Теплофизика и аэромеханика, 2011, том 18, № 3

УДК 532.613.4, 532.517

Применение неразрывной модели для силы поверхностного натяжения к задаче неустойчивости Рэлея–Тейлора*

С.Н. Яковенко[1,2], **К.С. Чан**[3]

[1]*Институт теоретической и прикладной механики им. С.А. Христиановича СО РАН, Новосибирск*

[2]*Новосибирский государственный университет*

[3]*Национальный Чэн-Гун университет, Тайнань, Тайвань*

E-mail: yakovenk@itam.nsc.ru

Эффект поверхностного натяжения вводится согласно неразрывной модели для силы поверхностного натяжения. Плавное изменение сглаженной функции объемной фракции (функции-колера) поперек поверхности раздела несмешивающихся текучих сред происходит за счет свертки исходной функции-колера со сглаживающей функцией ядра (smooth kernel). Сформулированный для плоских двумерных течений, ограниченных твердыми границами или плоскостями симметрии, полиномиальный кернель восьмого порядка тестируется для задачи неустойчивости Рэлея–Тейлора.

Ключевые слова: неустойчивость Рэлея–Тейлора, модель поверхностного натяжения, функция объемной фракции.

ВВЕДЕНИЕ

В настоящей работе поверхностное натяжение параметризуется объемными силами согласно неразрывной модели силы поверхностного натяжения CSF (continuum surface force) [1], с использованием коэффициента поверхностного натяжения σ и сглаженной функции объемной фракции (функции-колера). Плавное изменение этой функции поперек поверхности раздела несмешивающихся сред достигается путем свертки объемной фракции с интерполяционной функцией **K**. Свойства **K** (компактность, монотонное уменьшение, симметрия, дифференцируемость, нормальность, ограниченное поведение) и некоторые примеры ее выбора представлены в работе [1].

В частности, в работе [2] новая простая полиномиальная форма восьмого порядка для функции ядра успешно применена к моделированию сферической капли в статическом равновесии и показана работоспособность этой модификации для

* Работа выполнена при финансовой поддержке Национального Научного Совета Тайваня (NSC, R.O.C.) (грант по контракту NSC-92-2212-E006-102), РФФИ (грант 09-05-00004-а) и СО РАН (Междисциплинарный интеграционный проект № 23, 2009).

круговых и сферических поверхностей раздела в бесконечной области. В настоящей работе сформулировано выражение свертки с этой функцией ядра для плоских двумерных течений, ограниченных твердыми границами или плоскостями симметрии. Это выражение тестируется в задаче неустойчивости Рэлея–Тейлора (НРТ). НРТ-течение является классической задачей гидродинамики свободной поверхности, выбранной также и в других теоретических [3], экспериментальных [4] и численных [1, 5–11] исследованиях.

1. ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Основные уравнения для двумерного ламинарного течения двух текучих несжимаемых сред, учитывающие эффекты поверхностного натяжения, имеют следующий вид:

$$\frac{\partial U}{\partial x}+\frac{\partial V}{\partial y}=0, \tag{1}$$

$$\frac{\partial U}{\partial t}+\frac{\partial U^2}{\partial x}+\frac{\partial UV}{\partial y}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial x}\left[\eta\left(2\frac{\partial U}{\partial x}\right)\right]+\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial y}\left[\eta\left(\frac{\partial U}{\partial y}+\frac{\partial V}{\partial x}\right)\right]+F_U^S, \tag{2}$$

$$\frac{\partial V}{\partial t}+\frac{\partial UV}{\partial x}+\frac{\partial V^2}{\partial y}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial x}\left[\eta\left(\frac{\partial V}{\partial x}+\frac{\partial U}{\partial y}\right)\right]+\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial y}\left[\eta\left(2\frac{\partial V}{\partial y}\right)\right]-g+F_V^S, \tag{3}$$

$$\rho=\rho_1 f+\rho_2\left(1-f\right),\quad \eta=\eta_1 f+\eta_2\left(1-f\right), \tag{4}$$

$$\frac{\partial f}{\partial t}+\frac{\partial\left(Uf\right)}{\partial x}+\frac{\partial\left(Vf\right)}{\partial y}=0, \tag{5}$$

где U и V — горизонтальная и вертикальная компоненты вектора скорости соответственно, x и y — горизонтальная и вертикальная координаты соответственно, g — ускорение силы тяжести, η — динамическая вязкость, ρ — плотность, p — давление, t — время. Значения ρ_1 и η_1 соответствуют более тяжелой жидкости при $f=1$, тогда как значения ρ_2 и η_2 — более легкой жидкости (газу) при $f=0$.

В уравнениях для скорости эффекты поверхностного натяжения вводятся как объемные силы в согласии с CSF-моделью [1], где модифицированное выражение объемной силы (для общего трехмерного случая) формулируется как $F_i^S=\dfrac{\sigma\kappa}{\rho\left[f\right]}\dfrac{\partial\tilde{f}}{\partial x_i}$, $\left[f\right]=f_2-f_1=1$. Здесь σ — коэффициент поверхностного натяжения между жидкостями 1 и 2, $\kappa=-(\partial\hat{n}_i/\partial x_i)$ — кривизна поверхности, $\hat{n}_i=\partial\tilde{f}/\partial x_i$ — единичный вектор по нормали к поверхности. Функцию сглаженной объемной фракции (функцию-колер) можно взять в первом приближении равной функции объемной фракции, найденной численно, в связи с возможным размазыванием за счет численных схем. Однако точное представление сглаженной функции-колера предполагает, что она изменяется плавно на толщине h поперек поверхности раздела посредством оператора свертки характеристической функции f с интерполяционной функцией (сглаживающего ядра) $\mathbf{K}$.

