УДК 532.516

О ВЗАИМОДЕЙСТВИИ ВИХРЯ С ПЛОСКОСТЬЮ

М. А. Гольдштик

(Новосибирск)

В работе [1] рассматривалась задача о взаимодействии вихря с плоскостью в вязкой жидкости и установлено, что ограниченное решение этой задачи существует лишь при малых числах Рейнольдса. Этот результат анализировался, например, в [2–7]. Данная статья посвящена обсуждению работы [7], содержащей наиболее полные результаты анализа. В статье [7] понятие решения существенно расширено, вследствие чего результаты работы [1] оказались частным случаем широкого класса решений, зависящих от произвольного параметра и существующих при надлежащем выборе этого параметра при любых числах Рейнольдса.

Постановка задачи состоит в следующем: разыскивается решение уравнений Навье — Стокса вида

$$v_R = \frac{F'(x)}{R}, \quad v_\alpha = \frac{F(x)}{r}, \quad v_\theta = \frac{\Omega(x)}{r} \tag{1}$$

где v_R, v_α, v_θ — компоненты вектора скорости в сферической системе координат (R, α, θ), $r = R\sin\alpha$, $x = \cos\alpha$, α — азимутальный угол. (Здесь и далее обозначения Серрина [7].) После подстановки (1) в уравнения Навье — Стокса получается система обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\nu(1 - x^2)F^{\mathrm{IV}} - 4\nu xF''' + FF''' + 3F'F'' = -2\Omega\Omega' / (1 = x^2) \tag{2}$$

$$\nu(1 - x^2)\Omega'' + F\Omega' = 0 \tag{3}$$

где ν — коэффициент кинематической вязкости.

Для этой системы шестого порядка ставятся пять граничных условий

$$\Omega(0) = F(0) = F'(0) = 0, \quad \Omega(1) = C, \quad F(1) = 0$$

Путем дополнительных преобразований получается система

$$f' + f^2 = k^2 G(x) / (1 - x^2)^2. \tag{4}$$

$$\Omega'' + 2f\Omega' = 0 \tag{5}$$

$$G(x) = 2(1 - x)^2 \int_0^x \frac{t\Omega^2 dt}{(1 - t^2)^2} + 2x \int_x^1 \frac{\Omega^2 dt}{(1 + t)^2} - P(x - x^2) \tag{6}$$

$$k = {}^1/_2 \nu^{-1}, \quad F = 2\nu(1 - x^2) f$$

$$f(0) = \Omega(0), \quad \Omega(1) = C \tag{7}$$

Здесь P — свободный параметр, происхождение которого связано с недостаточным числом граничных условий для системы (2)—(3).

В работе [1] постановка задачи не содержала никакого произвола. В качестве недостающего условия там использовалось требование ограниченности продольной скорости v_R на вихревой линии ($x = 1$). Это требование порождало следующие условия: $F'(1)$ ограничено, $f(1)$ ограничено, $G'(1) = 0$. Последнее равенство определяло параметр $P = C^2$.

Введение параметра P, расширяющего класс решений, требует выяснения его физического смысла. Поэтому представляется целесообразным выяснить, к каким последствиям приводит введение произвольного P, и дать интерпретацию полученным результатам.

Прежде всего, при произвольном P функция v_R становится неограниченной, имеющей логарифмическую особенность [7]

$$Rv_R \sim -{}^1/_2 (1 - P^*) k^* \ln(1 - x)^{-1} \tag{8}$$

Здесь P^* и k^* — нормированные значения P и k

$$P = C^2 P^*, \quad k^* = |C| k$$

Следует отметить, что существование подобного рода сингулярных решений для автомодельных течений типа (1) известно в теории вязких струй. Например, в работе [8] показано, что решение Л. Д. Ландау о затопленной струе становится неединственным. Однако автор этой работы считает, что сингулярные решения не имеют физического смысла. Такого же рода утверждения содержатся в [9, 10]. Но в теории струй ограниченные решения существуют при любых значениях параметров, в то время как для задачи о вихре условие ограниченности оказывается слишком жестким, и поэтому использование неограниченных решений может оказаться оправданным.

