ПМТФ, № 4, 1966

НЕЛИНЕЙНЫЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ЯВЛЕНИЯ В ЖИДКОСТИ С НЕРАВНОВЕСНОЙ ЭЛЕКТРОПРОВОДНОСТЬЮ В ПЕРЕМЕННОМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ

К. И. Ким

(Киев)

В данной заметке на основе [1] рассматриваются нелинейные электромагнитные явления в плотной плазме, обусловленные переменностью ее электропроводности с изменением электрического поля.

Зависимость электропроводности от величины электрического поля, как известно, вызывается следующими причинами. Электроны в процессе движения в электрическом поле получают энергию от поля, которая на длине свободного пробега может оказаться значительной. Однако передача этой энергии тяжелым частицам затрудняется. В одноатомных газах обмен энергии между электронами и тяжелыми частицами происходит в основном за счет упругих столкновений. Поэтому заметный отрыв электронной температуры, определяемой балансом энергии электронов с учетом потерь через излучение, оказывается возможным и при относительно слабых электрических полях. Напротив, в молекулярных газах основным механизмом обмена энергии является возбуждение вращательных и колебательных степеней свободы молекул. Поэтому энергия электронов в этих газах рассеивается относительно легко и сколько-нибудь заметное увеличение электронной температуры над атомной обычно не наблюдается.

В [2] дается понятие характерного «плазменного поля» E_p, которое для изотропной плазмы определяется соотношением

$$E_p = \sqrt{3kTme^{-2}\delta(\omega^2 + \nu_0^2)}$$

Здесь k — постоянная Больцмана, T — температура плазмы в отсутствие поля, m и e —масса и заряд электрона, δ — средняя доля энергии, передаваемая электроном тяжелой частице при соударении, ω — частота изменения поля, ν_0 — частота столкновений электронов с тяжелыми частицами при отсутствии поля.

В слабых электрических полях ($E \ll E_p$) плазма сохраняет термодинамическое равновесие и электропроводность плазмы не зависит от поля. В сильных электрических полях ($E \gg E_p$) происходит отрыв электронной температуры и вольт-амперная характеристика плазмы становится нелинейной.

Применительно к плазмам из одноатомных газов типа смеси аргона с калием вопрос о неравновесной электропроводности в значительной мере изучен [3-5]. В [3] показано, что для указанных плазм зависимость электропроводности от электрического поля в отсутствие магнитного удовлетворительно описывается степенной функцией от модуля плотности тока, т. е. $\sigma = c\,|\mathbf{j}|^\gamma$, где c — функция атомной температуры. Эта зависимость подтверждена и экспериментально для аргоно-калиевой плазмы при температуре порядка 0.2 *эв* и давлении порядка 1 *атм* [3].

Ниже рассматриваются электромагнитные явления в плотной плазме с электропроводностью типа $\sigma = c\,|\mathbf{j}|^\gamma$ при ее движении в бегущем магнитном поле. Предполагается, что параметры плазмы и пределы изменения отдельных величин ($\mathbf{j}$, T_e) таковы, что зависимость $\sigma = c\,|\mathbf{j}|^\gamma$ устойчива [4]. Кроме того, плазме приписываются свойства идеальной несжимаемой жидкости. Последние вместе с допущением о наличии градиента статического давления и пондеромоторных сил только в направлении движения плазмы, позволяют исходить из уравнений электродинамики.

1. Уравнения электромагнитного поля запишем в форме уравнения индукции

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{A} = \mu_0\sigma\left(-\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t} + \mathbf{u}\times\operatorname{rot}\mathbf{A}\right), \qquad \sigma = c\left|-\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t} + \mathbf{u}\times\operatorname{rot}\mathbf{A}\right|^{\frac{\gamma}{1-\gamma}} \qquad (1.1)$$

$$\operatorname{rot}\mathbf{A} = \mathbf{B}, \qquad \operatorname{div}\mathbf{A} = 0 \qquad (0<\gamma<1)$$

Введем безразмерные величины

$$\mathbf{A}^\times = \frac{\mathbf{A}}{A_0}, \quad \sigma^\times = \frac{\sigma}{\sigma_0}, \quad \mathbf{u}^\times = \frac{\mathbf{u}}{u_0}, \quad t^\times = 2\pi f_0 t$$

$$\mathrm{rot}^\times = \frac{\lambda_0}{2\pi}\,\mathrm{rot} \qquad \varepsilon_0 = \frac{\mu_0\sigma_0 f_0}{2\pi}\lambda_0{}^2 \tag{1.2}$$

