

РАСЧЕТ ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ, ОБРАЗУЮЩЕГОСЯ НА ПРОИЗВОЛЬНОЙ ОСЕСИММЕТРИЧНОЙ ПОВЕРХНОСТИ, ВРАЩАЮЩЕЙСЯ В НЕПОДВИЖНОЙ СРЕДЕ

Л. А. Дорфман

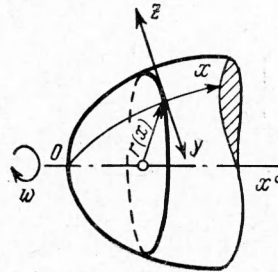
(Ленинград)

Расчет пограничного слоя на вращающихся поверхностях дает возможность определить трение, тепло- и массообмен в пограничном слое. Такие задачи возникают в турбостроении, а также в других областях техники. Подробно исследован этот вопрос для случая вращающегося диска и цилиндра (см. [1]). Для поверхностей другой формы разработаны лишь интегральные методы: для шара — Хауартом [2] и Нигамом [3], для произвольной поверхности — в работе [4]. Расчет оказывается достаточно сложным ввиду необходимости удовлетворить двум интегральным соотношениям (вместо одного для плоского течения). Поэтому целесообразно для этой цели использовать класс точных «автомодельных» решений пограничного слоя на вращающихся поверхностях, на существование которых указал Гайс [5].

В настоящей работе приводятся результаты расчета класса «автомодельных» решений. Дается построение приближенного метода расчета пограничного слоя на вращающихся поверхностях произвольной формы, основанного на использовании «автомодельных» решений.

§ 1. Преобразование уравнений. Рассмотрим уравнения ламинарного пограничного слоя, образуемого на осесимметричной поверхности, вращающейся с постоянной угловой скоростью ω в неограниченной неподвижной среде [1]

$$\begin{aligned} u \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{v^2}{r} \frac{dr}{dx} + w \frac{\partial u}{\partial z} &= \nu \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \\ u \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{uv}{r} \frac{dr}{dx} + w \frac{\partial v}{\partial z} &= \nu \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{u}{r} \frac{dr}{dx} + \frac{\partial w}{\partial z} &= 0 \end{aligned} \quad (1.1)$$



Фиг. 1

Здесь координатными линиями выбраны (фиг. 1) ось x — вдоль меридионального сечения поверхности, ось y — вдоль сечения поверхности плоскостью, перпендикулярной оси вращения, ось z — перпендикулярно касательной плоскости; $r(x)$ определяет меридиональный профиль поверхности; u, v, w — составляющие вектора скорости, соответствующие осям x, y, z ; ν — кинематическая вязкость.

Как показал Гайс [5], «автомодельные» решения системы (1.1) существуют только в случае, когда $r(x)$ есть степенная

$$r = A(x + x_0)^m \quad (1.2)$$

(или показательная) функция от $x + x_0$. Действительно, введем функцию тока ψ , так что

$$\partial \psi / \partial z = ru, \quad \partial \psi / \partial x = -rw \quad (1.3)$$

Сделаем (при $m > 0$) замену переменной

$$\zeta = z \sqrt{\omega r' / \nu} \quad (r' = dr / dx) \quad (1.4)$$

Положим

$$\psi = -\frac{1}{2} r^2 H(\zeta) \sqrt{\nu \omega / r'}, \quad u = r \omega F(\zeta), \quad v = r \omega G(\zeta) \quad (1.5)$$

Тогда, если $r(x)$ имеет вид (1.2), уравнения (1.1) преобразуются в систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$F'' = F^2 - G^2 + \beta H F', \quad G' = 2FG + \beta H G', \quad H' + 2F = 0 \quad (1.6)$$

где параметр β выражается через показатель степени m в виде

$$\beta = \frac{1 + 3m}{4m} \quad (1.7)$$

При уменьшении r с ростом x , т. е. при $m < 0$, в подстановках (1.4) и (1.5) вместо r' берется $-r'$. Тогда, если заменить F и H на $-F$ и $-H$, то уравнения (1.6) сохранят свой вид.