Таким образом, сглаженная функция объемной фракции задается выражением [1, 2]:

$$\tilde{f}\left(x_i\right)=\mathbf{K} * f\left(x_i\right)=\int_{\Omega_K} f\left(x_i'\right) \cdot \mathbf{K}\left(x_i-x_i'\right) \mathrm{d} x_1' \mathrm{d} x_2' \mathrm{d} x_3'. \tag{6}$$

В работе [2] введена новая формула полинома восьмого порядка для функции ядра, обозначаемого как $\mathbf{K}_8$:

$$\mathbf{K}_8(r, \varepsilon)=\begin{cases} C_K\left[1-(r / \varepsilon)^2\right]^4 & \text{при} \quad r<\varepsilon \\ 0 & \text{при} \quad r \geq \varepsilon \end{cases} \tag{7}$$

с условиями нормализации $\int_{\Omega_K} \mathbf{K}_8(r, \varepsilon) \mathrm{d} r=1,$ определяющими константу C_K. Параметр ε является радиусом области Ω_K, в которой $\mathbf{K}$ не равно нулю, а $r=\sqrt{\left(x_1'-x_1\right)^2+\left(x_2'-x_2\right)^2+\left(x_3'-x_3\right)^2}$. Простая форма $\mathbf{K}_8$ приводит к прозрачному для кодирования и эффективному алгоритму вычислений, что немаловажно, поскольку численная аппроксимация в (6) может требовать многочисленных оценок функции-ядра.

Для плоских двумерных течений свертка (6) может быть записана как

$$\tilde{f}(x, y)=\iint_{\Omega_K} f\left(x', y'\right) \mathbf{K}\left(x-x', y-y'\right) \mathrm{d} x' \mathrm{d} y', \tag{8}$$

где

$$\mathbf{K}\left(x-x', y-y'\right)=\mathbf{K}_8(r, \varepsilon)=\begin{cases} C_K\left[1-(r / \varepsilon)^2\right]^4 & \text{при} \quad r<\varepsilon \\ 0 & \text{при} \quad r \geq \varepsilon \end{cases} \tag{9}$$

и $r=\sqrt{\left(x'-x\right)^2+\left(y'-y\right)^2}$. Условие нормализации дает

$$1=\int_{\Omega_K} \mathbf{K}_8(r, \varepsilon) d x d y=\int_0^{\varepsilon} C_K\left[1-(r / \varepsilon)^2\right]^4 2 \pi r d r=\frac{\pi}{5} C_K \varepsilon^2 \quad \text{и} \quad C_K=\frac{5}{\pi \varepsilon^2}.$$

Для корректного определения сглаженной функции-колера $\tilde{f}(x, y)$ во всей (прямоугольной) вычислительной области, расположенной при $x_0 \leq x \leq x_N$ и $y_0 \leq y \leq y_N$, необходимо иметь значения $f\left(x', y'\right)$ в расширенной области $x_0-\varepsilon \leq x' \leq x_N+\varepsilon$ и $y_0-\varepsilon \leq y' \leq y_N+\varepsilon$. Следовательно, должны быть введены виртуальные значения f при $x_0-\varepsilon \leq x'<x_0$, $x_N<x' \leq x_N+\varepsilon$ и $y_0-\varepsilon \leq y'<y_0$, $y_N<y' \leq y_N+\varepsilon$. Это осуществляется путем соответствующего учета граничных условий. Пусть вертикальная плоская граница, расположенная при $x=x_0$, является плоскостью симметрии. Тогда вводится $f\left(x', y'\right)=f\left(2 x_0-x', y'\right)$ при $x_0-\varepsilon \leq x'<x_0$. С другой стороны, для границы в виде твердой стенки, расположенной при $x=x_0$, имеем $f\left(x', y'\right)=f\left(x_0, y'\right)$ при $x_0-\varepsilon \leq x'<x_0$ в предположении нулевой производной $(\partial f / \partial x)_{x=x_0}=0$ по нормали к стенке (при отсутствии информации о динамических контактных углах).

2. ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ И СХЕМЫ

Алгоритм решения уравнений Навье–Стокса приведен в работе [12], где он применялся к задаче о течении, возникающем при разрушении плотины, и результаты расчетов соответствовали данным лабораторных экспериментов. Шаг по времени может быть выбран достаточно малым, следуя схеме

$$\Delta t = \left[C_{t0}\left(1 - t/t_0\right) + t/t_0 \right]\Delta t^*, \quad (C_{t0}, t_0) = (0{,}1,\ 0{,}5) \quad \text{при} \quad t \le t_0,$$

$$\Delta t = \Delta t^* \quad \text{при} \quad t \ge t_0,$$

$$\Delta t^* = 0{,}01 \cdot \min\left\{ \frac{\delta}{U_r}, \frac{x_{i+1} - x_i}{U_{i+1/2,j}}, \frac{y_{j+1} - y_j}{V_{i,j+1/2}}, \frac{\rho \Delta x_i^2 \Delta y_j^2}{2\eta\left(\Delta x_i^2 + \Delta y_j^2\right)}, \sqrt{\delta^3 \frac{\rho_1 + \rho_2}{4\pi\sigma}} \right\},$$

$$\delta = \min\left\{ x_{i+1} - x_i,\ y_{j+1} - y_j \right\}.$$

Отметим, что последний член в выражении для Δt^* появляется согласно условию устойчивости, которое следует из ограничения на шаг по времени, налагаемого явной схемой для поверхностного натяжения.

В работе [12] представлена иерархия пяти численных схем для членов адвекции, применямых в уравнениях для объемной фракции и скорости. Показано, что противопоточная схема первого порядка и QUICK-схема третьего порядка не подходят для течений со свободной поверхностью, поскольку численная диффузия противопоточной схемы приводит к нереальной толщине поверхности раздела, а QUICK-схема — к существенным искажениям в виде ложных осцилляций. Поэтому в настоящей работе используются три остальные работоспособные схемы, содержащие MUSCL-схему с QUICK-интерполянтами и TVD-ограничителем (compressive minmod) [9] для U- и V-уравнений, в сочетании с той же схемой для f (обозначаемой как c4mm), или со схемой модификации наклона для f (обозначаемой как SMF), или с противопоточно-поточной схемой донор-акцептор (обозначаемой как VOF), а также подходящие аппроксимации [12] для диффузионных слагаемых и CSF-членов.

