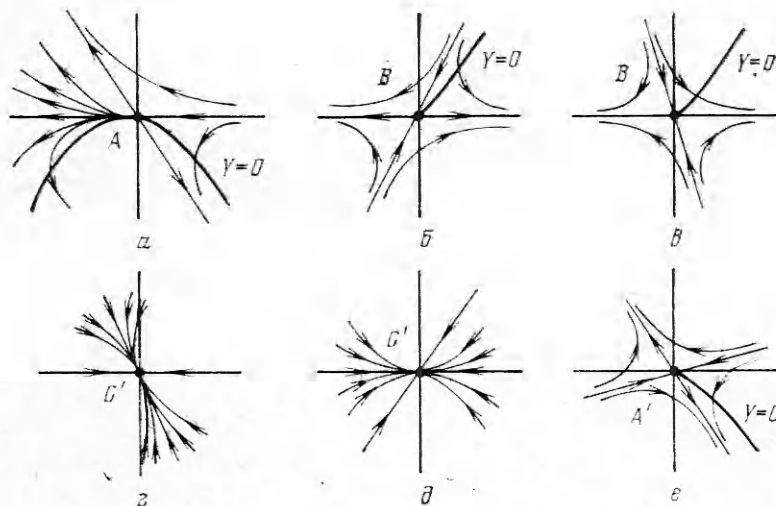
$$(2.5) \quad dc/ds = -G(s, c)(c - c^-)Z(c)/[(c - c^-)Z(c) + B(s, c)Y(s, c)].$$

Из соотношений на скачках (1.5) следует, что  $Z(c^+) = Y(s^\pm, c^\pm) = 0$ , так что точки  $(s^-, c^-)$  и  $(s^+, c^+)$  фазовой плоскости являются особыми точками уравнения (2.5).

Внутренняя структура сопряженных  $s, c$ -скачков, как будет показано ниже, тесно связана с условиями их устойчивости и с глобальной структурой



Ф и г. 1



Ф и г. 2

турой решения в целом. Последняя при фиксированных значениях  $c^0$ ,  $c_0$  и  $s^0 = 1$  полностью определяется видом функций  $F(s, c)$ ,  $\varphi(c)$ ,  $a(c)$  и значением начальной водонасыщенности  $s_0$  [1]. Ограничимся пока случаем полных скачков концентрации, когда  $c^- = c^0$ ,  $c^+ = c_0$ . Подобная ситуация имеет место, например, если  $\varphi_{,cc} \leq 0$ ,  $a_{,cc} \leq 0$  [1].

Функцию  $F_{,c} = \partial F / \partial c$  далее будем считать знакопостоянной. При  $F_{,c} \leq 0$  в зависимости от значения  $s_0$  возможны два типа сопряженных  $s$ ,  $c$ -скачков: а) скачок  $AB$  при  $s_0 \leq s_*$ , когда  $[s] < 0$ , б) скачок  $A'C'$  при  $s_0 > s_*$ , на котором  $[s] > 0$ . Для них имеем соответственно

$$(2.6) \quad \xi_1^- = \xi_j < \xi_1^+, \xi_2^+ < \xi_j < \xi_2^-, \xi_1^\pm < \xi_j, \xi_2^+ < \xi_j < \xi_2^-.$$

На фиг. 1, а  $O_c = (-[\varphi + a]/[\kappa c - \varphi], -[\varphi]/[\kappa c - \varphi])$ ; отрезок прямой  $O_c C$  касается в точке  $A$  кривой  $F(s, c^-)$ , а точке  $C$  соответствует значение  $s = s_*$ .

Рассмотрим сначала скачок  $AB$ . Построение удобно перенести в фазовую плоскость  $s, c$  (фиг. 1, б). Кривым  $F(s, c^\pm)$  соответствуют отрезки прямых  $c = c^\pm$ , а отрезку прямой  $BAC$  в плоскости  $s, F$  — кривая  $BAC$ , вдоль которой  $Y(s, c) = 0$ , причем выше  $BAC$   $Y < 0$  и ниже  $-Y > 0$ . В силу условий (1.5), (2.6)  $Z(c^+) = 0$  и  $Z(c^-) > 0$ . При  $\gamma'(c) < 0$  (примесь снижает межфазное натяжение)  $B(s, c) < 0$ , и если  $Z(c) \geq 0$  в полосе  $c^+ < c < c^-$ , то уравнение (2.5) не имеет в этой полосе других особых точек, кроме  $A$ ,  $B$  и  $C$ . Для структуры искомого вида должна существовать траектория,

соединяющая точки  $A$  и  $B$ . Чтобы определить тип особых точек, достаточно воспользоваться неравенствами  $J'(s) < 0$ ,  $G > 0$ ,  $B < 0$  и условиями (1.5), (2.6), в соответствии с которыми

$$F_{,s}(s_*, c^+) < \xi_j = F_{,s}^+ < F_{,s}^+, A^+ < 0, A^- > 0,$$

$$A(c) = \frac{d}{dc} [(c - c^-) Z(c)] = F^\pm (\kappa - \varphi, c) + \varphi, c - \xi_j [s^\pm (\kappa - \varphi, c) + \varphi, c + a_{,c}].$$