Однако если считать параметр P совершенно произвольным, то получается что движение жидкости сохраняется даже при исчезновении вихря, когда $C \to 0$. В самом деле это следует из работы [7], где рассмотрено уравнение

$$f' + f^2 = -Pk^2x \,/\, (1-x)(1+x)^2, \quad f(0) = 0$$

которое следует из системы (4) — (6) при $\Omega \equiv 0$. В [7] установлено, что это уравнение разрешимо, если $Pk^2 < 8.2$. Укажем, что в работе [7] в этом уравнении стоит множитель P^*k^{*2}, составленный из нормированных параметров, однако его можно заменить множителем Pk^2, поскольку это произведение не зависит от C.

Таким образом, произвольному P соответствует не «чистый вихрь», а его суперпозиция с течением жидкости, которое индуцируется за счет продольного движения бесконечно тонкой нити с бесконечно большой скоростью. Такая нить в отличие от движущейся с конечной скоростью оказывается способной увлечь вязкую жидкость. При этом в жидкость вносится еще и конечный импульс, так что получается еще более сложная суперпозиция вихря, «нити» и струи.

Если это так, то ясно, что дополнительные источники движения жидкости требуют задания параметров, определяющих их интенсивность; например, поместив на оси вихря линейный источник или сток, необходимо охарактеризовать его заданием обильности. Выбор типа особенности должен определяться той реальной физической задачей, для которой рассматриваемое решение с особенностями является асимптотическим. В частности, решение (1) задачи о вихре можно было бы попытаться интерпретировать как асимптотическое для движения вязкой жидкости, которое вызвано вращающейся иголкой, когда ее диаметр стремится к нулю, а угловая скорость неограниченно возрастает, так что циркуляция остается постоянной. Ясно, что для такой модели сингулярность окружной скорости v_θ остается естественной. Для других компонент скоростей v_R и v_α естественным представляется требование ограниченности, поскольку оно согласуется с условиями предельного перехода.

В принципе, однако, в результате предельного перехода не исключено возникновение «индуцированной» сингулярности. Поэтому, если решения задачи с одними лишь «естественными» особенностями не существует, как это имеет место в рассматриваемом случае при больших числах Рейнольдса, то в качестве возможного выхода из положения можно допустить присоединение индуцированной сингулярности с минимально возможной интенсивностью (минимальной потому, что всякое ее превышение будет соответствовать другой реальной модели, в которой эта избыточная интенсивность порождается естественным путем в результате предельного перехода). Требование минимальной сингулярности функции v_R позволяет выбрать параметр P, точнее найти зависимость $P^*(k^*)$, которую можно определить следующим образом. При $0 < k < 2.86$ $P^* = 1$, поскольку в этом диапазоне существует ограниченное решение; при $2.86 < k^* < \infty$ в течении возникает сингулярная приосевая струйка и зависимость $P^*(k^*)$ должна соответствовать кривой на фиг. 1 из [7], отделяющей зону B от области несуществования решений. Такой выбор предложен и в [7], но только для турбулентного течения с самонастраивающейся виртуальной вязкостью. Установление зависимости $P^*(k^*)$ делает задачу однозначно определенной. Однако, чтобы это утверждение имело силу, должна быть доказана единственность решения при фиксированных P^* и k^*. Такое доказательство не было получено ни в [1], ни в [7]. Оно излагается ниже для случая $P^* = 1$ и таких k^*, при которых решение существует.

Из (5) после интегрирования следует соотношение:

$$\Omega' = a \exp\left(-2\int_0^x f\,dx\right) \tag{9}$$

где a — постоянная интегрирования, подлежащая определению из условия $\Omega(1) = C$. Снимем это условие и будем считать $a = \Omega'(0)$ заданным числом.