Для применяемой смещенной сетки последние члены должны быть определены в центрах граней вычислительной ячейки в уравнениях для компонент $U_{i\pm1/2,j}$ и $V_{i,j\pm1/2}$ вектора средней скорости из значений скаляра $\tilde{f}_{i,j}$, определенных в центре ячейки с координатами $\left(x_i, y_j\right)$:

$$\left(F_x^S\right)_{i+1/2,j} = \sigma \frac{\left(n_x\right)_{i+1/2,j}}{\rho_{i+1/2,j}} \kappa_{i+1/2,j} =$$

$$= \sigma \frac{\left(n_x\right)_{i+1/2,j}}{\rho_{i+1/2,j}} \left\{ -\frac{\left(\hat{n}_x\right)_{i+1,j} - \left(\hat{n}_x\right)_{i,j}}{x_{i+1} - x_i} - \frac{\left(\hat{n}_y\right)_{i+1/2,j+1/2} - \left(\hat{n}_y\right)_{i+1/2,j-1/2}}{y_{j+1/2} - y_{j-1/2}} \right\},$$

$$\left(F_y^S\right)_{i,j+1/2} = \sigma \frac{\left(n_y\right)_{i,j+1/2}}{\rho_{i,j+1/2}} \kappa_{i,j+1/2} =$$

$$= \sigma \frac{\left(n_y\right)_{i,j+1/2}}{\rho_{i,j+1/2}} \left\{ -\frac{\left(\hat{n}_x\right)_{i+1/2,j+1/2} - \left(\hat{n}_x\right)_{i-1/2,j+1/2}}{x_{i+1/2} - x_{i-1/2}} - \frac{\left(\hat{n}_y\right)_{i,j+1} - \left(\hat{n}_y\right)_{i,j}}{y_{j+1} - y_j} \right\},$$

где

$$\left(\hat{n}_x\right)_{i,j} = \frac{\left(n_x\right)_{i,j}}{\left|\vec{n}\right|_{i,j}}, \quad \left(\hat{n}_y\right)_{i,j} = \frac{\left(n_y\right)_{i,j}}{\left|\vec{n}\right|_{i,j}},$$

$$\left(\hat{n}_x\right)_{i+1/2,j+1/2} = \frac{\left(n_x\right)_{i+1/2,j+1/2}}{\left|\vec{n}\right|_{i+1/2,j+1/2}}, \quad \left(\hat{n}_y\right)_{i+1/2,j+1/2} = \frac{\left(n_y\right)_{i+1/2,j+1/2}}{\left|\vec{n}\right|_{i+1/2,j+1/2}},$$

$$\left|\vec{n}\right|_{i,j} = \sqrt{\left(n_x\right)_{i,j}^2 + \left(n_y\right)_{i,j}^2}, \quad \left|\vec{n}\right|_{i+1/2,j+1/2} = \sqrt{\left(n_x\right)_{i+1/2,j+1/2}^2 + \left(n_y\right)_{i+1/2,j+1/2}^2},$$

$$\left(n_x\right)_{i,j} = \frac{1}{2}\left[\left(n_x\right)_{i+1/2,j} + \left(n_x\right)_{i-1/2,j}\right], \quad \left(n_y\right)_{i,j} = \frac{1}{2}\left[\left(n_y\right)_{i,j+1/2} + \left(n_y\right)_{i,j-1/2}\right],$$

$$\left(n_x\right)_{i+1/2,j+1/2} = \frac{1}{2}\left[\left(n_x\right)_{i+1/2,j} + \left(n_x\right)_{i+1/2,j+1}\right],$$

$$\left(n_y\right)_{i+1/2,j+1/2} = \frac{1}{2}\left[\left(n_y\right)_{i,j+1/2} + \left(n_y\right)_{i+1,j+1/2}\right],$$

$$\left(n_x\right)_{i+1/2,j} = \frac{\tilde{f}_{i+1,j} - \tilde{f}_{i,j}}{x_{i+1} - x_i}, \quad \left(n_y\right)_{i,j+1/2} = \frac{\tilde{f}_{i,j+1} - \tilde{f}_{i,j}}{y_{j+1} - y_j}.$$

3. ПРИМЕНЕНИЕ К ЗАДАЧЕ НЕУСТОЙЧИВОСТИ РЭЛЕЯ–ТЕЙЛОРА

Сформулированные выше численные методы тестируются при расчетах неустойчивости Рэлея–Тейлора. Начальное состояние течения схематично показано на рис. 1. Основные условия вычислений следуют тестовому случаю НРТ-задачи из работы [5]: L = 0,02, $H = 1{,}5L$, g = 1, $\rho_1 = 2$, $\rho_2 = 1$. Коэффициенты вязкости и поверхностного натяжения варьировались (см. табл.). Все переменные обезразмерены при использовании характерных величин $\rho_r = \rho_1$, $\eta_r = \eta_1 = \rho_1 \nu$, $L_r = L$, $U_r = \sqrt{gL}$, $t_r = \sqrt{L/g}$, дающих следующее характерное число Рейнольдса: $\mathrm{Re}_r = \dfrac{\rho_r U_r L_r}{\eta_r} = \dfrac{\sqrt{gL^3}}{\nu}$.

Начальные условия выбираются теми же, что и в [5, 6, 9–11]. На поверхности раздела текучих сред вводится возмущение с единственной длиной волны и амплитудой A при использовании во всей вычислительной области распределения вертикальной скорости вида

$$V\left(x, y, 0\right) = \alpha \cdot \cos\left(\pi \frac{x}{L}\right) \exp\left(-\pi \frac{|y|}{L}\right), \quad \alpha = \frac{\pi}{2}\frac{\delta}{L} A$$

Рис. 1. Схема задачи НРТ (начальное состояние).