Можно убедиться, что точка  $B = (s^+, c^+)$  — простое седло, точка  $C = (s_*, c^+)$  — простой узел, а точка  $A = (s^-, c^-)$  — двукратный седло-узел с одним узловым сектором и двумя седловыми. Качественная картина в окрестностях этих точек показана на фиг. 2. Отличные от нуля угловые коэффициенты траекторий, проходящих через особые точки, определяются соотношением

$$(2.7) \quad k_1 = [AG + B(F_{,s} - \xi_j)] / (A + BF_{,c}),$$

поэтому  $k_1(s^-, c^-) < 0$  (фиг. 2, а). Знаки  $k_1(s^+, c^+)$  и  $k_1(s_*, c^+)$  не устанавливаются однозначно. Но так как  $|B(s, c)| \gg 1$ , то можно считать, что знаки числителя и знаменателя (2.7) будут определяться величиной  $B(s, c)$ , и тогда  $k_1(s^+, c^+) > 0$ ,  $k_1(s_*, c^+) < 0$  (фиг. 2, б, в).

Асимптотика траекторий узлового пучка, выходящих из точки  $A$ , имеет вид

$$c - c^- \sim -c^* \exp [R / (s - s^-)] (s - s^-)^2, R = 2G^- A^+ / (B^- F_{,ss}^-) > 0.$$

Искомая траектория существует и единственна; это сепаратриса седла  $B$ , принадлежащая узловому пучку точки  $A$ . Она проходит над изоклиной бесконечности.

Интегрируя уравнения (2.3) в окрестностях точек  $A$  и  $B$ , находим

$$(2.8) \quad s - s^- \sim 2(G^- / B^- H^- F_{,ss}^-) \eta^{-1}, c - c^- \sim \text{const } \eta^{-2} e^{-\chi^- \eta}, \chi^\pm = \\ = -H^\pm A^\pm, \eta \rightarrow \pm \infty,$$

$$s - s^+ \sim \text{const } e^{-\chi^+ \eta}, c - c^+ \sim \text{const } e^{-\chi^+ \eta} = k_1(s^+, c^+) (s - s^+).$$

При  $\varphi(c) \equiv 0$   $\chi^\pm = \xi_j (eU / \nu D^\pm) (a_{,c}^\pm - [a] / [c])$ , т. е. ширина переходной зоны перед скачком  $1/\chi^+$  и скорость убывания концентрации за скачком пропорциональны скорости скачка  $\xi_j$  и зависят исключительно от кривизны изотермы сорбции и коэффициента диффузии примеси  $D(c)$ . В общем случае величина  $\chi^+$  пропорциональна разности  $\xi_2^+ - \xi_j$ . За скачком выход концентрации на значение, отвечающее внешнему решению, происходит экспоненциальным образом, а насыщенность изменяется более медленно (по степенному закону). Последнее обстоятельство при численном счете может проявляться в отставании фронта насыщенности от фронта концентрации примеси и в большем его размазывании.

Рассмотрим теперь структуру скачка  $A'C'$  (фиг. 1, а, в), соответствующего довытеснению нефти после обводнения месторождения. В этом случае точка  $A' = (s^-, c^-)$  — простое седло (фиг. 2, в), точка  $C' = (s^+, c^+)$  — простой узел (фиг. 2, в, д) и искомая траектория является сепаратрисой седла  $A'$ , принадлежащей узловому пучку, входящему в точку  $C'$  (фиг. 1, в). Угловой коэффициент траекторий узлового пучка зависит от знака величины  $K = A^+ G^+ + B^+ (F_{,s}^+ - \xi_j)$ .

Интегрируя уравнения (2.3) в окрестностях точек  $A'$  и  $C'$ , при  $K > 0$  (фиг. 2, в) получим

$$s - s^\pm \sim \text{const } e^{-\chi^\pm \eta}, c - c^\pm \sim \text{const } e^{-\chi^\pm \eta} = k_1(s^\pm, c^\pm) (s - s^\pm), \chi^\pm = \\ = -H^\pm A^\pm, \eta \rightarrow \pm \infty.$$

При  $K < 0$  (фиг. 2, д) переменные перед скачком связаны соотношением  $c - c^+ \sim \text{const } |s - s^+|^q$ , где  $q = -A^+ G^+ / B^+ (F_{,s}^+ - \xi_j) > 1$ , и из-

меняются экспоненциально:

$$c - c^+ \sim \text{const } e^{-\chi^+ \eta}, \quad s - s^+ \sim \text{const } e^{-(\chi^+/q) \eta}, \quad \eta \rightarrow \infty.$$

Так как  $q > 1$ , то для насыщенности выход на значение, отвечающее внешнему решению перед скачком, происходит медленнее, чем для концентрации.