Как показано в [1], $0 < a < C$. Рассмотрим систему уравнений (4), (6), (9). Докажем, что для любого a, при котором эта система разрешима на интервале (0.1), решение единственно. Запишем (6) в виде

$$G(x) = x^2 - Ax - 2\int_0^x \frac{(x-t)(1-tx)}{(1-t^2)^2}\,\Omega^2 dt \tag{10}$$

$$\left(A = 1 - 2\int_0^1 \frac{\Omega^2 dt}{(1+t)^2}\right)$$

При таком определении величины A имеем $G(1) = 0$. Отбросим последнее равенство, а вместе с ним и условие $F(1) = 0$, выбирая A произвольно. В этом случае система уравнений (4), (9), (10) эквивалентна задаче Коши для системы (2) — (3) с условиями

$$\Omega = F = F' = 0, \quad \Omega' = a, \quad F'' = A, \quad F''' = 1/\nu \quad \text{при } x = 0$$

Такая задача однозначно разрешима. Покажем, что с ростом A функция $G(x)$ монотонно убывает. Пусть

$$A = A_0 + A_1, \quad \Omega = \Omega_0 + \Omega_1, \quad G = G_0 + G_1, \quad f = f_0 + f_1$$

где величины с индексом 1 малы, $A_1 > 0$.

Из (10) находим

$$G_1 = -A_1 x - 4\int_0^x \frac{(x-t)(1-tx)}{(1-t^2)^2}\Omega_0\Omega_1 dt \tag{11}$$

Дифференцируя это равенство, можно доказать, что на некотором интервале $G_1 < 0$, каков бы ни был знак функции Ω_1. Тогда на этом интервале $f_1 < 0$, так как f_1 удовлетворяет уравнению

$$f_1' = -2f_0 f_1 + k^2 G_1/(1-x^2)^2 \tag{12}$$
$$(f_0 \leqslant 0, \quad f_1(0) = 0)$$

Далее из (9) следует:

$$\Omega_1' = -2\Omega_0' \int_0^x f_1 dx \qquad (\Omega_0' > 0)$$

Поэтому на рассматриваемом интервале $\Omega_1 > 0$. Это неравенство позволяет расширить интервал, где G_1 принимает отрицательные значения, на всю область существования решения.

Монотонность зависимости G от A позволяет утверждать единственность корня функции $G(1)$, а вместе с тем и единственность решения вспомогательной краевой задачи с фиксированным a.

Пусть далее G снова определяется формулой (6) с $P = 1$. Покажем, что функция $\Omega(x)$ всюду монотонно возрастает с ростом константы a. Положим

$$a = a_0 + a_1, \quad \Omega = \Omega_0 + \Omega_1, \quad G = G_0 + G_1, \quad f = f_0 + f_1, \quad a_1 > 0$$

Имеем

$$\Omega_1' = \left(\frac{a_1}{a_0} - 2\int_0^x f_1 dx\right)\Omega_0' \tag{13}$$

$$\left(\frac{G_1}{x}\right)' = -4\,\frac{1-x^2}{x^2}\int_0^x \frac{t\Omega_0\Omega_1 dt}{(1-t^2)^2} \tag{14}$$

Из (13) следует, что на некотором интервале $\Omega_1 > 0$, тогда из (14) вытекает, что $G_1 < 0$. В этом случае согласно (12) $f_1 < 0$ и снова неравенство $\Omega_1 > 0$ может быть установлено для всего интервала продолжимости решения задачи. Вследствие монотонности зависимости Ω от a равенство $\Omega(1) = C$ может быть достигнуто лишь при единственном значении a, что завершает доказательство теоремы единственности для случая $P = 1$. Отметим, что для $P < 1$ доказательство несколько сложнее.

Таким образом, работа Серрина [7] и ее интерпретация, данная в настоящей статье, позволяют разрешить парадокс работы [1].

Поступила 11 IX 1972

ЛИТЕРАТУРА

1. Гольдштик М. А. Одно парадоксальное решение уравнений Навье — Стокса. ПММ, 1960, т. 24, вып. 4.
2. Childres S. Solutions of Euler's eqations containign finite eddies. Plys. Fluids, 1966, vol. 9, No. 5.
3. Kidd G. J., Farris G. J. Potential vortex flow adjacent to a stationary surface. Trans. ASME, Ser. E., J. Appl. Mech., 1968, vol. 35, No. 2.
4. Schwiderski E. W. On the axissymmetric vortex flow over a flat surface. Trans. ASME, Ser. E, J. Appl. Mech., 1969, vol. 36, No. 3.