Таблица

Этапы численных исследований, перечисленные как варианты

Вариант	A	Re_m	σ	Кернель	Схема адвекции
1	1,00	800	0	без **K**	c4mm
2	0,50	800	0	без **K**	c4mm
3	0,20	800	0	без **K**	c4mm
4	0,10	800	0	без **K**	c4mm
5	**0,05**	800	0	без **K**	c4mm
6	0,02	800	0	без **K**	c4mm
7	0,05	176	0	без **K**	c4mm
8	0,05	72	0	без **K**	c4mm
9	0,05	39	0	без **K**	c4mm
10	0,05	20	0	без **K**	c4mm
11,12,13	0,05	**400**	0	без **K**	c4mm, SMF, VOF
14,15,16	0,05	400	0,000010	без **K**	c4mm, SMF, VOF
17,18,19	0,05	400	0,000020	без **K**	c4mm, SMF, VOF
20,21,22	0,05	400	0,000030	без **K**	c4mm, SMF, VOF
23,24,25	0,05	400	0,000035	без **K**	c4mm, SMF, VOF
26,27,28, 29,30,31	0,05	400	0,0000330, 360, 370, 0,0000375, 380, 382	без **K**	c4mm
32,33,34, 35,36	0,05	400	0,0000330, 360, 370, 0,0000375, 377	без **K**	SMF
37,38,39, 40,41,42	0,05	400	0,0000400, 430, 450, 0,0000470, 475, 482	без **K**	VOF
43,44,45	0,05	400	0,000010	$\mathbf{K}_8$, ε = 0,1, 0,2, 0,4	c4mm
46,47,48	0,05	400	0,000020	$\mathbf{K}_8$, ε = 0,1, 0,2, 0,4	c4mm
49,50,51	0,05	400	0,000030	$\mathbf{K}_8$, ε = 0,1, 0,2, 0,4	c4mm
52,53,54	0,05	400	0,000035	$\mathbf{K}_8$, ε = 0,1, 0,2, 0,4	c4mm
55,56,57, 58,59,60,61	0,05	400	0,0000380, 390, 400, 0,0000405, 410, 413, 420	$\mathbf{K}_8$, ε = 0,1	c4mm
62,63,64, 65,66	0,05	400	0,0000380, 400, 410, 0,0000415, 419	$\mathbf{K}_8$, ε = 0,2	c4mm
67,68,69 70,71,72	0,05	400	0,0000400, 430, 435, 0,0000440, 443, 444	$\mathbf{K}_8$, ε = 0,4	c4mm

и следующих распределений для более тяжелой жидкости (при $y > 0$):

$$U(x,y,0) = \alpha \cdot \sin\left(\pi \frac{x}{L}\right) \exp\left(-\pi \frac{|y|}{L}\right), \quad f(x,y,0) = 1, \quad p(x,y,0) = -\rho_1 g y$$

и для более легкой жидкости (при $y < 0$):

$$U(x,y,0) = -\alpha \cdot \sin\left(\pi \frac{x}{L}\right) \exp\left(-\pi \frac{|y|}{L}\right), \quad f(x,y,0) = 0,$$

$$p(x,y,0) = -\rho_2 g y,$$

за исключением узкой переходной области между двумя жидкостями (при $y = 0$), где $f(x,y,0) = 0,5$. Начальное распределение скорости является консервативной формой [5, 6] (неконсервативного) синусоидального возмущения вертикальной скорости амплитуды A с длиной волны $\lambda = 2L$, возникающего на поверхности раздела при задании $V(x,y,0) = \alpha \cdot \cos\left(\pi \frac{x}{L}\right)$. Отметим, что можно сформулировать модифицированное число Рейнольдса $\mathrm{Re}_m = \dfrac{\rho_r U_\lambda \lambda}{\eta_r} = \dfrac{\sqrt{g\lambda^3}}{\nu}$, используя длину волны в характерных масштабах скорости и длины. Начальное распределение давления соответствует гидростатическому распределению, а отрицательные значения давления не являются проблемой в расчетах из-за наличия только производных давления в уравнениях для скорости. Кроме того, основной интерес представляет эволюция поверхности раздела, а не величины давления и скорости. Начальное распределение объемной фракции задается таким, чтобы из уравнения (4) получилось показанное на рис. 1 поле плотности.

Левая и правая вертикальные границы выбираются в виде плоскостей симметрии, тогда как верхняя и нижняя горизонтальная границы полагаются твердыми стенками. Граничные условия для давления получаются из уравнений для компоненты скорости, нормальной к границе [9–12], при этом используются виртуальные значения в фиктивных ячейках, окружающих сетку [12]. Объемная фракция на стенках экстраполируется из внутренней части течения [9–12], а нормальная к границе скорость полагается равной нулю.

4. РЕЗУЛЬТАТЫ ЧИСЛЕННЫХ ЭКСПЕРИМЕНТОВ

Следуя предшествующим работам [5, 6, 9–11], область вычислений простирается от $x = 0$ до $x = L$ (рис. 1), а верхняя и нижняя границы задаются при $y = -1{,}5L$ и $y = 1{,}5L$ соответственно. Для базовых вычислений [9–11] используется равномерная сетка 41×121 с $\delta = L/40$. В исследованиях по получению независимого от сетки решения [12] было показано, что такое разрешение оказывается достаточным. Основные этапы выполненных численных исследований перечислены в таблице как различные варианты и обсуждаются ниже.

Первая серия расчетов (см. варианты 1–6) была проведена с коэффициентом возмущения A, варьируемым от 1,00 до 0,02. Результаты моделирования показывают (рис. 2), что среднее значение y_f амплитуд «выброса» и «пузыря» (на правой и левой сторонах расчетной области на рис. 3) имеет отчетливо видимый

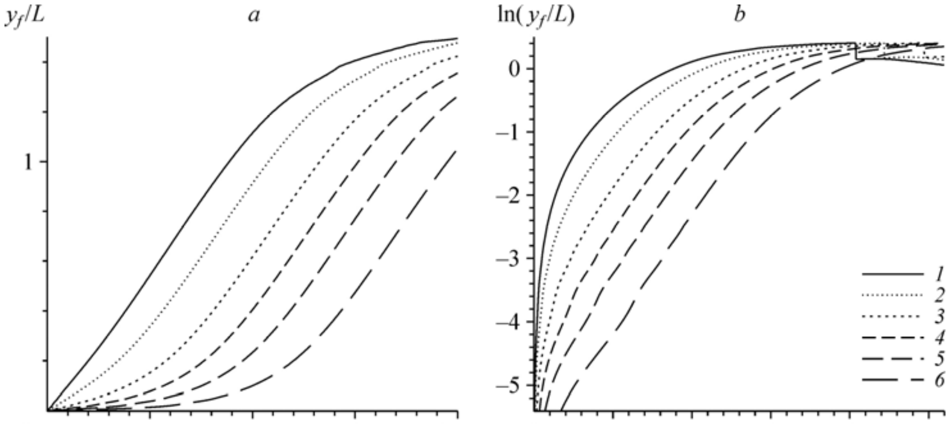

Рис. 2. Эволюция по времени среднего значения амплитуд “клина” и “пузыря” (*a*) и логарифма этого среднего значения (*b*) для вариантов 1–6 (с вариацией коэффициента *A*, при нулевом поверхностном натяжении).