Полученные результаты показывают, что для скачка  $[s] < 0$  из точки  $A'$ , не удовлетворяющего условию  $\xi_j = F_{,s}^-$ , внутренней структуры не существует (два седла не имеют, вообще говоря, общей сепаратрисы). Кроме того, при построении искомой траектории предполагалось, что для всех  $s$  и  $c$  из прямоугольника  $E$ , ограниченного прямыми  $s = s^\pm$ ,  $c = c^\pm$ , выполняются неравенства

$$(2.9) \quad \min(c^+, c^-) \leq w(s) \leq \max(c^+, c^-), \quad Y(s, w(s)) = 0, \quad (c - c^-)Z(c) \leq 0,$$

причем равенства реализуются только в точках  $(s^\pm, c^\pm)$ . Условия (2.9) гарантируют отсутствие особых точек уравнения (2.3) в  $E$ , отличных от двух вершин  $(s^\pm, c^\pm)$ . Нарушение условий (2.9) даже при выполнении соотношений (2.6) для характеристических скоростей приводит к несуществованию внутренней структуры. Действительно, если  $Z(c)$  меняет знак при  $c^+ \leq c \leq c^-$ , то, согласно (2.3), распределение концентрации в переходной зоне становится многозначным. Нарушение первого условия (2.9) также приводит к неоднозначности  $s(\eta)$  и (или)  $c(\eta)$ . Второе неравенство (2.9) позволяет обосновать процедуру построения  $c$ -перехода автомодельного решения для произвольных возрастающих функций  $a(c)$  и  $\varphi(c)$  при  $\varphi(c) = \varphi_0 c$  или  $a(c) \equiv 0$  путем построения их выпуклых (вогнутых) оболочек на заданном интервале изменения концентрации [1]. Таким образом, (2.9) следует рассматривать как уточненное (по отношению к (1.6)) условие устойчивости  $s$ ,  $c$ -скачков. Для  $s$ -скачков при  $c = \text{const}$  подобное условие имеет вид  $Y(s, c)/(s - s^-) \geq 0$  и строго доказано в [8].

Аналогичным образом может быть проанализирована структура скачков при  $F_{,c} \geq 0$  (случай вредной примеси); для определенности будем считать, что  $a_{,cc} \leq 0$ ,  $\varphi_{,cc} \leq 0$ ,  $[c] < 0$ ,  $\gamma'(c) > 0$  и, следовательно,  $B > 0$ , а  $G < 0$ . Устойчивость такого скачка (фиг. 3, а) обеспечивается условиями (2.9) и соотношениями

$$(2.10) \quad \xi_1^- < \xi_j = \xi_1^+, \quad \xi_2^+ < \xi_j < \xi_2^-.$$

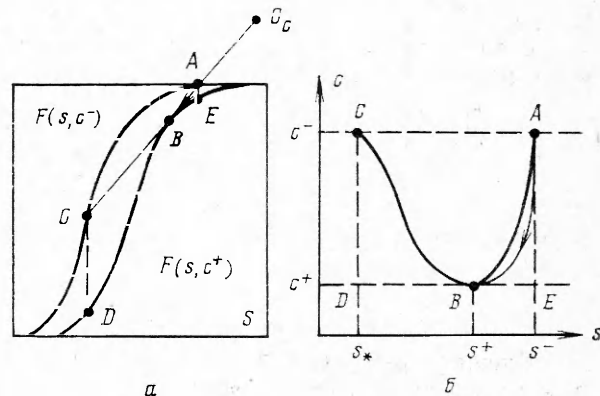
При этом точка  $A = (s^-, c^-)$  — простое седло,  $C = (s_*, c^+)$  — простой узел,  $B = (s^+, c^+)$  — простейший двукратный седло-узел с узловым сектором справа от прямой  $c - c^+ = -A^+ G^+(s - s^+)/(A^+ + B^+ F_{,c}^+)$  и двумя седловыми слева от нее, а искомая траектория является выходящей из седла  $A$  сепаратрисой, принадлежащей узловому пучку точки  $B$  (фиг. 3, б).

Асимптотика изменения переменных в стабилизированной зоне описывается соотношениями

(2.8), в которых индексы  $+$  и  $-$  меняются местами. Отставание насыщенности от концентрации примеси в этом случае наблюдается на переднем фронте стабилизированной зоны.

Установленные особенности внутренней структуры скачков сохраняются при  $[c] > 0$ ,  $a_{,cc} \geq 0$ ,  $\varphi_{,cc} \geq 0$ .

Для функций  $a(c)$  и  $\varphi(c)$  произвольного вида возможно существование



Ф и г 3

таких скачков, что знаки строгих неравенств между  $\xi_j$  и  $\xi_2^\pm$  в (2.6), (2.10) заменяются на знаки равенства [1]. Это приводит к усложнению типа особых точек в плоскости  $(s, c)$ , однако вид траекторий, соединяющих  $(s^-, c^-)$  и  $(s^+, c^+)$ , и глобальная топологическая картина в фазовой плоскости остаются прежними.

Рассмотрим в качестве примера скачок  $[c] < 0$ ,  $[s] < 0$  при  $F_{,c} \leq 0$  (фиг. 1, а, б). Пусть сначала реализуется условие устойчивости

$$(2.11) \quad \xi_1^- = \xi_j < \xi_1^+, \xi_2^+ = \xi_j < \xi_2^-.$$

Тип особой точки  $A$  и поле направлений в ее окрестности при этом не меняются. Вблизи точки  $B$  искомая траектория в первом приближении совпадает с изоклиной бесконечности и кривой  $Y(s, c) = 0$ . Порядок касания определяется порядком нуля  $\xi_2 - \xi_j$  в точке  $(s^+, c^+)$ ; при этом стремление  $s$  и  $c$  к предельным значениям  $s^+$  и  $c^+$  при  $\eta \rightarrow \infty$  из экспоненциального становится степенным.

