ПМТФ, № 6, 1965

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ ТОЧНЫХ ЧАСТНЫХ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЙ ОКОЛОЗВУКОВЫХ ТЕЧЕНИЙ ГАЗА

Б. И. Заславский, Н. А. Клепикова

(*Новосибирск*)

Определяются точные частные решения уравнений околозвуковых течений газа, аналогичные решениям, найденным в работах [1-3] для уравнений коротких волн. Используя полученные решения, построено течение вокруг некоторого контура, обтекаемого сверхзвуковым потоком с присоединенным скачком уплотнения.

§ 1. Пусть u, v — проекции вектора скорости на оси xy декартовой системы координат; a — скорость звука; t — время; P_*, ρ_*, a_* — критические параметры потока; l — характерный размер; ε — некоторая малая величина. Введем также следующие обозначения

$$\frac{u}{a_*} = 1 - \varepsilon \frac{U}{\varkappa + 1}, \qquad \frac{v}{a_*} = \varepsilon^{3/2} \frac{V}{\varkappa + 1}, \qquad \frac{x}{a_* t_*} = \varepsilon X,$$

$$\frac{y}{a_* t_*} = \varepsilon^{1/2} Y, \qquad a_*^2 = \frac{p_* \varkappa}{\rho_*}, \qquad \tau = \frac{t}{2 t_*}, \qquad t_* = \frac{l}{\varepsilon a_*}$$

Уравнения нестационарных околозвуковых течений [4,5] имеют вид

$$\frac{\partial U}{\partial \tau} - U \frac{\partial U}{\partial X} + \frac{\partial V}{\partial Y} = 0, \qquad \frac{\partial U}{\partial Y} + \frac{\partial V}{\partial X} = 0 \tag{1.1}$$

Будем искать частные решения уравнений (1.1) в виде

$$\begin{aligned} U &= \varphi_2 (q, \tau) Y^2 + \varphi_1 (q, \tau) Y + \varphi_0 (q, \tau) \\ V &= \psi_3 (q, \tau) Y^3 + \psi_2 (q, \tau) Y^2 + \psi_1 (q, \tau) Y + \psi_0 (q, \tau) \\ X &= q Y^2 + \chi_1 (q, \tau) Y + \chi_0 (q, \tau) \qquad (q \text{ — параметр}) \end{aligned} \tag{1.2}$$

Подставляя (1.2) в (1.1), получаем систему дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка для определения функций φ_2, φ_1, φ_0, ψ_3, ψ_2, ψ_1, ψ_0, χ_1, χ_0, где индексами внизу обозначено дифференцирование по соответствующим аргументам

$$\varphi_{2\tau} - \varphi_2 \varphi_{2q} - 2q \psi_{3q} + 3\psi_3 = 0 \tag{1.3}$$

$$\varphi_{1\tau} + \varphi_{2\tau} \chi_{1q} - \varphi_{2q} \chi_{1\tau} - \varphi_1 \varphi_{2q} - \varphi_2 \varphi_{1q} + 2\psi_2 + 3\psi_3 \chi_{1q} - 2\psi_{2q} q - \chi_1 \psi_{3q} = 0$$

$$\begin{aligned} \varphi_{0\tau} + \varphi_{1\tau} \chi_{1q} + \varphi_{2\tau} \chi_{0q} - \varphi_{1q} \chi_{1\tau} - \varphi_{2q} \chi_{0\tau} - \varphi_{2q} \varphi_0 - \varphi_1 \varphi_{1q} - \varphi_2 \varphi_{0q} + \\ + \psi_1 + 2\psi_2 \chi_{1q} + 3\psi_3 \chi_{0q} - 2q \psi_{1q} - \chi_1 \psi_{2q} = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varphi_{0\tau} \chi_{1q} + \varphi_{1\tau} \chi_{0q} - \varphi_{0q} \chi_{1\tau} - \varphi_{1q} \chi_{0\tau} - \varphi_0 \varphi_{1q} - \varphi_1 \varphi_{0q} + \\ + \chi_{1q} \psi_1 + 2\psi_2 \chi_{0q} - 2q \psi_{0q} - \chi_1 \psi_{1q} = 0 \end{aligned}$$

$$\varphi_{0\tau} \chi_{0q} - \varphi_{0q} \chi_{0\tau} - \varphi_0 \varphi_{0q} + \psi_1 \chi_{0q} - \chi_1 \psi_{0q} = 0$$