При помощи простых выкладок можно также получить выражение для w

$$\frac{w}{\sqrt{\nu \Omega r}} = \beta H + 2(\beta - 1) F \zeta \quad (1.8)$$

Заметим, что случай, когда $r(x)$ есть показательная функция от $(x + x_0)$, соответствует значению $\beta = 3/4$.

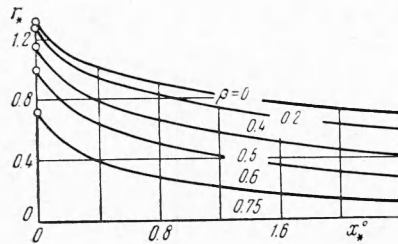
Форма поверхности, соответствующая степенному выражению (1.2), зависит от постоянных A и m . В прямоугольной системе координат (r, x^0) форма образующей определяется уравнениями

$$x^0 = \int_0^x \sqrt{1 - m^2 A^2 (x + x_0)^{2(m-1)}} dx, \quad r = A (x + x_0)^m \quad (1.9)$$

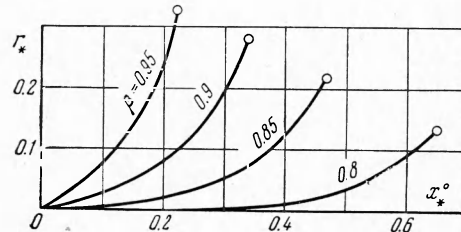
При $m < 0$, т. е. $\beta < 3/4$, подынтегральная функция принимает действительные значения, начиная с x_0 , что соответствует начальному радиусу r_0

$$x_0 = (mA)^{\frac{1}{1-m}}, \quad r_0 = m^{\frac{m}{1-m}} A^{\frac{1}{1-m}} \quad (1.10)$$

При $0 < m \leq 1$, т. е. $\beta \geq 1$, поверхность начинается с минимального радиуса, вычисляемого по формуле (1.10), а затем радиус поверхности возрастает с ростом x .



Фиг. 2



Фиг. 3

Случай $m > 1$, т. е. $3/4 < \beta < 1$ соответствует поверхности, начинающейся с радиуса $r = 0$ и заканчивающейся радиусом r_0 , определяемым по формуле (1.10).

Из формул (1.9) следует, что все поверхности, соответствующие фиксированному значению m и переменным A , между собою подобны, при этом

$$x_*^0 = f(r_*), \quad [x_*^0 = x^0 : A^{\frac{1}{m-1}}, \quad r_* = r : A^{\frac{1}{m-1}}] \quad (1.11)$$

Этим объясняется независимость безразмерных уравнений движения (1.4) от параметра A . Вид поверхностей, подсчитанный по уравнениям (1.9), изображен на фиг. 2—4.

Заметим, что вблизи краев, соответствующих начальному (или конечному) радиусу r_0 поверхности, уравнения (1.4) недействительны. Следует также иметь в виду, что уравнения (1.1) справедливы только в случае, если толщина пограничного слоя значительно меньше соответствующего значения $r(x)$; с приближением β к $3/4$, а также для малых A это условие нарушается.

Граничными условиями рассматриваемой задачи являются

$$F(0) = H(0) = 0, \quad G(0) = 1, \quad F(\infty) = G(\infty) = 0 \quad (1.12)$$

Заметим, что при $\beta = 1$ получаем случай вращающейся плоскости (при $A = 1$), а также кругового конуса (с углом расширения $2 \arcsin A$). Для этого случая решение было получено Кокрэном [6] и впоследствии уточнялось в связи с решением других задач [7, 8].

§ 2. Случай $\beta = 0$. При $\beta = 0$ можно получить решение системы (1.6) с граничными условиями (1.12) в замкнутом виде. Действительно, если ввести комплексную функцию

$$y = F + iG \quad (2.1)$$

то при $\beta = 0$ система (6.1) сводится к виду

$$y'' = y^2, \quad H' = -2 \operatorname{Re}(y) \quad (2.2)$$

а граничные условия (1.12) — к виду

$$y(0) = i, \quad y(\infty) = 0, \quad H(0) = 0 \quad (2.3)$$

Тогда

$$\frac{d(y')^2}{d\zeta} = 2y'y^2, \quad (y')^2 = 2 \int y^2 dy = \frac{2}{3} y^3 - c$$