Для скачка, удовлетворяющего условиям

$$(2.12) \quad \xi_1^- = \xi_j < \xi_1^+, \xi_2^+ < \xi_j = \xi_2^-,$$

изменяется лишь тип особой точки  $A = (s^-, c^-)$ . Траектории узлового пучка и изоклина бесконечности сливаются с параболой  $c - c^- = -(1/2)(F_{,ss}^-/F_{,c}^-)(s - s^-)^2$ , соответствующей кривой  $Y(s, c) = 0$  в окрестности точки  $A$ . Как и выше,  $s$  и  $c$  при  $\eta \rightarrow -\infty$  изменяются степенным образом.

При одновременной реализации равенств  $\xi_j = \xi_2^\pm$  в условиях (2.11), (2.12) указанные особенности распределений  $s$  и  $c$  в стабилизированной зоне проявляются одновременно. Искомая траектория приближается к кривой  $Y(s, c) = 0$ , если вдоль нее стремится к нулю разность  $\xi_2(s, c) - \xi_j$ .

**3. Структура контактного разрыва.** При  $\xi_2(s, c) = \xi_j$  (случай контактного разрыва [9]) система уравнений (2.3) не имеет решения требуемого вида. Подобная ситуация возникает при линейных изотермах  $a(c)$  и  $\varphi(c)$  и означает, что исходная система уравнений (1.2) не имеет решения типа бегущей волны. Это обстоятельство связано с появлением в задаче еще одного малого параметра, оказывающего определяющее влияние на размер стабилизированной зоны.

Анализ структуры скачка в этом случае оказывается не столь тривиальным. Рассмотрим его для линейных изотерм распределения примеси  $a(c) = a_0 c$ ,  $\varphi(c) = \varphi_0 c$ . Уравнения (1.2) в системе координат, связанной со скачком, после очевидных преобразований принимают вид

$$(3.1) \quad \frac{m}{U} \frac{\partial S}{\partial \tau} + \frac{\partial f}{\partial \eta} + \frac{\varepsilon}{U} \frac{\partial}{\partial \eta} (\Phi \Omega) = 0, \tau = t, \eta = x - Vt,$$

$$\frac{m}{U} S \frac{\partial c}{\partial \tau} + f \frac{\partial c}{\partial \eta} + \frac{\varepsilon}{U} \Phi \Omega \frac{\partial c}{\partial \eta} = \frac{v'}{U} \frac{\partial}{\partial \eta} \left( D \frac{\partial c}{\partial \eta} \right), v' = v/(\kappa - \varphi_0),$$

$$S = s + (\varphi_0 + a_0)/(\kappa - \varphi_0), f = F + \varphi_0/(\kappa - \varphi_0) - \xi_j S.$$

Считая далее  $S$  и  $f$  новыми неизвестными, а  $c$  известной функцией  $S$  и  $f$ , приведем второе уравнение (3.1) к виду

$$\frac{m}{U} S \frac{\partial f}{\partial \tau} + \delta S F_{,c} \frac{\partial f}{\partial \eta} + f L + \frac{\varepsilon}{U} [\Phi \Omega L + \delta S F_{,c} \frac{\partial}{\partial \eta} (\Phi \Omega)] =$$

$$= \frac{v'}{U} F_{,c} \frac{\partial}{\partial \eta} (DL/F_{,c}),$$

$$\Phi \Omega = M \partial S / \partial \eta + N \partial f / \partial \eta, M(S, f) = \Phi(\gamma J' - \delta \gamma' J), N(S, f) = \Phi \gamma' J / F_{,c},$$

$$L(S, f) = \partial f / \partial \eta - \delta F_{,c} \partial S / \partial \eta, \delta = (F_{,s} - \xi_j) / F_{,c}.$$

Внешнее разрывное решение удовлетворяет условиям  $f(\tau, \pm 0) = 0$ . Для построения главного члена внутреннего разложения положим

$$(3.2) \quad f = (\varepsilon/m\tau)^{1/2} f^0, \zeta = (m/\varepsilon\tau)^{1/2} \eta, \theta = \tau$$



и преобразуем полученные уравнения, сохраняя лишь члены одного порядка малости по  $\varepsilon$  и считая, что  $v'/\varepsilon = O(1)$ . При этом получим систему уравнений внутренней задачи:

$$\begin{aligned} \theta \frac{\partial S}{\partial \theta} - \frac{1}{2} \zeta \frac{\partial S}{\partial \zeta} + U \frac{\partial f^0}{\partial \zeta} + \frac{\partial}{\partial \zeta} \left( M \frac{\partial S}{\partial \zeta} \right) &= 0, \\ \delta \left[ U \left( S \frac{\partial f^0}{\partial \zeta} - f^0 \frac{\partial S}{\partial \zeta} \right) - M \left( \frac{\partial S}{\partial \zeta} \right)^2 + S \frac{\partial}{\partial \zeta} \left( M \frac{\partial S}{\partial \zeta} \right) \right] + \frac{v'}{\varepsilon} \frac{\partial}{\partial \zeta} \left( \delta D \frac{\partial S}{\partial \zeta} \right) &= 0. \end{aligned}$$