$$2\psi_2 - 2q \varphi_{2q} + \psi_{3q} = 0$$

$$\varphi_1 + 2\varphi_2 \chi_{1q} - 2q \varphi_{1q} - \varphi_{2q} \chi_1 + \psi_{2q} = 0$$

$$\chi_{1q} \varphi_1 + 2\varphi_2 \chi_{0q} - 2q \varphi_{0q} - \varphi_{1q} \chi_1 + \psi_{1q} = 0$$

$$\varphi_1 \chi_{0q} - \varphi_{0q} \chi_1 + \psi_{0q} = 0$$

Следуя работе [1], систему (1.3) можно привести к виду (1.4)

$$\varphi_{2\tau} + 4q\varphi_2 + 3\psi_3 - \varphi_2\varphi_{2q} - 4q^2\varphi_{2q} = 0, \qquad \psi_1 = \varphi_{0q}(\varphi_2 + 4q^2) - \varphi_1\chi_1 - \varphi_{0\tau}$$

$$\psi_2 = {}^1/_2\,\varphi_{1q}(\varphi_2 + 4q^2) - \varphi_2\chi_1 - q\varphi_1 - {}^1/_2\,\varphi_{1\tau}, \qquad \psi_{0q} = \varphi_{0q}\chi_1 - \varphi_1\chi_{0q}$$

$$\chi_{1q}\varphi_2 + 4q^2\chi_{1q} - \chi_{1\tau} - \varphi_1 - 4q\chi_1 = 0, \qquad \psi_{2q} = \varphi_{2q}\chi_1 + 2q\varphi_{1q} - 2\varphi_2\chi_{1q} - \varphi_1$$

$$\chi_{0q}\varphi_2 + 4q^2\chi_{0q} - \chi_{0\tau} - \varphi_0 - \chi_1^2 = 0, \qquad \psi_{1q} = \varphi_{1q}\chi_1 + 2q\varphi_{0q} - 2\varphi_2\chi_{0q} - \varphi_1\chi_{1q}$$

Функция φ_2 определяется из уравнения

$$\varphi_{2\tau q} - \varphi_{2qq}(\varphi_2 + 4q^2) - \varphi_{2q}(\varphi_{2q} - 2q) - 2\varphi_2 = 0 \qquad (1.5)$$

Уравнение (1.5) имеет частные решения

$$\varphi_2 = A(\tau)\sqrt{q + B(\tau)} - D(\tau)\,q - \Phi(\tau), \qquad \varphi_2 = -q^2 + C(\tau)$$

Здесь $C(\tau)$ и $B(\tau)$ — произвольные функции, D и Φ зависят от выбора $B(\tau)$. В стационарном случае $A, B, C = \mathrm{const}$, общее решение уравнения (1.5) и его особый интеграл соответственно будут

$$\varphi_2 = 2A\sqrt{q + B} - 4Bq - 8B^2, \qquad \varphi_2 = -q^2 + C \qquad (1.6)$$

Положим $\varphi_{0q} = \varphi_{2q}\nu + \mu$, $\chi_{0q} = \nu$, $\varphi_{1q} = \varphi_{2q}\chi_{1q} + \xi$, $\chi_{1qq} = \eta$. Преобразованиями, аналогичными [1], система (1.4) приводится к виду

$$\mu_q(\varphi_2 + 4q^2) + 2\mu(\varphi_{2q} + 3q) - \mu_\tau - 2\xi\chi_1 = 0$$

$$\nu_q(\varphi_2 + 4q^2) + 8q\nu - \nu_\tau - \mu - 2\chi_1\chi_{1q} = 0$$

$$\xi_q(\varphi_2 + 4q^2) + 2\xi(\varphi_{2q} + q) - \xi_\tau = 0 \qquad (1.7)$$

$$\eta_q(\varphi_2 + 4q^2) + \eta(\varphi_{2q} + 12q) - \eta_\tau - \xi_q = 0$$

$$\psi_0 = \int(\varphi_{0q}\chi_1 - \varphi_1\chi_{0q})\,dq, \qquad \psi_2 = {}^1/_2\,\varphi_{1q}(\varphi_2 + 4q^2) - \varphi_2\chi_1 - q\varphi_1 - {}^1/_2\,\varphi_{1\tau}$$

$$\psi_1 = \varphi_{0q}(\varphi_2 + 4q^2) - \varphi_1\chi_1 - \varphi_{0\tau}, \qquad 3\psi_3 = \varphi_{2q}(\varphi_2 + 4q^2) - 4q\varphi_2 - \varphi_{2\tau}$$

Определение решений вида (1.2) сводится к интегрированию уравнения (1.5) и решению последовательно четырех уравнений.