притом, согласно с (2.3), $c = 0$. Отсюда

$$d\zeta / dy = (2/3 y^3)^{-1/2} \quad (2.4)$$

Проинтегрировав (2.4) с учетом (2.3), находим

$$y = 6 : [\zeta^2 + 2 \sqrt{3}\zeta - i(2 \sqrt{3}\zeta + 6)] \quad (2.5)$$

Таким образом, получаем

$$F = 6 \frac{\zeta^2 + 2 \sqrt{3}\zeta}{(\zeta^2 + 2 \sqrt{3}\zeta)^2 + (2 \sqrt{3}\zeta + 6)^2} \quad G = 6 \frac{2 \sqrt{3}\zeta + 6}{(\zeta^2 + 2 \sqrt{3}\zeta)^2 + (2 \sqrt{3}\zeta + 6)^2} \quad (2.6)$$

$$H = -2 \sqrt{6} \left[\frac{\sqrt{2}}{2} - \sqrt{3} \frac{\sqrt{\zeta^2 + 2 \sqrt{3}\zeta + i(\zeta^2 + 2 \sqrt{3}\zeta)^2 + (2 \sqrt{3}\zeta + 6)^2}}{\sqrt{(\zeta^2 + 2 \sqrt{3}\zeta)^2 + (2 \sqrt{3}\zeta + 6)^2}} \right]$$

При этом

$$F'(0) = -G'(0) = 1/3 \sqrt{3}, \quad H(\infty) = -2 \sqrt{3} \quad (2.7)$$

Заметим, что

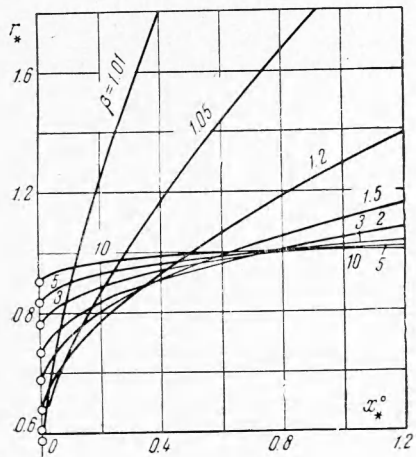
$$\begin{aligned} \int_0^\infty G d\zeta &= \operatorname{Im} \left(\int_0^\infty y d\zeta \right), \quad 2 \int_0^\infty G^2 d\zeta = \int_0^\infty (F^2 + G^2) d\zeta - \int_0^\infty (F^2 - G^2) d\zeta = \\ &= \int_0^\infty y \bar{y} d\zeta + F'(0) \end{aligned}$$

Тогда, с учетом (2.4) для характеристик пограничного слоя получим условные толщины

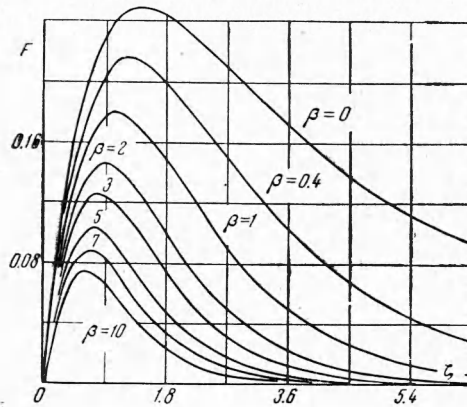
$$B = \int_0^\infty G d\zeta = \sqrt{3}, \quad C = \int_0^\infty G^2 d\zeta = \sqrt{3} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{3} \right) \quad (2.8)$$

§ 3. Решение системы уравнений. Для решения нелинейной граничной задачи (1.6), (1.12) был применен метод проб с интерполяцией.