Искомая асимптотическая структура определяется ее стационарным решением

$$\begin{aligned} (3.3) \quad \frac{1}{2} \zeta \frac{dS}{d\zeta} - U \frac{df^0}{d\zeta} - \frac{d}{d\zeta} \left( M \frac{dS}{d\zeta} \right) &= 0, \\ \delta \left[ \left( \frac{1}{2} \zeta S - U f^0 \right) \frac{dS}{d\zeta} - M \left( \frac{dS}{d\zeta} \right)^2 \right] + \frac{v'}{\varepsilon} \frac{d}{d\zeta} \left( \delta D \frac{dS}{d\zeta} \right) &= 0, \\ S(\pm\infty) = S^\pm, f^0(+\infty) &= 0. \end{aligned}$$

Заметим, что система (3.3) имеет первый порядок по  $f^0$ , и потому допускает лишь одно краевое условие. Можно показать, что граничное условие теряется с внутренней стороны переходной зоны ( $\zeta = -\infty$ ), где  $\delta = (F_{,s} - \xi_j)/F_{,c} = 0$ . Этому отвечает выбор краевого условия для  $f^0$  в задаче (3.3). В силу преобразования (3.2) это не меняет того обстоятельства, что для предельной ( $\tau \rightarrow \infty$ ) стационарной асимптотики  $f = 0$  (для этого достаточно ограниченности  $f^0(-\infty)$ ), и условия сопряжения внутреннего и внешнего решений выполнены. Примечательно, однако, что нельзя было бы построить внешнее разложение для  $S$ , сразу отыскивая стационарное распределение  $S(\zeta)$  и  $f \equiv 0$ .

Таким образом, для отыскания главного члена внутреннего разложения решения в случае контактного разрыва можно сначала найти  $S(\zeta)$  и  $f^0(\zeta)$  из (3.3), а затем для определения  $c$  воспользоваться уравнением  $f(s, c) = 0$ . При этом так же, как в типичной задаче конвективной теплопроводности, характерный размер переходной зоны растет со временем как  $\tau^{1/2}$ .

**4. Структура, обусловленная неравновесностью.** Другим фактором, способным влиять на структуру  $s$ ,  $c$ -скачков, является неравновесность процессов сорбции и перераспределения примеси между фазами. Ограничимся, пренебрегая диффузией и капиллярными силами, случаем, когда скорости обменных процессов зависят лишь от содержания примеси в фазах и в сорбированном состоянии. Тогда имеем задачу

$$\begin{aligned} (4.1) \quad m \frac{\partial S}{\partial t} + U \frac{\partial F}{\partial x} &= 0, \quad m \frac{\partial}{\partial t} [\kappa c s + \varphi(1-s) + a] + \\ &+ U \frac{\partial}{\partial x} [\kappa c F + \varphi(1-F)] = 0, \\ \partial a / \partial t &= A(c, \varphi, a), \quad \partial \varphi / \partial t = \Phi(c, \varphi), \quad F = F(s, c, \varphi), \\ s &= s_0, \quad c = c_0, \quad a = a_0(c_0), \quad \varphi = \varphi_0(c_0) \quad (t = 0), \\ s &= s^0, \quad c = c^0, \quad a = a_0(c^0), \quad \varphi = \varphi_0(c^0) \quad (x = 0), \end{aligned}$$

где  $a$  и  $\varphi$  — независимые переменные, а  $a_0(c)$  и  $\varphi_0(c)$  — их равновесные значения, являющиеся единственными корнями уравнения  $A(c, \varphi, a) = \Phi(c, \varphi) = 0$ . Вводя безразмерные переменные  $x' = mx/L$ ,  $t' = tU/L$ ,  $A' = A/A_0$ ,  $\Phi' = \Phi/\Phi_0$ ,  $\varepsilon = U/A_0L$ ,  $v = U/\Phi_0L$ , преобразуем задачу (4.1) к виду (штрихи далее опускаем)

$$\begin{aligned} (4.2) \quad \frac{\partial s}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} &= 0, \quad \frac{\partial}{\partial t} [\kappa c s + \varphi(1-s) + a] + \frac{\partial}{\partial x} [\kappa c F + \varphi(1-F)] = 0, \\ \varepsilon \partial a / \partial t &= A(c, \varphi, a), \quad v \partial \varphi / \partial t = \Phi(c, \varphi), \quad A(c, \varphi_0, a_0) = \Phi(c, \varphi_0) = 0, \\ s &= s_0, \quad c = c_0 \quad (t = 0), \quad s = s^0, \quad c = c^0 \quad (x = 0). \end{aligned}$$

Внешнее автомодельное решение, отвечающее  $\varepsilon = v = 0$ , будем считать известным. Для построения внутреннего решения в окрестности  $s$ ,  $c$ -скачка перейдем в (4.2) к системе координат, движущейся вместе со скачком ( $\eta = (x - Vt)/\varepsilon$ ,  $\tau = t$ ), и будем искать нетривиальное стационарное решение внутренней задачи

$$(4.3) \quad \left( \frac{\partial}{\partial \tau} - \xi_j \frac{\partial}{\partial \eta} \right) s + \frac{\partial F}{\partial \eta} = 0, \quad \left( \frac{\partial}{\partial \tau} - \xi_j \frac{\partial}{\partial \eta} \right) [\kappa cs + \varphi(1-s) + a] + \\ + \frac{\partial}{\partial \eta} [\kappa cF + \varphi(1-F)] = 0,$$

$$\left( \frac{\partial}{\partial \tau} - \xi_j \frac{\partial}{\partial \eta} \right) a = A(c, \varphi, a), \quad h \left( \frac{\partial}{\partial \tau} - \xi_j \frac{\partial}{\partial \eta} \right) \varphi = \Phi(c, \varphi), \quad h = v/\varepsilon,$$

$$s(-\infty) = s^-, \quad c(-\infty) = c^-, \quad \varphi(-\infty) = \varphi_0(c^-), \quad a(-\infty) = a_0(c^-).$$