Для (*a*, *b*) в расчетах со схемой c4mm: A = 1,00 (*1*), 0,50 (*2*), 0,20 (*3*), 0,10 (*4*), 0,05 (*5*), 0,02 (*6*).

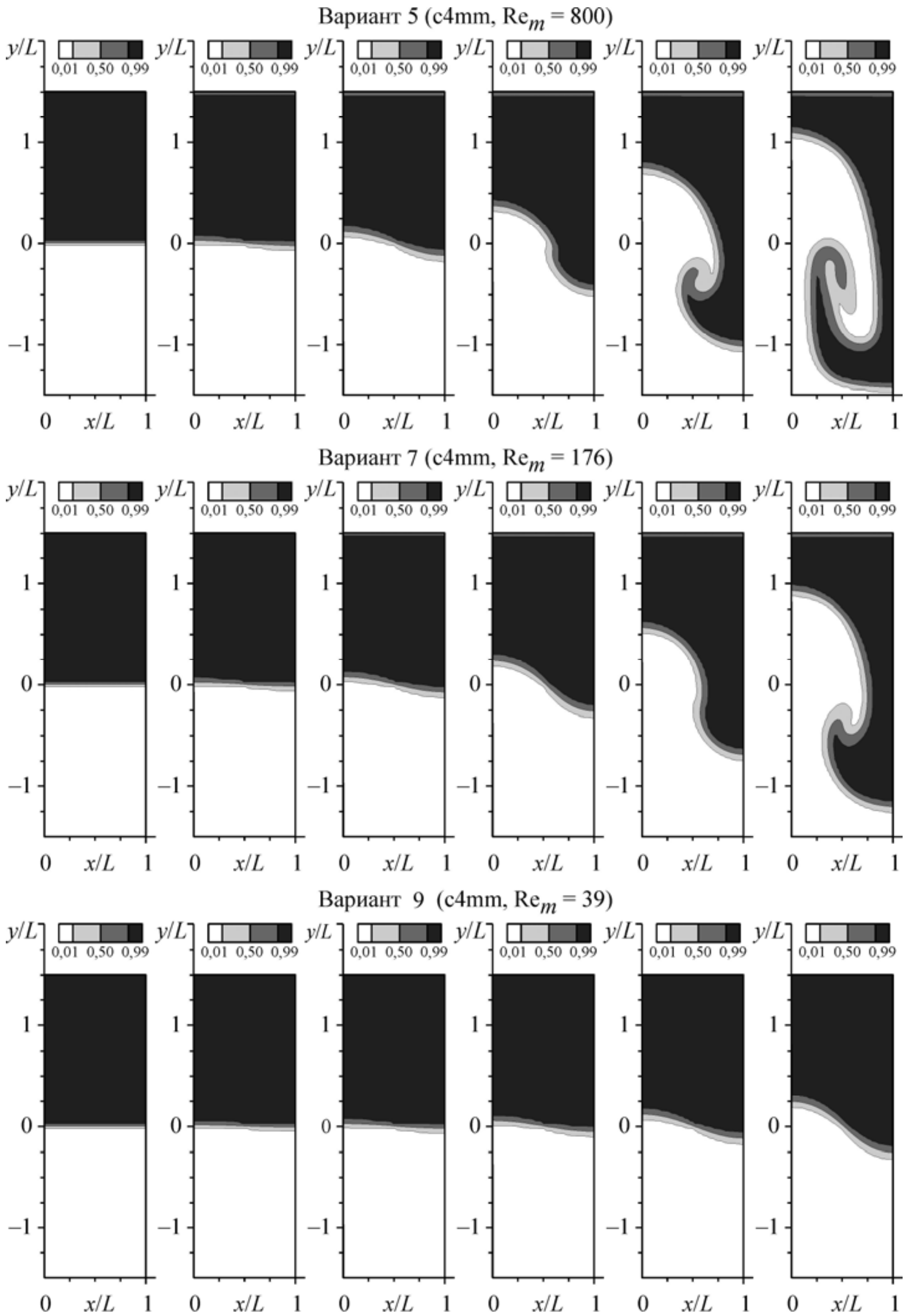

Рис. 3. Изолинии объемной фракции более тяжелой жидкости при t/t_r = 0,0; 1,6; 3,2; 4,8; 6,4; 8,0 для вариантов 5, 7, 9 (расчеты при различных числах Рейнольдса, с нулевым поверхностным натяжением).

экспоненциальный рост только при $A < 0,1$, реализуемый, в основном, при $-3 < \ln\left(y_f/L\right) < -2$. Этот этап соответствует линейной устойчивости [3, 5, 6], которая может быть определена соотношением $y_f \sim \exp\left(nt\right)$ или $\ln y_f \sim nt$. Таким

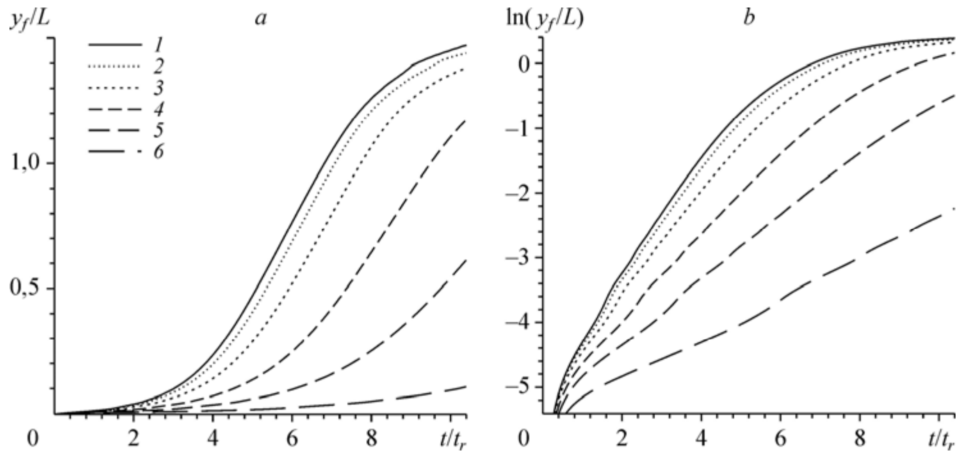

Рис. 4. Эволюция по времени среднего значения амплитуд "клина" и "пузыря" (*a*) и логарифма этого среднего значения (*b*) для вариантов 5, 7–11 (с вариацией Re, при нулевом поверхностном натяжении).