Задавшись приближенными значениями недостающих граничных условий в $\zeta = 0$, $F'(0) = a$, $G'(0) = b$, решаем задачу с начальными условиями, кроме этих значений, еще для $(a + \Delta a, b)$ и $(a, b + \Delta b)$, а затем путем линейной интерполяции



Фиг. 4

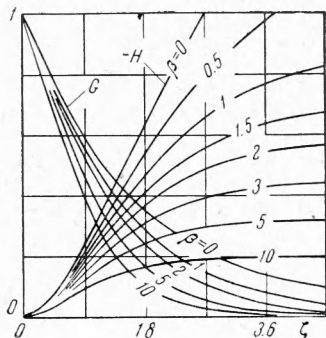


Фиг. 5

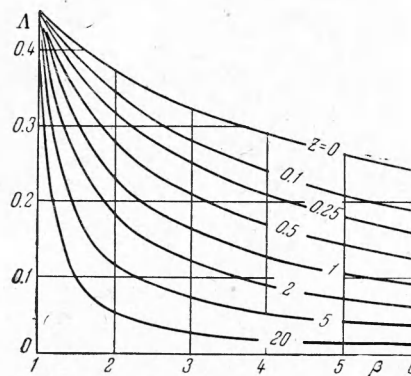
по a и b находим уточняющие поправки δa и δb к начальным a и b из условия $F(\infty) = G(\infty) = 0$. Затем процесс повторяем, начиная с $a + \delta a, b + \delta b$ и т. д.

Заметим, что ввиду нелинейности задачи при грубом задании начальных значений a и b этот итерационный процесс не сходится.

Приближенные значения a и b определялись при помощи интерполяции, вначале — по известным значениям для $\beta = 0$ (§ 2) и $\beta = 1$ [6], а затем — с привлечением решений, полученных для других β . Трудность, связанная с бесконечностью области интегрирования, преодолевается с учетом того, что искомые функции уже с некоторого



Фиг. 6



Фиг. 7

конечного значения $\zeta = \zeta^*$ ($\zeta^* = 12$ для $\beta \geq 1$) практически принимают значения в бесконечности, в частности, $F(\zeta^*) = 0, G(\zeta^*) = 0$. Сделав расчет для достаточно большого значения ζ^* , порядка 12, проводим затем расчет с увеличенным значением ζ^* . Если при этом результаты расчета не изменятся, то процесс уточнения решения на этом заканчивается.

Интегрирование системы (1.6) проводилось при помощи модификации Мерсона метода Рунге — Кутты [9]. Расчет был проведен с точностью до $\varepsilon = 10^{-7}$ на каждом шагу, с такой же точностью удовлетворялись граничные условия.

Ниже приводятся некоторые результаты вычислений для $\beta = 1$; для сопоставления приводятся также результаты других авторов:

$a = F'(0)$	$b = G'(0)$	$-H(\infty)$	B	C
0.510233	-0.615922	0.88447	1.27144	0.672527
[8] 0.510233	-0.615922	0.88446	—	—
[7] 0.510	-0.6159	0.8845	1.271	0.6721
[6] 0.510	-0.616	0.886	—	—

Как видно, имеется хорошее согласование между этими данными. Некоторым контролем может служить соотношение

$$\int_0^{\infty} FG d\zeta = -G'(0) : 2(1 + \beta)$$

которое вытекает из (1.6). Вычисления показывают, что оно выполняется с точностью до 10^{-7} .

Основные результаты расчетов приводятся в таблице и на фиг. 5 и 6. Решение проводилось на машине «Урал-2», программирование проведено А. З. Серазетдиновым.

§ 4. Приближенный метод расчета для произвольной вращающейся поверхности. Используем набор решений для различных значений β для построения приближенного метода расчета пограничного слоя на вращающихся поверхностях произвольной формы. Для этого разбиваем рассматриваемую поверхность на отдельные участки, для каждого из которых подбираем близкую поверхность со степенной зависимостью $r = A(x + x_0)^m$. В основу расчета положим изменение условной толщины пограничного слоя

$$\Delta_y = \int_0^{\infty} \left(\frac{v}{r\omega} \right)^2 dz = C(\beta) \left(\frac{v}{\omega r} \right)^{1/2} \quad (4.1)$$