Интегрируя стационарные уравнения (4.3) с учетом (1.5), получим систему второго порядка

$$(4.4) \quad da/d\eta = -\xi_j^{-1} A(\Psi(\varphi, a), \varphi, a), \quad d\varphi/d\eta = -(h\xi_j)^{-1} \Phi(\Psi(\varphi, a), \varphi), \\ c = \Psi(\varphi, a) = c^- + \alpha(a - a_0^-) + \beta(\varphi - \varphi_0^-), \quad F - F^- - \xi_j(s - s^-) = 0, \\ \alpha = [c - \varphi_0/\kappa]/\omega > 0, \quad \beta = [a_0/\kappa + (1 - \xi_j^{-1})c]/\omega > 0, \\ a_0^- = a_0(c^-), \quad \varphi_0^- = \varphi_0(c^-), \quad \omega = [a_0 + (1 - \xi_j^{-1})\varphi_0],$$

которой в фазовой плоскости  $(\varphi, a)$  соответствует уравнение

$$(4.5) \quad da/d\varphi = -hA(\Psi(\varphi, a), \varphi, a)/\Phi(\Psi(\varphi, a), \varphi).$$

Траектория, соединяющая особые точки  $(\varphi_0^\pm, a_0^\pm)$ , в этом случае всегда существует, и единственное, что остается выяснить, — это условия, при которых  $\varphi(\eta)$  и  $a(\eta)$  являются однозначными функциями  $\eta$ , удовлетворяющими граничным условиям при  $\eta \rightarrow \pm\infty$ . Очевидно, требуемые условия состоят в выполнении вдоль траектории неравенств  $(c^+ - c^-)A \leq 0$ ,  $(c^+ - c^-)\Phi \leq 0$ .

Если примесь не сорбируется либо не растворяется в нефти, то соответствующее уравнение интегрируется в квадратурах. Рассмотрим примеры подобных ситуаций для скачков  $[c] < 0$  при  $F, c \leq 0$ .

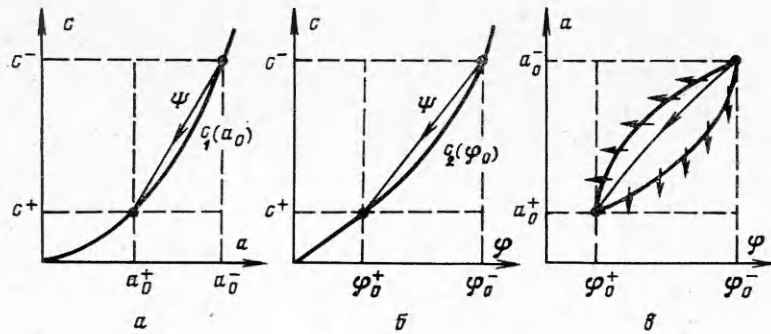
Пусть  $\varphi \equiv 0$  и  $A = A(c, a) = c - c_1(a)$ , где  $c_1(a_0(c)) = c$ . Тогда  $\Psi(a) = c^- + (a - a_0^-)[c]/[a_0]$  и из условий устойчивости скачка  $\xi_2^- \leq \xi_j \leq \xi_2^+$  следуют неравенства  $a_{0,c}^+ \geq [a_0]/[c]$ ,  $a_{0,c}^- \leq [a_0]/[c]$ , т. е. прямая  $c = \Psi(a)$  пересекает равновесную изотерму сорбции  $a_0(c)$  или касается ее в точках  $c^\pm$ ,  $a_0^\pm$  (фиг. 4, а). Интегрируя первое уравнение (4.4), получаем

$$\eta = \eta^* - \xi_j \int_{a_0^*}^a \left\{ c^- + \frac{[c]}{[a_0]} (a' - a_0^-) - c_1(a') \right\}^{-1} da', \quad a_0^+ < a_0^* < a_0^-,$$

поведение  $a(\eta)$  при  $\eta \rightarrow \pm\infty$  будет определяться порядком касания в точках  $c = c^\pm$  плоскости  $c, a$  прямой  $c = \Psi(a)$  и равновесной изотермы сорбции  $a = a_0(c)$ . При  $a_{0,c} \leq 0$  имеем  $a - a_0^\pm \sim \text{const } e^{-\chi^\pm \eta}$ ,  $\chi^\pm = [c]/[a_0] - c_{1,a}(a_0^\pm)$ ,  $\eta \rightarrow \pm\infty$ , а при обращении в нуль  $\chi^\pm$  (касание первого порядка) поведение  $a(\eta)$  при  $\eta \rightarrow \pm\infty$  становится степенным:  $a - a_0^\pm \sim 1/\chi_1^\pm \eta$ ,  $\chi_1^\pm = (1/2) c_{1,aa}(a_0^\pm)$ .