Здесь λ_0 — длина характерной волны, u_0 — фазовая скорость этой волны при характерной частоте f_0,

$$\sigma_0 = cE_0{}^{\frac{\gamma}{1-\gamma}}, \qquad E_0 = 2\pi f_0 A_0 \tag{1.3}$$

Уравнение (1.1) получает вид (1.4)

$$-\mathrm{rot}^\times \mathrm{rot}^\times \mathbf{A}^\times = \varepsilon_0 \left| \frac{\partial \mathbf{A}^\times}{\partial t^\times} - \mathbf{u}^\times \times \mathrm{rot}^\times \mathbf{A}^\times \right|^{n-1} \left(\frac{\partial \mathbf{A}^\times}{\partial t^\times} - \mathbf{u}^\times \times \mathrm{rot}^\times \mathbf{A}^\times \right), \quad n = \frac{1}{1-\gamma}$$

Будем иметь в виду конфигурации, обладающие цилиндрической симметрией. Для них из (1.4) получим

$$\frac{\partial^2 A}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial \rho}\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}(\rho A) = \varepsilon_0 \left| \frac{\partial A}{\partial t} + u\frac{\partial A}{\partial x} \right|^{n-1} \left(\frac{\partial A}{\partial t} + u\frac{\partial A}{\partial x} \right) \tag{1.5}$$

Здесь принято, что вектор-потенциал в силу симметрии имеет только азимутальную компоненту, верхний индекс $\times$ отброшен.

В отношении задач, рассмотренных ниже, предполагается, что краевые условия имеют вид

$$A|_{\rho_1} = \varphi_1(x-t), \qquad A|_{\rho_2} = \varphi_2(x-t)$$

под которыми (φ_1, φ_2) в частном случае могут пониматься бегущие волны типа $\sin(x-t)$. Поэтому решения уравнения (1.5) будем искать в классе функций, в которые переменные x и t входят только в сочетании $\tau = x - t$. Тогда (1.5) можно переписать

$$\frac{\partial^2 A}{\partial \tau^2} + \frac{\partial}{\partial \rho}\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}(\rho A) = \delta\varepsilon_0 s^n \left(\frac{\partial A}{\partial \tau}\right)^n$$

$$s = u - 1, \qquad \delta = \left(\mathrm{sign}\,\frac{\partial A}{\partial \tau}\right)^{n-1} (\mathrm{sign}\, s)^{n-1} \tag{1.6}$$

Основываясь на общем методе получения инвариантно-групповых решений (H-решений), найдем H-решения уравнения (1.6) на однопараметрических подгруппах.

2. Заменим уравнение (1.6) равносильной системой

$$\frac{\partial u^1}{\partial x^1} + \frac{\partial u^2}{\partial x^2} - \delta\varepsilon_0 s^n \left(\frac{\partial u^3}{\partial x^1}\right)^n = 0, \qquad \frac{\partial u^3}{\partial x^1} - u^1 = 0$$

$$\frac{1}{x^2}\frac{\partial (x^2 u^3)}{\partial x^2} - u^2 = 0, \qquad x^1 = \tau,\ x^2 = \rho,\ u^3 = A \tag{2.1}$$

Вычислим инфинитезимальные операторы в однопараметрической группе, имеем

$$X = \xi_x{}^i \frac{\partial}{\partial x^i} + \xi_u{}^k \frac{\partial}{\partial u^k} \qquad (i = 1, 2;\ k = 1, 2, 3) \tag{2.2}$$

Решение определяющих уравнений дает следующие значения для координат допустимых операторов: (2.3)

$$\xi_x{}^1 = (1-n)c_0 x^1 + c_1, \qquad \xi_u{}^1 = c_0 u^1, \qquad \xi_u{}^3 = (2-n)c_0 u^3 + c_2 x^2 + \frac{c_3}{x^2}$$

$$\xi_x{}^2 = (1-n)c_0 x^2, \qquad \xi_u{}^2 = c_0 u^2 2c_2,$$

Здесь c_i — произвольные постоянные.