Для (*a*, *b*) в расчетах по схеме c4mm: Re_m = 800 (*1*), 400 (*2*), 176 (*3*), 72 (*4*), 39 (*5*), 20 (*6*).

образом, можно определить скорость роста $n = \dfrac{d(\ln y_f)}{dt}$ путем расчета приращения $\ln y_f$ на отрезке $-3 \le \ln\left(y_f / L\right) \le -2$. Эта скорость увеличивается с ростом числа Рейнольдса (рис. 4). Однако безразмерная скорость роста $n^* = n\left(\nu / g^2\right)^{1/3}$ демонстрирует немонотонное поведение (рис. 5) в полном соответствии с теоретическими оценками работы [3] и расчетами других авторов [5, 10, 11]. Отметим, что согласование результатов настоящей работы с теоретической кривой лучше, чем в вычислениях [9], где использовалась та же схема адвекции (c4mm), описанная в работе [12]. Можно также видеть (рис. 3), что вязкость демпфирует развитие НРТ. Эффекты различных схем адвекции (рис. 6) являются теми же, что и для задачи о разрушении плотины [12].

Эффект поверхностного натяжения заключается в задержке развития неустойчивости Рэлея–Тейлора (рис. 7) и скорости роста (рис. 8, 9). Это также полностью

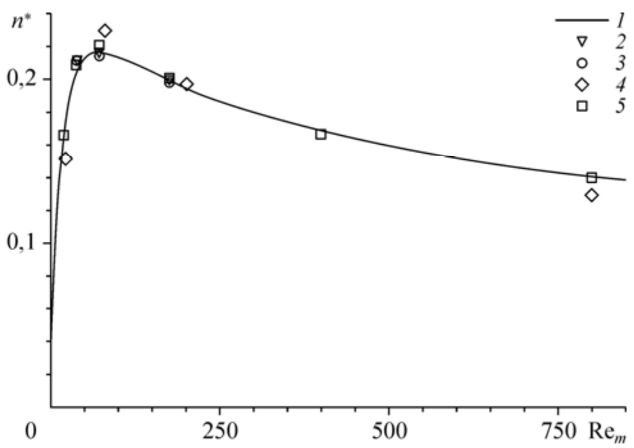

Рис. 5. Скорость роста неустойчивости Рэлея–Тейлора: теоретическая кривая [3] (*1*), данные вычислений [5] (*2*), расчетов по схеме SMF [10, 11] (*3*), c4mm [9] (*4*) и настоящей работы со схемой c4mm (*5*), построенные как точки (символы) для различных вариантов в зависимости от числа Рейнольдса.