В силу линейности функции  $c = \Psi(a)$  таким же будет и асимптотическое поведение  $c(\eta)$  в стабилизированной зоне. Асимптотика  $s(\eta)$  при  $\eta \rightarrow \pm\infty$  находится из (4.4) и условия на скачке  $\xi_j = [F]/[s]$ . При  $[s] < 0$   $\xi_j = F_{,s}^- < F_{,s}^+$ , поэтому  $s - s^- \approx -\{ -2F_{,c}^-(c - c^-)/F_{,ss}^- \}^{1/2}$ ,  $s - s^+ \approx F_{,c}^+(c - c^+)/(\xi_j - F_{,s}^+)$ . На скачке  $[s] > 0$   $\xi_j > F_{,s}^\pm$  и, следовательно,  $s - s^\pm \approx F_{,c}^\pm(c - c^\pm)/(\xi_j - F_{,s}^\pm)$ .





Ф и г. 4

Аналогичным образом исследуется структура стабилизированной зоны при  $a \equiv 0$  и  $\Phi(c, \varphi) = c - c_2(\varphi)$ , где  $c_2(\varphi_0(c)) = c$ . В этом случае  $\Psi(\varphi) = c^- + (\varphi - \varphi_0^-)[c]/[\varphi_0]$  и  $\varphi(\eta)$  определяется видом равновесной изотермы  $\varphi = \varphi_0(c)$  и порядком ее касания с прямой  $c = \Psi(\varphi)$  в плоскости  $(c, \varphi)$  (фиг. 4, б).

Наконец, рассмотрим общий случай, считая, что примесь сорбируется только из водной фазы:  $A(c, a) = c - c_1(a)$ ,  $\Phi(c, \varphi) = c - c_2(\varphi)$ . Тогда уравнение (4.5) принимает вид

$$da/d\varphi = -h[c^- + \alpha(a - a_0^-) + \beta(\varphi - \varphi_0^-) - c_1(a)]/[c^- + \alpha(a - a_0^-) + \beta(\varphi - \varphi_0^-) - c_2(\varphi)].$$

Искомая траектория является сепаратрисой седла  $(\varphi_0^+, a_0^+)$ , принадлежащей узловому пучку точки  $(\varphi_0^-, a_0^-)$ , и проходит ниже выпуклой изоклины нуля  $c_1(a) = \Psi(\varphi, a)$  ( $\beta d^2\varphi/da^2 = c_{1,aa} > 0$ ) над вогнутой изоклиной бесконечности  $c_2(\varphi) = \Psi(\varphi, a)$  ( $\alpha d^2a/d\varphi^2 = c_{2,\varphi\varphi} > 0$ ) (фиг. 4, в). Направления траектории в особых точках определяются угловыми коэффициентами

$$k^\pm = (da/d\varphi)^\pm = [p + (p^2 + 4\alpha\beta h)^{1/2}]/2\alpha, p = c_{2,\varphi}^\pm - \beta - h(c_{1,a}^\pm - \alpha),$$

при этом  $k^\pm \rightarrow (c_{2,\varphi}^\pm - \beta)/\alpha$ , если  $h \rightarrow 0$ , и  $k^\pm \rightarrow \beta/(c_{1,a}^\pm - \alpha)$ , если  $h \rightarrow \infty$ .

Интегрируя (4.4) в окрестностях особых точек, получим  $a - a_0^\pm \sim \text{const } e^{-\chi^\pm \eta}$ ,  $\varphi - \varphi_0^\pm \sim \text{const } e^{-\gamma^\pm \eta}$ ,  $\eta \rightarrow \pm\infty$ ,  $\chi^\pm = \beta/k^\pm + \alpha - c_{1,a}^\pm$ ,  $\gamma^\pm = (\alpha k^\pm + \beta - c_{2,\varphi}^\pm)/h$ , где  $\chi^\pm$  и  $\gamma^\pm$  пропорциональны разностям угловых коэффициентов траектории и опорных кривых (фиг. 4, в) в точках  $(\varphi_0^\pm, a_0^\pm)$  плоскости  $(\varphi, a)$ .

В силу линейности зависимости  $c = \Psi(\varphi, a)$  поведение  $c(\eta)$  при  $\eta \rightarrow \pm\infty$  определяется членом  $\exp[+\eta \min(|\chi^\pm|, |\gamma^\pm|)]$ , т. е. более медленным из двух неравновесных процессов.

В случае касания траекторией одной из опорных кривых в точках  $(\varphi_0^\pm, a_0^\pm)$  экспоненциальное поведение соответствующей переменной ( $\varphi$  или  $a$ ) и концентрации  $c(\eta)$  при  $\eta \rightarrow \pm\infty$  сменяется степенным.