β	$F'(0)$	$-G'(0)$	$-H(\infty)$	B	C
0	0.577350	0.577350	3.46410	1.73205	0.782999
0.15	.566170	.583070	2.26063	.59623	.760727
.30	.555675	.588801	1.66504	.50527	.741181
.45	.544934	.594552	1.35307	.43314	.723858
.60	.534671	.600364	1.16548	.37826	.708160
.75	.524996	.606141	1.03755	.33288	.693829
.85	.518889	.610039	0.969198	.30650	.684947
.95	.513052	.613958	.910708	.28259	.676553
1.0	.510233	.615922	.884475	.27144	.672527
.1	.504783	.619850	.837017	.25052	.664792
.2	.499576	.623771	.795184	.23124	.657453
.3	.494598	.627677	.757981	.21338	.650477
.4	.489834	.631561	.724642	.19676	.643837
.5	.485272	.635417	.694562	.18123	.637507
2.0	.465073	.654174	.579152	.11620	.609756
3	.434162	.688635	.443089	.02530	.567934
4	.411243	.719243	.363984	0.962485	.537274
5	.393277	.746662	.311545	.915179	.513388
6	.378632	.771498	.273912	.877614	.493996
7	.366352	.794224	.245425	.846681	.477778
8	.355829	.815201	.223014	.820534	.463910
9	.346659	.834704	.204862	.797985	.451843
10	.338558	.852950	.189819	.778229	.441196

Пусть x_1 и x_2 — начало и конец одного из участков поверхности, в x_1 параметры пограничного слоя известны, нужно определить их в x_2 . Проводим через x_1 и x_2 поверхность из семейства (1.2). Тогда

$$\frac{r_2}{r_1} = \left(\frac{x_2 + x_0}{x_1 + x_0} \right)^m = \left(1 + \frac{x_2 - x_1}{x_1 + x_0} \right)^m \quad (4.2)$$

Так как $r' = mr / (x + x_0)$, то из (4.1) получим

$$1 / (x_1 + x_0) = C^2 v / \omega m r_1 \Delta_{y1}^2 \quad (4.3)$$

Подставив это выражение в (4.2) и обозначив

$$Z = \frac{x_2 - x_1}{r_1} \frac{v}{\omega \Delta_{y1}^2}$$

$$\Lambda = \frac{r_2 - r_1}{x_2 - x_1} \left(\Delta_{y1}^2 \frac{\omega}{v} \right) \quad (4.4)$$

получим формулу

$$\Lambda = [(1 + ZC^2 / m)^m - 1] : Z \quad (4.5)$$

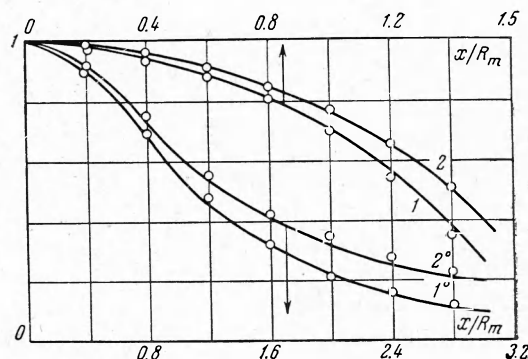
По известным значениям $C(\beta)$ можно построить по этой формуле серию кривых $\Lambda(\beta)$ для различных значений Z (фиг. 7). Аналогично формуле (4.3) можно написать

$$\left(\Delta_{y1}^2 \frac{\omega}{v} \right)_2 = \frac{C^2}{mr_2} (x_2 + x_0)$$

а затем исключить отсюда x_0 по (4.3). Тогда получим окончательно

$$\left(\Delta_{y1}^2 \frac{\omega}{v} \right)_2 = \left(\Delta_{y1}^2 \frac{\omega}{v} \right)_1 \frac{r_1}{r_2} (1 + ZC^2 / m) \quad (4.6)$$

Определив по значениям x_1, x_2, r_1, r_2 и безразмерной условной толщине пограничного слоя $(\Delta_{y1}^2 \omega / v)$ в точке x_1 значения Z и Λ по (4.4), находим при помощи фиг. 7 соответствующее значение β , которому однозначно соответствует число C^2 / m . Тогда по формуле (4.6) можно определить толщину пограничного слоя в точке x_2 и т. д. Таким образом, переходя от точки к точке, можем, кроме Δ_{y1} , по найденным значениям β определить все остальные характеристики пограничного слоя, в частности, составляющие



Фиг. 8

напряжения трения

$$\frac{\tau_x}{\rho (r\omega)^2} = \bar{F}'(0) \left(\frac{vr^*}{r^2\omega} \right)^{1/2}, \quad \frac{\tau_y}{\rho (r\omega)^2} = G'(0) \left(\frac{vr^*}{r^2\omega} \right)^{1/2} \quad (4.7)$$

толщину вытеснения

$$\delta_y^* = \int_0^\infty G d\zeta \left(\frac{v}{\omega r^*} \right)^{1/2} \quad (4.8)$$

и профили скоростей.