5. N a n b u K. Vortex flow over a flat surface with suction. AIAA Journal, 1971, vol. 9, No. 8.
6. C h a m T. S. The laminar boundary layer of a source and vortex flow. Aeronaut. Quart., 1971, vol. 22, No. 2.
7. S e r r i n J. The swirling vortex. Philos. Trans. Roy. Sos. London, Ser. A., 1972, vol. 271, No. 1214.
8. Я ц е е в В. И. Об одном классе точных решений уравнений движения вязкой жидкости. ЖЭТФ, 1950, т. 20, вып. 11.
9. Б и р к г о ф Г., С а р а н т а н е л л о Э. Струи, следы и каверны. М., «Мир», 1964.
10. Г о л ь д ш т и к М. А., С и л а н т ь е в Б. А. К теории затопленных струй. ПМТФ, 1965, № 5.

УДК 534.2

ОБ АКУСТИЧЕСКОМ ВЗАИМОДЕЙСТВИИ ДВУХ ЦИЛИНДРОВ

Д. Н. Горелов

(Новосибирск)

В работе исследуются некоторые особенности распространения звуковых волн от кругового цилиндра, колеблющегося вблизи экрана или свободной поверхности. При определенных значениях параметров обнаружено резкое изменение интенсивности звукового поля, обусловленное акустическим резонансом между колеблющимся цилиндром и собственными колебаниями газа в соответствующей области.

Рассмотрим задачу об акустическом взаимодействии двух круговых цилиндров радиуса R, колеблющихся по некоторому заданному гармоническому закону с малыми амплитудами. Среду предположим идеальной и сжимаемой, а движение среды — плоскопараллельным и потенциальным. С каждым цилиндром свяжем декартову систему координат x_n, y_n $(n = 1, 2)$ с центром на оси цилиндра. Оси y_1, y_2 направим вдоль прямой, соединяющей начала координат, полагая

$$x_1 = x_2, \quad y_1 = y_2 - H \tag{1}$$

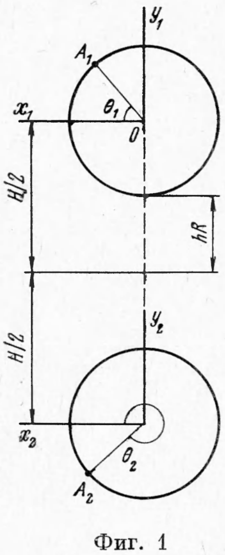
где H — расстояние между осями цилиндров (фиг. 1).

В дальнейшем в качестве основной системы координат выбираем x_1, y_1, применяя для этих координат обозначения x, y.

Предположим, что потенциал скорости $\varphi(x, y, t)$ может быть представлен в виде

$$\varphi(x, y, t) = Ra\Phi(x, y)e^{i\omega t} \tag{2}$$

где $\Phi(x, y)$ — безразмерная амплитудная функция потенциала скорости, a — скорость звука, ω — круговая частота колебаний цилиндров. Тогда в рамках сделанных предположений функция Φ удовлетворяет уравнению Гельмгольца



Фиг. 1

$$\Phi_{xx} + \Phi_{yy} + k^2\Phi = 0 \quad (k = \omega R/a) \tag{3}$$

и граничным условиям

$$\partial\Phi/\partial r_n = F_n(\theta_n) \quad \text{при } r_n = 1 \ (n = 1, 2) \tag{4}$$

$$\lim_{r_n\to\infty} r_n^{1/2}\Phi = 0, \quad \lim_{r_n\to\infty} r_n^{1/2}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial r_n} - ik\Phi\right) = 0 \tag{5}$$

Здесь r_n, θ_n — безразмерные полярные координаты, связанные с x_n, y_n соотношениями

$$x_n = Rr_n\cos\theta_n, \quad y_n = Rr_n\sin\theta_n \quad (n = 1, 2) \tag{6}$$