Полученные результаты остаются справедливыми для функций  $A(c, \varphi, a)$  и  $\Phi(c, \varphi)$  произвольного вида, удовлетворяющих условиям  $A_{,c} > 0$ ,  $A_{,\varphi} > 0$ ,  $A_{,cc} \leq 0$ ,  $A_{,\varphi\varphi} \leq 0$ ,  $A_{,a} < 0$ ,  $\Phi_{,c} > 0$ ,  $\Phi_{,cc} \leq 0$ ,  $\Phi_{,\varphi} < 0$ . В этом случае угловые коэффициенты траектории в особых точках  $(\varphi_0^\pm, a_0^\pm)$  и значения  $\chi^\pm$ ,  $\gamma^\pm$  определяются соотношениями  $k^\pm = [p + (p^2 + 4\alpha\Phi_{,c}^\pm R^\pm)^{1/2}]/2\alpha\Phi_{,c}^\pm$ ,  $\chi^\pm = p^\pm + R^\pm/k^\pm$ ,  $\gamma^\pm = (Q^\pm + \alpha\Phi_{,\varphi}^\pm k^\pm)/h$ ,  $p = hP^\pm - Q^\pm$ ,  $P^\pm = \alpha A_{,c}^\pm + A_{,a}^\pm$ ,  $Q^\pm = \beta\Phi_{,c}^\pm + \Phi_{,\varphi}^\pm$ ,  $R^\pm = \beta A_{,c}^\pm + A_{,\varphi}^\pm$ .

В случае однородной жидкости рассмотренная задача совпадает с классической задачей сорбции [10].

Поступила 13 VII 1981

## ЛИТЕРАТУРА

1. Ентов В. М., Полищук А. М. О роли сорбционных процессов при движении полимерных растворов в пористой среде. — Изв. АН СССР. МЖГ, 1975, № 3.
2. Ентов В. М., Хавкин А. Я., Чен-Син Э. Расчеты процессов вытеснения нефти раствором активной примеси. — В сб.: Численное решение задач фильтрации многофазной несжимаемой жидкости. Новосибирск, 1977.
3. Брагинская Г. С., Ентов В. М. О неизотермическом вытеснении нефти раствором активной примеси. Препринт № 112. М.: изд. Ин-та проблем механики АН СССР, 1978.
4. Ентов В. М. Физико-химическая гидродинамика процессов в пористых средах (математические модели методов повышения нефтеотдачи пластов). Препринт № 161. М.: изд. Ин-та проблем механики АН СССР, 1980.
5. Зискин Е. А., Рыжик В. М. Автомодельные решения задач двухфазного вытеснения нефти раствором активной примеси с учетом массообмена между фазами. — Изв. АН СССР. МЖГ, 1981, № 4.
6. Бан А. и др. Влияние свойств горных пород на движение в них жидкости. М.: Гостоптехиздат, 1963.
7. Баренблатт Г. И., Ентов В. М., Рыжик В. М. Теория нестационарной фильтрации жидкости и газа. М.: Недра, 1972.
8. Олейник О. А. О единственности и устойчивости обобщенного решения задачи Коши для квазилинейного уравнения. — УМН, 1959, т. XIV, вып. 2(86).
9. Рождественский Б. Л., Яненко Н. Н. Системы квазилинейных уравнений и их приложения к газовой динамике. М.: Наука, 1978.
10. Тихонов А. Н., Жуховицкий А. А., Забежинский Я. Л. Поглощение газа из тока воздуха слоем зернистого материала. — ЖФХ, 1946, т. 20, вып. 10.

УДК 533.6.071.8 + 533.6.011.6

## МЕТОДИКА ИЗМЕРЕНИЯ ТЕМПЕРАТУРЫ ТОРМОЖЕНИЯ КРАТКОВРЕМЕННЫХ ПОТОКОВ ГАЗА С ПОМОЩЬЮ РАДИАЦИОННО-КАЛОРИМЕТРИЧЕСКОГО ДАТЧИКА

А. И. Данилевич  
(Москва)

Температура торможения является одним из определяющих параметров газового потока при моделировании реальных условий обтекания моделей в аэродинамических трубах и установках. На ряде установок кратковременного действия значение температуры торможения определяется лишь расчетным путем по косвенным измерениям (например, расходным методом) либо по измерениям в ресивере или форкамере, что приводит к значительным погрешностям. Известные методы и устройства для измерения температуры газовых потоков [1—4] в большинстве своем обладают большой тепловой инерцией.

В данной работе описываются измерения температуры торможения горячего газа с помощью радиационно-калориметрического датчика, разработанного ранее для измерения величины теплового потока [5]. Используется способ прямого сравнения температуры заторможенного газового потока с температурой нагретого чувствительного элемента датчика.

**Описание метода измерения температуры.** В соответствии со вторым началом термодинамики тело, помещенное в зоне торможения потока газа, охлаждается, если температура тела больше температуры торможения газа, и нагревается, если температура тела ниже температуры торможения газа. В случае, если теплообмен отсутствует, можно сделать заключение, что температура торможения газа  $T_0$  и температура тела в зоне торможения равны.

Обычно в измерительной технике методом последовательных приближений подбирают такую величину энергии, подводимую к нагревателю термоприемника, при которой показания датчика не изменяются с введением его в поток газа. Такой способ продолжителен по времени и не позволяет достигнуть высокой точности, так как связан с чисто эмпирическим подбором режима подогревателя термоприемника и необходимостью строгого постоянства параметров измеряемого потока. Применение динамического способа определения температуры по темпу ее изменения [6] позволяет уменьшить число сравнений до двух.