Разумеется, настоящий метод применим для поверхностей, у которых $r^* \neq 0$.

Заметим, что аналогичный метод для плоских течений предложен был ранее Смитом [10].

Сравним результаты расчета по настоящему методу с другими методами. Расчет пограничного слоя на вращающемся шаре методом интегральных соотношений был проведен Хауартом [2], Нигамом [3] и автором [4]. Было показано, что предположение Нигамы о постоянстве толщины пограничного слоя не оправдано. Это подтверждено опытами Кобаши [11]. Результат Нигамы о «прорыве» пограничного слоя вдали от экватора также не оправдан. Последние опыты Боудена и Лорда [12] показали, что такого «прорыва» не существует, от экватора исходит тонкая радиальная струя, являющаяся результатом соударения количеств жидкости, притекающих от обоих полушарий.

Подсчитаем отношения местных значений составляющих напряжения поверхностного трения на текущем радиусе r к соответствующим значениям для диска (обозначается индексом $^\circ$ вверху) на том же радиусе r и тех же ω , ρ , v . Полученные настоящим методом величины (точки на фиг. 8) хорошо согласуются с результатами расчета интегральным методом [4] (сплошные линии): как для τ_x / τ_x° (линия 1), так и для τ_y / τ_y° (линия 2). Следует, однако, заметить, что сами безразмерные составляющие напряжений трения (4.7) определяются настоящим методом более точно.

Аналогичный расчет был проведен для полутела вращения, форма которого образуется наложением однородного потока на поток от пространственного источника. Результат также хорошо согласуется с расчетом по методу интегральных соотношений [4] (линии 1 $^\circ$ и 2 $^\circ$).

Поступила 8 I 1964

ЛИТЕРАТУРА

1. Д о р ф м а н Л. А. Гидродинамическое сопротивление и теплоотдача вращающихся тел. Физматгиз, 1960.
2. H o w a r t h L. Note on the boundary layer on a rotating sphere. Philos. Mag., 1951, vol. 42, No. 334.
3. N i g a m S. D. Note on the boundary layer on a rotating sphere. Z. angew. Math. und Phys., 1954, S. 151—165.
4. Д о р ф м а н Л. А. Скоростной и тепловой пограничные слои на осесимметричном теле, вращающемся в неограниченной неподвижной среде. Изв. АН СССР, ОН, Механика и машиностроение, 1962, № 6.
5. Г а й с Т. Подобные пограничные слои на телах вращения. Сб. «Проблема пограничного слоя и вопросы теплопередачи» (перевод), Госэнергоиздат, 1960.
6. C o c h r a n W. G. The flow due to rotating disc. Proc. Cambridge Philos. Soc., 1934, vol. 30, No. 3.
7. S p a r r o w E. M. and G r e g g J. L. Mass transfer, flow, and heat transfer about a rotating disk. Journal of Heat Transfer (Transactions of the ASME, ser. C), 1960, No. 4.
8. R o g e r s M. H. and L a n c e G. M. The rotationally symmetric flow of a viscous fluid in the presence of a infinite rotating disk. J. Fluid Mech., 1960, vol. 7, p. 4.
9. Л а н с Д ж. Н. Численные методы для быстродействующих вычислительных машин. Изд. иностр. лит., 1960.
10. S m i t h A. M. O Rapid laminar boundary-layer calculations by piecewise application of similar solutions. J. Aeronaut. Sci., 1956, No. 10.
11. К о б а ш и Y. Measurement of boundary layer of a rotating sphere. J. Sci. Hiroshima Univ., 1957, vol. 20, No. 3.
12. B o w d e n F. P. and L o r d R. G. The aerodynamic resistance to a sphere rotating at high speed. Proc. Roy. Soc. A, 1963, vol. 271, No. 1345.