§ 2. В стационарном случае общее решение системы (1.8) принимает вид

$$\xi = C\exp\left(-\int\frac{2(\varphi_2' + q)}{\varphi_2 + 4q^2}\,dq\right)$$

$$\eta = \exp\left(-\int\frac{\varphi_2' + 12q}{\varphi_2 + 4q^2}\,dq\right)\left[\int\frac{\xi'}{\varphi_2 + 4q^2}\exp\left(\int\frac{\varphi_2' + 12q}{\varphi_2 + 4q^2}\,dq\right)dq + C_1\right]$$

$$\mu = \exp\left(-\int\frac{2(\varphi_2' + 3q)}{\varphi_2 + 4q^2}\,dq\right)\left[\int\frac{2\xi\chi_1}{\varphi_2 + 4q^2}\exp\left(\int\frac{2(\varphi_2' + 3q)}{\varphi_2 + 4q^2}\,dq\right)dq + C_2\right] \qquad (2.1)$$

$$\nu = \exp\left(-\int\frac{8q}{\varphi_2 + 4q^2}\,dq\right)\left[\int\frac{\mu + 2\chi_1\chi_1'}{\varphi_2 + 4q^2}\exp\left(\int\frac{8q}{\varphi_2 + 4q^2}\,dq\right)dq + C_3\right]$$

Если $\varphi_2 = -q^2 + C$, то при ξ и μ, равных тождественно нулю, решения (2.1) определяют течение типа течения Прандтля — Майера, сопряженное с течением другого типа, причем линия перехода — прямая при $\nu \equiv 0$, $C = 0$ и отличная от прямой при $\nu \not\equiv 0$ — всегда проходит через особую точку. Таким образом, (2.1) определяют течение как в дозвуковой, так и в сверхзвуковой областях. При $C = 0$ выражения (2.1) имеют вид

При $\chi_1 = 0$, $\varphi_1 = 0$ функции φ_0, χ_0, ψ_1, ψ_3 определяются из уравнений

$$\varphi_0 = \chi_0'(\varphi_2 + 4q^2), \qquad \psi_1 = \varphi_0'(\varphi_2 + 4q^2), \qquad \nu_q(\varphi_2 + 4q^2) + 8q\nu - \mu = 0$$

$$\mu_q(\varphi_2 + 4q^2) + 2\mu(\varphi_2' + 3q) = 0, \qquad \psi_3 = {}^1/_3\,[\varphi_2'(\varphi_2 + 4q^2) - 4q\varphi_2]$$

$$(\chi_0 = \textstyle\int \nu\,dq)$$

Их общее решение при $\varphi_2 = 2A\sqrt{q+B} - 4Bq - 8B^2$ имеет вид

$$\mu = C|q+B|^{-5/6}|\varphi_2 + 4q^2|^{-1/3}$$
$$\nu = |q+B|^{1/6}|\varphi_2 + 4q^2|^{-4/3}[C_1\sqrt{q+B} - 2C]$$
$$\varphi_0 = |q+B|^{-5/6}|\varphi_2 + 4q^2|^{-4/3}[C_1\sqrt{q+B} - 2C](\varphi_2 + 4q^2)$$
$$\psi_1 = -\varphi_2'\varphi_0 - C|\varphi_2 + 4q^2|^{2/3}|q+B|^{-5/6}$$
$$\psi_3 = -{}^2/_3[\varphi_2'(\varphi_2 + 4q^2) - 2q\varphi_2]$$

§ 3. Уравнения осесимметричных течений в координатах

$$X = \frac{r}{a_* t_* \varepsilon}, \quad Y = \frac{r}{a_* t_*}\varepsilon^{-1/2}, \quad \tau = \frac{t}{2t_*}, \quad t_* = \frac{l}{\varepsilon a_*}$$

имеют вид [5]

$$\frac{\partial U}{\partial \tau} - U\frac{\partial U}{\partial X} + \frac{\partial V}{\partial Y} + \frac{V}{Y} = 0, \qquad \frac{\partial V}{\partial X} + \frac{\partial U}{\partial Y} = 0 \tag{3.1}$$