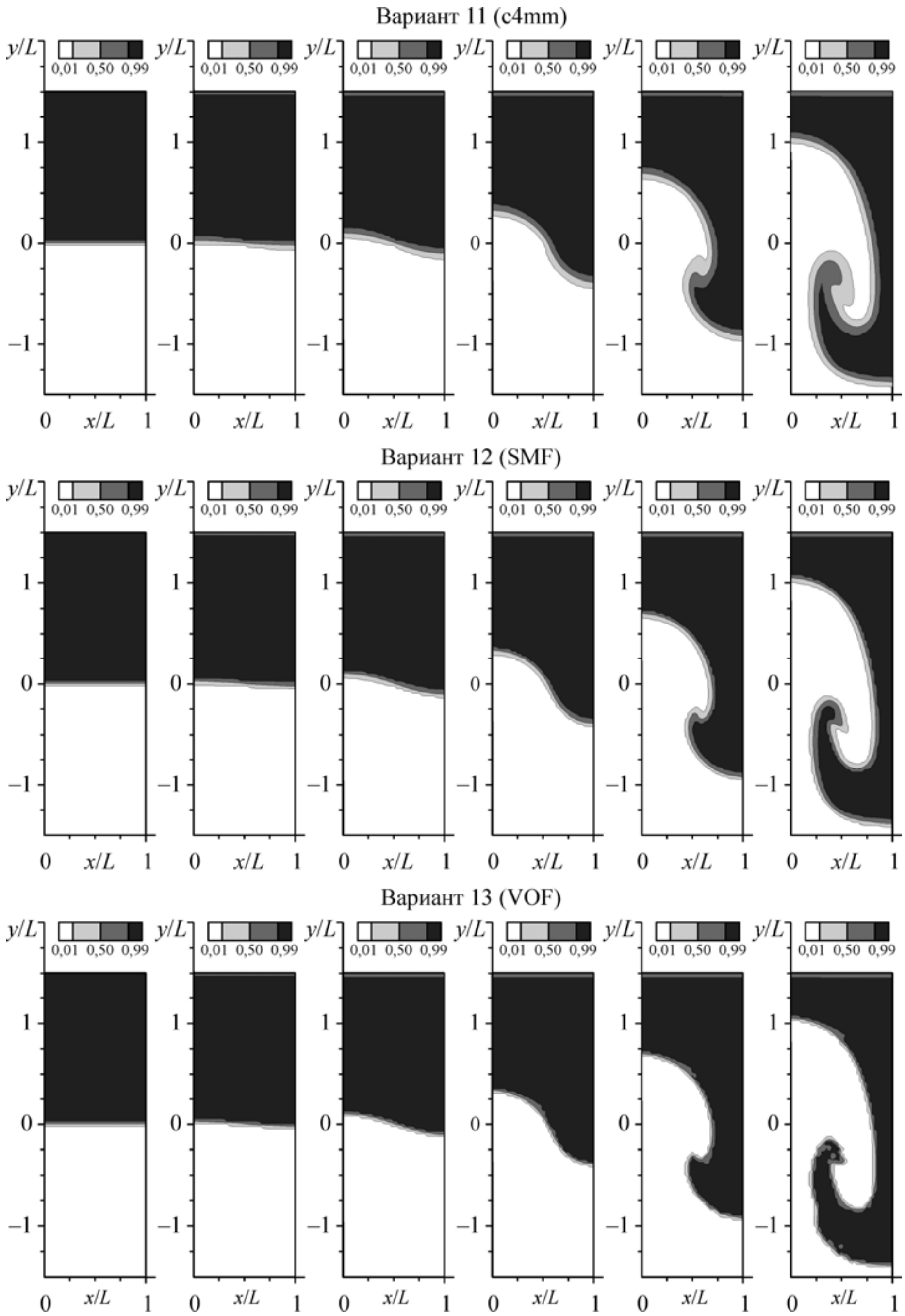

Рис. 6. Изолинии объемной фракции более тяжелой жидкости при t/t_r = 0,0; 1,6; 3,2; 4,8; 6,4; 8,0 для вариантов 11–13 (расчеты с различными схемами адвекции, без поверхностного натяжения).

согласуется с теоретической кривой из работы [3] и имеющимися данными лабораторных экспериментов и вычислений других авторов при $n/n_0 > 0,4$. В частности, и теоретические значения, и численные результаты настоящей работы и исследования с оригинальной CSF-моделью [1] расположены в пределах разброса эксперимен-

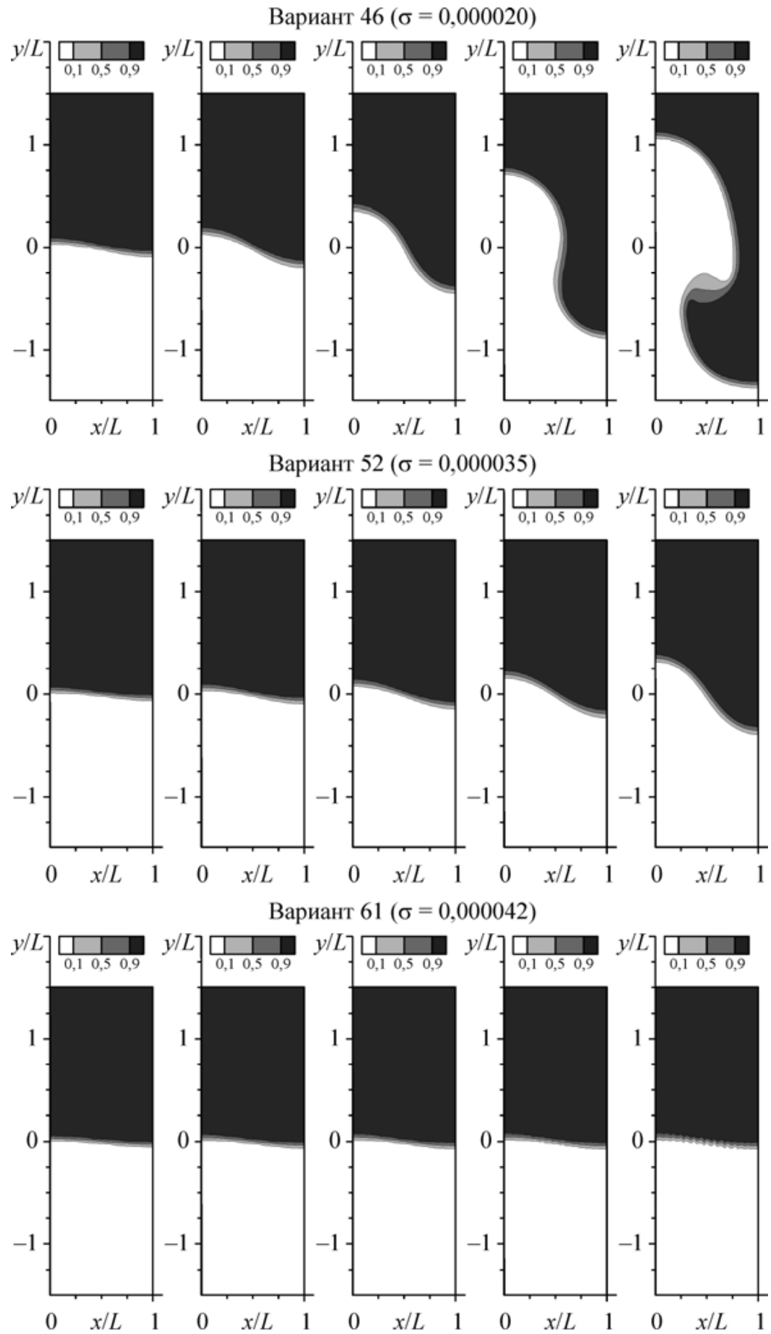

Рис. 7. Объемная фракция при t/t_r = 3,2; 4,8; 6,4; 8,0; 9,6 для вариантов 46, 52, 61 (с поверхностным натяжением).

тальных данных [4], тогда как данные расчетов [6] оказываются немного заниженными. При $n/n_0 \leq 0,4$ данные измерений отсутствуют, и скорость роста, вычисленная в [1], существенно завышена из-за некоторой численной диффузии поверхности раздела, определенной при помощи ALE-алгоритма. Эта дополнительная диффузия массы будет уменьшать скорость роста при $\Phi < 1$ и увеличивать ее (т. е.