Таким образом, согласно (2.3), основная группа системы (2.1) порождается следующими линейно независимыми инфинитезимальными операторами: (2.4)

$$X_1 = (1-n)x^1 \frac{\partial}{\partial x^1} + (1-n)x^2 \frac{\partial}{\partial x^2} + u^1 \frac{\partial}{\partial u^1} + u^2 \frac{\partial}{\partial u^2} + (2-n)u^3 \frac{\partial}{\partial u^3}$$

$$X_2 = \frac{\partial}{\partial x^1}, \qquad X_3 = 2\frac{\partial}{\partial u^2} + x^2 \frac{\partial}{\partial u^3}, \qquad X_4 = \frac{1}{x^2}\frac{\partial}{\partial u^3}$$

Для отыскания всевозможных существенно различных решений ранга 1 необходимо найти оптимальную систему подгрупп первого порядка. Операторы, соответствующие этой системе и удовлетворяющие одновременно условию существования H-решений, оказываются такими:

$$X_1,\ X_2,\ X_2 + \alpha X_3,\ X_2 + \alpha X_4 \tag{2.5}$$

Здесь и далее α и α_1 — произвольные параметры.

Кроме операторов (2.5), по соображениям, которые станут очевидными из последующего, рассмотрим и несущественно различное решение ранга 1 на подгруппе

$$X_2 + \alpha X_3 + \alpha_1 X_4 \tag{2.6}$$

Ниже приводятся H-решения для отдельных подгрупп, за исключением одной, в отношении которой получить H-решение не удалось. Эти решения записываются для переменной $u^3 = A$ (переменные u^1, u^2 играют вспомогательную роль). Подгруппа, порождаемая оператором X, обозначена $H\,[X]$.

1. $H\,[X_1]$. Для этой подгруппы H-решение удовлетворяет уравнению

$$(1+\lambda^2)\frac{d^2\omega}{d\lambda^2} - \frac{n-3}{n-1}\lambda\frac{d\omega}{d\lambda} - \frac{2n-3}{(1-n)^2}\omega - \delta\varepsilon_0 s^n \left(\frac{d\omega}{d\lambda}\right)^n = 0 \tag{2.7}$$

$$\lambda = \frac{x^1}{x^2}, \qquad u^3 = (x^2)^{\frac{n-2}{n-1}}\omega$$

2. $H\,[X_2]$.

$$u^3 = \gamma_1 |x^2| + \gamma_2 |x^2|^{-1} \tag{2.8}$$

Здесь и всюду γ_1 и γ_2 — произвольные постоянные.

3. $H\,[X_2 + \alpha X_3]$.

$$u^3 = \delta\varepsilon_0 (s\alpha)^n \frac{(x^2)^{2+n}}{(1+n)(3+n)} + \alpha x^1 x^2 + \frac{\gamma_1}{x^2} + \gamma_2 x^2 \tag{2.9}$$

4. $H\,[X_2 + \alpha X_4]$.

$$u^3 = \delta\varepsilon_0 (s\alpha)^n \frac{(x^2)^{2-n}}{(1-n)(3-n)} + \alpha\frac{x^1}{x^2} + \frac{\gamma_1}{x^2} + \gamma_2 x^2 \tag{2.10}$$

5. $H\,[X_2 + \alpha X_3 + \alpha_1 X_4]$.

$$u^3 = \frac{M}{x^2} f(x^2) + \left(x^2 + \frac{a}{x^2}\right)\alpha x^1 + \frac{\gamma_1}{x^2} + \gamma_2\left(x^2 + \frac{a}{x^2}\right) \tag{2.11}$$

$$f(x^2) = \int \frac{[(x^2)^2 + a]^n}{(x^2)^{n-2}}\,dx^2 - (x^2)^2 \int \frac{[(x^2)^2 + a]^n}{(x^2)^n}\,dx^2, \qquad a = \frac{\alpha_1}{\alpha}, \qquad M = -\frac{\delta\varepsilon_0 (s\alpha)^n}{2}$$

3. Рассмотрим применимость полученных H-решений к краевым задачам.

1. Плазма движется по бесконечно длинной цилиндрической трубе радиуса ρ_2 в направлении оси x, вектор-потенциал на трубе имеет φ-компоненту.

2. Плазма занимает пространство, внутренняя граница которого задана цилиндром радиуса ρ_1, движение плазмы (или цилиндра) происходит в направлении оси x, вектор-потенциал на цилиндре имеет φ-компоненту.

3. Плазма движется в направлении оси x по цилиндрическому каналу бесконечной длины, образованному двумя коаксиальными цилиндрами радиусов ρ_1 и ρ_2. На обоих цилиндрах вектор-потенциал имеет φ-компоненту.