Уравнения (3.1) имеют класс точных частных решений вида

$$U = \varphi_2(q, \tau)Y^2 + \int(\varphi_{2q}\nu + \mu)\,dq, \qquad X = qY^2 + \int \nu\,dq$$
$$V = \psi_3(q, \tau)Y^3 + 2Y\int[-\varphi_2\nu + q\varphi_{2q}\nu + q\mu]\,dq \tag{3.2}$$

где функции φ_2, ν, μ определяются из уравнений

$$\nu_\tau - \nu_q(\varphi_2 + 4q^2) - 8q\nu + \mu = 0, \qquad \mu_\tau - \mu_q(\varphi_2 + 4q^2) - \mu(2\varphi_{2q} + 4q) = 0$$
$$\varphi_{2\tau q} - \varphi_{2qq}(\varphi_2 + 4q^2) - \varphi_{2q}(\varphi_{2q} - 4q) - 4\varphi_2 = 0$$
$$\psi_1 = -{}^1/_2[\varphi_{0\tau} - \varphi_{0q}(\varphi_2 + 4q^2)], \qquad \psi_3 = -{}^1/_4[\varphi_{2\tau} - \varphi_{2q}(\varphi_2 + 4q^2) + 4q\varphi_2]$$

В классе частных решений (3.2), в частности, содержит решение

$$U = -{}^2/_3 q^2Y^2 + C_1 q^{3/5} + {}^{10}/_3 C_2 q^{-2/5}, \qquad X = qY^2 - {}^3/_4 C_1 q^{-2/5} - {}^5/_7 C_2 q^{-7/5} + C_3$$
$$V = -{}^4/_9 q^3Y^3 + C_1 q^{8/5}Y - {}^{20}/_9 C_2 q^{3/5}Y \qquad (C_1,\ C_2,\ C_3 = \mathrm{const})$$

§ 4. Пусть профиль некоторого заостренного тела помещен в равномерный сверхзвуковой поток. Перед телом возникнет скачок уплотнения, на нем должны выполняться условия динамической совместности, которые в околозвуковом приближении имеют вид [4]

$$2\frac{\partial X}{\partial \tau} + U_1 + U + 2\left(\frac{\partial X}{\partial Y}\right)^2 = 0, \qquad (U - U_1)\frac{\partial X}{\partial Y} = V - V_1 \tag{4.1}$$

где $X = X(Y, \tau)$ — уравнение, определяющее положение скачка, U_1, V_1 — составляющие вектора скорости перед ним. Рассмотрим течения с присоединенным скачком, уравнение которого зададим в виде параболы

$$X = q_0Y^2 + 2Dq_0Y \tag{4.2}$$

Если течение нестационарно, то $q = q_0(\tau)$ и $D = D_0(\tau)$ — некоторые функции времени; течение будем строить при помощи частных решений (1.2). Эти решения не обладают степенью произвола, достаточной для точного удовлетворения всем граничным условиям на ударном фронте и контуре тела при его произвольной конфигурации, поэтому будем строить течение, совместное с (4.1), (4.2), а за стенки примем линию тока, проходящую через точку пересечения оси координат и ударного фронта.

Условия на скачке уплотнения (4.1), на котором $q = q_0$, накладывают следующие граничные условия на функции φ_0, φ_1, χ_0, χ_1 при $q = q_0$

$$\varphi_2 + 8q_0^2 = 0, \quad 20q - \varphi_{2q} = 0, \quad {}^1/_2\varphi_2\varphi_{1q} - 10q\varphi_1 = 0, \quad \varphi_1 - \varphi_2\chi_{1q} = 0$$
$$\varphi_{0q} - 4\chi_{1q}\chi_1 - 4q\chi_{0q} = 0, \qquad \varphi_0 - U_1 - \chi_{0q}\varphi_2 = 0, \qquad \psi_0 - \chi_1\chi_{0q}\varphi_2 = 0 \tag{4.3}$$