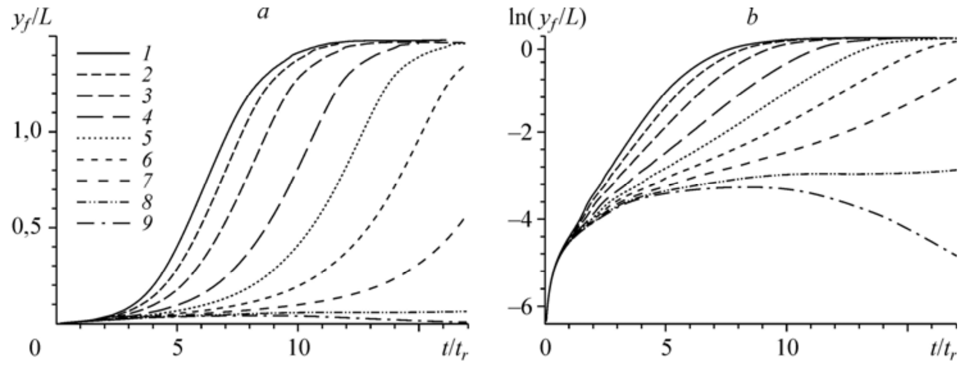

Рис. 8. Эволюция по времени среднего значения амплитуд “клина” и “пузыря” (*a*) и логарифма этого среднего значения (*b*) для различных вариантов с вариацией поверхностного натяжения: варианты 11, 43, 46, 49, 52, 55, 57, 60, 61 ($T \equiv \sigma \cdot 10^5$ = 0, 1,0, 2,0, 3,0, 3,5, 3,8, 4,0, 4,13, 4,20 (кривые *1*–*9*), соответственно) с $\mathbf{K}_8$, $\varepsilon = 0{,}1$.

дает дестабилизирующий эффект) при $\Phi > 1$ [1]. В настоящем исследовании в вычислениях без **K** при помощи VOF-схемы такой ложный эффект дестабилизации также заметен, тогда как другие адвективные схемы (SMF и c4mm) занижают скорость роста (рис. 9). Отметим, что использование кернель-функции с подходящей толщиной (при достаточно малом параметре $\varepsilon \sim 0{,}1$) дает существенное улучшение в расчетах.

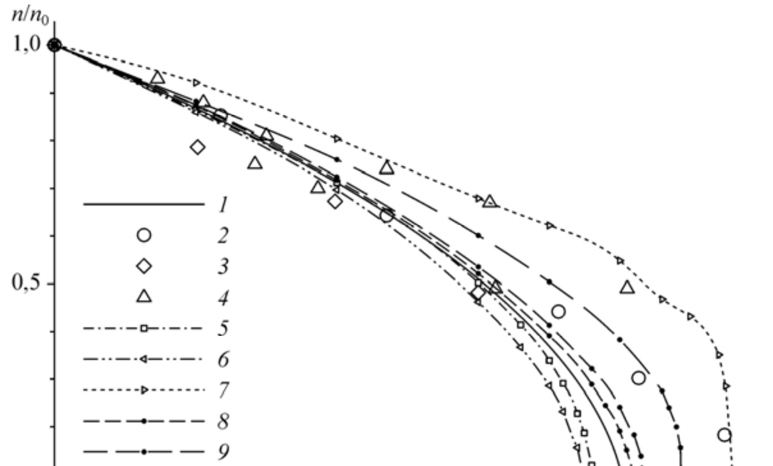

Рис. 9. Скорость роста неустойчивости Рэлея–Тейлора: теоретическая кривая [3] (*1*), данные расчетов [1, 6] (*2*, *3*), измерений [4] (*4*) и настоящей работы (*5*–*10*), построенные как точки (символы) для различных вариантов в зависимости от параметра устойчивости $\Phi = \dfrac{\sigma(\pi/L)^2}{(\rho_2-\rho_1)g}$, где $n = \dfrac{d(\ln y_f)}{dt} = n(\Phi)$ определяется на этапе линейной устойчивости, $n_0 = n(0)$. Расчеты без **K:** c4mm (*5*), SMF (*6*), VOF (*7*), по схеме c4mm с $\mathbf{K}_8$: при ε = 0,1 (*8*), 0,2 (*9*), 0,4 (*10*).

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей работе CSF-модель с полиномиальным кернелем восьмого порядка применяется в задаче неустойчивости Рэлея–Тейлора. Демпфирующие эффекты как вязкости, так и поверхностного натяжения описываются в полном соответствии с теоретическими формулами и данными лабораторных экспериментов. Для выяснения ограничений и возможностей CSF-модели использованный подход необходимо также применить к другим ламинарным и турбулентным течениям с заметными эффектами поверхностного натяжения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Brackbill J.U., Kothe D.B., Zemach C.** A continuum method for modeling surface tension // J. Comp. Phys. 1992. Vol. 100, Iss. 2. P. 335–354.
2. **Williams M.W., Kothe D.B., Puckett E.G.** Accuracy and convergence of continuum surface-tension method // Fluid Dynamics at Interface. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1999. P. 294–305.
3. **Chandrasekar S.** Hydrodynamic and hydromagnetic stability. Oxford: Clarendon Press, 1961. § 94. P. 441–453.
4. **Emmons H.W., Chang C.T., Watson B.C.** Taylor instability of finite surface waves // J. Fluid Mech. 1960. Vol. 7, Iss. 2. P. 177–193.
5. **Daly B.J.** Numerical study of two-fluid Rayleigh-Taylor instability // Phys. Fluids. 1967. Vol. 10, Iss. 2. P. 297–307.
6. **Daly B.J.** Numerical study of the effect of surface tension on interface instability // Phys. Fluids. 1969. Vol. 12, Iss. 7. P. 1340–1354.
7. **Hirt C.W., Nichols B.D.** Volume of fluid (VOF) method for the dynamics of free boundaries // J. Comp. Phys. 1981. Vol. 39, Iss. 1. P. 201–225.
8. **Rudman M.** Volume-tracking method for interfacial flow calculations // Int. J. Numerical Methods in Fluids. 1997. Vol. 24, Iss. 7. P. 671–691.
9. **Kelecy F.J., Pletcher R.H.** The development of a free surface capturing approach for multidimensional free surface flows in closed containers // J. Comp. Phys. 1997. Vol. 138, Iss. 2. P. 939–980.
10. **Chang C.-H.** The development of a multi-fluid surface-capturing method for the computation of incompressible free surface flows. Ph.D.Thesis. Tainan: NCKU, 1998.
11. **Pan D., Chang C.-H.** A free surface capturing method for incompressible multi-fluid flows // Proc. of the 3rd ASME/JSME Joint Fluids Engng Conf. 1999. FEDSM99-7105. P. 1–6.
12. **Яковенко С.Н., Чан К.С.** Аппроксимация потока объемной фракции в течении двух жидкостей // Теплофизика и аэромеханика. 2008. Т. 15, № 2. С. 181–199.

Статья поступила в редакцию 24 декабря 2007 г.,
после доработки 30 июня 2010 г.