Во всех указанных случаях предполагается, что краевые условия представляют бегущую волну. Требуется найти вектор-потенциал в плазме.

Легко видеть, что ни одно из полученных H-решений не подходит для точного решения этих задач. Однако приближенное решение все же возможно получить, и для этой цели могут быть привлечены H-решения (2.9) — (2.11).

Рассмотренные H-решения имеют силу для любого интервала Δx^1, поэтому можно заменить краевые условия на отдельных интервалах отрезком прямой $\beta_i x^1$ и использовать параметры α_i и α_{1i} (до сих пор они оставались произвольными) для согласования H-решений с краевыми условиями. При этом интервалы должны быть малыми. Таким образом, получаем простой алгоритм расчета.

Для H-решения (2.9) краевые условия должны быть записаны в виде

$$u^3\,|_{\rho_1=0} = 0, \qquad u^3\,|_{\rho_2} = \beta_2 x^1$$

Отсюда

$$u^3 = \frac{\delta\varepsilon_0\,(s\beta_2)^n}{(1+n)(3+n)}\left[\frac{(x^2)^{2+n}}{\rho_2{}^n} - \rho_2 x^2\right] + \frac{\beta_2}{\rho_2}\,x^1 x^2 \tag{3.1}$$

Следовательно, (3.1) дает решение первой задачи.

Краевые условия для H-решения (2.10) должны иметь вид

$$u^3\,|_{\rho_1} = \beta_1 x^1, \qquad u^3\,|_{\rho_2=\infty} = 0 \qquad \text{(условие излучения)}$$

Отсюда при $n > 2$ следует

$$u^3 = \frac{\delta\varepsilon_0\,(s\beta_1)^n}{(1-n)(3-n)}\left[(x^2)^{2-n}\rho_1{}^n - \frac{\rho_1{}^3}{x^2}\right] + \beta_1\rho_1\,\frac{x^1}{x^2} \tag{3.2}$$

Следовательно, (3.2) дает решение второй задачи.

Для H-решения (2.11) краевые условия таковы:

$$u^3\,|_{\rho_1} = \beta_1 x^1, \qquad u^3\,|_{\rho_2} = \beta_2 x^1$$

Поэтому

$$u^3 = \frac{M}{x^2(\rho_1{}^2 - \rho_2{}^2)}\,\{\rho_1{}^2\,[f(x^2) - f(\rho_2)] - \rho_2{}^2\,[f(x^2) - f(\rho_1)] + (x^2)^2\,[f(\rho_2) - f(\rho_1)]\} +$$

$$+\left(\alpha x^2 + \frac{\alpha_1}{x^2}\right)x^1, \qquad \alpha = \frac{\rho_1\beta_1 - \rho_2\beta_2}{\rho_1{}^2 - \rho_2{}^2}, \qquad \alpha_1 = \frac{\rho_1\beta_2 - \rho_2\beta_1}{\rho_1{}^2 - \rho_2{}^2}\,\rho_1\rho_2 \tag{3.3}$$

Таким образом, имеем решение третьей задачи.

Напомним, что (3.1) — (3.3) дают решения для любого из интервалов, при этом параметры β_1 и β_2 на каждом Δx^1 должны определяться по краевым условиям в исходном виде. При краевых условиях типа бегущей волны решения, доставляемые (3.1) — (3.3), носят периодический характер относительно переменной $x1$, при четном n эти решения имеют конечные разрывы.

Поступила 21 XII 1965

ЛИТЕРАТУРА

1. О в с я н н и к о в Л. В. Групповые свойства дифференциальных уравнений. 1962 Изд. СО АН.
2. Г и н з б у р г В. Д., Г у р е в и ч В. В. Нелинейные явления в плазме, находящейся в переменном электромагнитном поле. Успехи физ. наук, 1960, т. 70, № 2.
3. K e r r e b r o c k. J. L. Conduction in Gases with Elevated Electron Temperature. Engineering Aspects of Magnetohydrodynamics, NJL. 1962.
4. K e r r e b r o c k. J. L. Nonequilibrium ionization Due to Electron Heating. A I AA Journal, 1964, vol 2, 6.
5. S h e i n d l i n A. E., B a t e n i n V. A., A s i n o v s k y E. I. Experimental investigation of nonequilibrium ionization in a mixture of argon and potassium. Magnetohydrodynamic Electrical Power Generation. Paris., 1964.