При $q_0 = q(\tau)$, условия совместности на скачке уплотнения имеют вид

$$dq / d\tau = -(\varphi_2 + 4q^2) + {}^1/_2\varphi_2$$

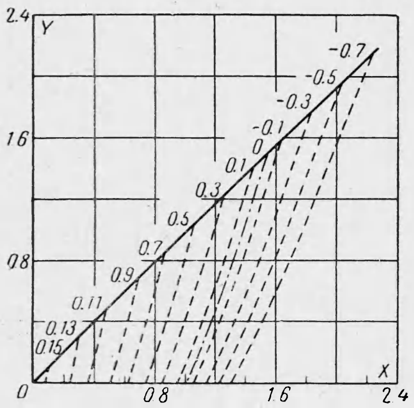
$$d\varphi_2 / d\tau = {}^1/_2\varphi_2 (\varphi_{2q} - 20q)$$

$$d\varphi_1 / d\tau = {}^1/_2\varphi_{1q}\varphi_2 - 6q\varphi_1 - 4\varphi_2\chi_1$$

$$\varphi_1 - \varphi_2\chi_{1q} = 0$$

$$d\varphi_0 / d\tau = {}^1/_2\varphi_2 (\varphi_{0q} - 4\chi_{1q}\chi_1 - 4q\chi_{0q})$$

$$\varphi_0 - U_1 - \chi_{0q}\varphi_2 = 0, \qquad \psi_0 - \chi_1\chi_{0q}\varphi_2 = 0$$



Будем рассматривать стационарный случай. Из (4.3) следует, что если перед ударным фронтом поток равномерный, то

$$\varphi_2 = -8q_0^2\varphi_2^{\vee}$$

$$\varphi_2^{\vee} = {}^{43}/_{121}\sqrt{12 - 11p} - {}^6/_{11}p + {}^{144}/_{121}$$

Таким образом, течение с ударной волной, заданной в виде параболы, имеет вид

$$U = -8q_0^2\varphi_2^{\vee}Y^2 - 16q_0^2D\varphi_2^{\vee}Y + \varphi_0 - 8q_0^2D^2\varphi_2$$

$$X = q_0pY^2 + 2Dq_0Yp - \frac{1}{4q_0}\int\limits_1^p \varphi_0(2\varphi_2^{\vee} - p^2)^{-1}\,dp + q_0pD^2 - q_0D^2 \qquad (4.4)$$

$$V = {}^{32}/_3 q_0^3 [\varphi_{2p}^{\vee}(2\varphi_2^{\vee} - p^2) + p\varphi_2^{\vee}](Y + D)^3 -$$
$$- 8q_0(Y + D)\{-{}^1/_3(\varphi_{2p}^{\vee} - p)\varphi_0 + U_1(2\varphi_2^{\vee} - p^2)^{2/3} \times$$
$$\times [(12 - 11p)^{1/3} + {}^2/_3(12 - 11p)^{-5/6}]\} + 32q_0^3D^2Y$$

$$\varphi_0 = -{}^1/_{11}U_1 |12 - 11p|^{1/6}(2\varphi_2^{\vee} - p^2)^{-1/3}[3\sqrt[3]{12 - 11p} + 8]$$

Произвольные постоянные C, D определяются по заданной скорости U_1 и углу наклона ударной волны в точке $Y = 0$. Из (4.1) и (4.4)

$$C = \frac{U_1}{4}, \qquad D = \frac{1}{2q_0}\frac{dX}{dY}$$

Здесь q_0 — свободный параметр, его можно выбрать так, чтобы линия перехода проходила через точку $X = 1, Y = 0$. На фигуре показано обтекание профиля для случая $U_1 = 2.16$, $dX / dY = 1$; пунктирными линиями показаны линии равных скоростей и давлений, сплошной линией — ударный фронт. Профиль тела в данном случае близок к профилю клина с заметным изгибом стенок в окрестности линии перехода.

Поступила 27 VII 19 5

ЛИТЕРАТУРА

1. Заславский Б. И. О нелинейном взаимодействии сферической ударной волны, возникшей в результате взрыва заглубленного заряда со свободной поверхностью воды. ПМТФ, 1964, № 4.
2. Березин О. А., Гриб А. А. Нерегулярное отражение плоской ударной волны в воде от свободной поверхности. ПМТФ, 1960, № 2.
3. Заславский Б. И. Некоторые частные решения уравнений «коротких» волн. ПМТФ, 1962, № 1.
4. Овсянников Л. В. Уравнения околозвукового движения газа. Вестн. Ленингр. ун-та, 1952, № 6.
5. Рыжов О. С., Шефтер Г. М. О нестационарных течениях газа в соплах Лаваля. Докл. АН СССР, 1959, № 3, т. 128.