ПМТФ, № 3, 1967

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ПЛАЗМЫ В КОМБИНИРОВАННЫХ МАГНИТНЫХ ПОЛЯХ

Е. Я. Коган, С. С. Моисеев, В. Н. Ораевский

(Новосибирск)

В последнее время значительно повысился интерес к системам тороидального типа. Для таких систем перестановочные неустойчивости обычно пытаются застабилизировать при помощи конфигураций магнитного поля с минимумом $\int H^{-1}\, dl$ в среднем. Подобного рода конфигурации естественным образом приводят к задаче , в которой кривизна магнитного поля $1/R$ имеет вид

$$1/R = (1 + \varepsilon \cos bz)/\langle R^{-1}\rangle$$

(ось z — вдоль магнитного поля), т. е. к системам с так называемой «гофрировкой» силовых линий магнитного поля.

Естественно возникает вопрос при обсуждении преимуществ различных конфигураций: какие виды неустойчивостей характерны для данной конфигурации силовых линий магнитного поля и насколько они опасны?

В настоящей работе, как и в [1,3], обсуждается ряд неустойчивостей, характерных для «гофрированных» систем. Учитывается влияние перекрещенности силовых линий магнитного поля на неустойчивость.

В связи с вопросом о стабилизирующих свойствах систем с непараллельными силовыми линиями особую важность приобретает исследование устойчивости плазмы для частот колебаний $\omega < k_z v_{ti}$ (k_z — волновой вектор вдоль оси z, v_{ti} — тепловая скорость ионов). До последнего времени в указанном диапазоне частот была найдена лишь одна неустойчивость $\partial \ln T_0/\partial \ln n_0 > 2$ ($T_0(x)$ — температура, $n_0(x)$—плостность неоднородной вдоль x плазмы) [4].

Это обстоятельство, а также существующие предположения (см., например, [5]) о стабилизующем действии затухания Ландау на ионах являлись обнадеживающими в смысле устойчивости плазмы на коротких продольных длинах волн.

Однако здесь будет показано, что для частот $\omega < k_z v_{ti}$ существует неустойчивость достаточно универсального типа, развивающаяся на коротких длинах волн.

§ 1. Рассмотрим влияние на устойчивость плазмы периодичности магнитного поля вдоль его направления (так называемые «гофрированные системы») и перекрещенности силовых линий магнитного поля для случая, когда возмущения можно считать потенциальными (rot $E = 0$).

Выбираем возмущение в виде $f(x, z) \exp(i\omega t + ik_y y)$, в магнитогидродинамическом приближении по ионам, получим уравнение

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - k_y^2 f - \frac{gk_0}{\omega(\omega - \omega_i)} - i\frac{\omega_s}{\omega}\left(1 - \frac{\omega_e}{\omega - \omega_i}\right)\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 0 \qquad (1.1)$$

$$\omega_s = \frac{\Omega_e \Omega_i}{\nu_e}, \qquad k_0 = \frac{1}{n_0}\frac{\partial n_0}{\partial x}, \qquad g = \frac{v_{ti}^2}{R}$$

Здесь Ω_e, Ω_i — соответственно ларморовские частоты электронов и ионов, ν_e — частота электронионных соударений, ω_e, ω_i — электронная и ионная дрейфовые частоты, n_0 — невозмущенная плотность плазмы, v_{ti} — тепловая скорость ионов.

Ускорение эффективной силы тяжести, направленное из плазмы, в дальнейшем будем считать периодически меняющимся вдоль магнитного поля, так что

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{\langle R\rangle}(1 + \varepsilon \cos bz) \qquad \left(\frac{1}{\langle R\rangle} = \int_0^{2\pi} \frac{1}{R}\, d(bz)\right)$$

где R^{-1}, $\langle R^{-1}\rangle$ — локальная и средняя кривизны силовых линий магнитного поля.

Считая коэффициенты (1.1) медленно меняющимися функциями x (поперечная координата), будем искать решение этого уравнения в виде $f = X(x) Z(z)$. Получим систему с постоянной разделения $\varkappa^2$

$$X'' + \left(-k_y^2 - \varkappa^2 + k_y^2 \frac{gk_0}{\omega\omega^{(1)}} + i\frac{\omega_s\omega^{(2)}}{\omega\omega^{(1)}} k_y^2\Sigma^2 x^2\right) X = 0 \tag{1.2}$$

$$Z'' + \left(i\frac{\varkappa^2\omega\omega^{(1)}}{\omega_s\omega^{(2)}} - i\frac{\varepsilon k_y^2 g k_0}{\omega_s\omega^{(2)}}\cos bz\right) Z = 0 \tag{1.3}$$

В уравнениях (1.2), (1.3) учтен эффект перекрещенности силовых линий из условия

$$k_\parallel = k_z \mathbf{e}_z + \Sigma x k_y \mathbf{e}_y, \qquad \Sigma = d\theta/dx$$

Здесь $k_\parallel$ — волновой вектор вдоль направления магнитного поля, $\mathbf{e}_z$ — $\mathbf{e}_y$ — орты по соответствующим осям.

Отметим, что, используя вариационный подход к уравнению (1.1), можно сразу свести задачу к одному уравнению вдоль z, правильно выбрав возмущение вдоль x. Действительно, (1.1) может быть получено варьированием квадратичной формы

$$M = \frac{1}{2}\int\left[(\nabla_\perp\Phi)^2 - i\frac{\omega_s\omega^{(2)}}{\omega\omega^{(1)}}(\nabla_\parallel\Phi)^2 - \frac{gk_0}{\omega\omega^{(1)}}(\nabla_y\Phi)^2\right]d\tau \tag{1.4}$$

Вводя локализованное вдоль x возмущение в виде $\sim \exp(-{}^1/_2 x^2/\delta^2)$, получим

$$M = \int\limits_{-\infty}^{\infty} dx \int \left\{\frac{x^2}{\delta^4}\Phi^2 - k_y^2\Phi^2 - i\frac{\omega_s\omega^{(2)}}{\omega\omega^{(1)}}\left[\Sigma^2 x^2 \Phi^2 k_y^2 + 2\Sigma x \Phi \frac{\partial\Phi}{\partial z} k_y + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \left(\frac{\partial\Phi}{\partial z}\right)^2\right] + \frac{gk_0}{\omega\omega^{(1)}}(k_y^2\Phi)^2\right\} ds \tag{1.5}$$

$$\omega^{(1)} \equiv \omega - \omega_i, \qquad \omega^{(2)} \equiv \omega - \omega_i - \omega_e$$

Варьируя (1.5) по δ и Φ, получим выражения

$$\delta^2 = \left(i\frac{\omega\omega^{(1)}}{\omega_s\omega^{(2)}\Sigma^2 k_y^2}\right)^{1/2} \tag{1.6}$$

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2} - \left[-i\frac{\omega\omega^{(1)}}{\omega_s\omega^{(2)}}\left(\frac{1}{2\delta^2} + k_y^2\right) + k_y^2\frac{\Sigma^2\delta^2}{2} + i\frac{gk_0}{\omega_s\omega^{(2)}}k_y^2\right]\Phi = 0 \tag{1.7}$$

Нетрудно видеть, что соотношения (1.6) и (1.7) с учетом того, что $R^{-1} = \langle R^{-1}\rangle (1 + \varepsilon\cos 2z)$, вполне эквивалентны (1.2) и (1.3).

Область δ существенно связана с наличием $\Sigma = d\theta/dx$.

Обратим внимание на следующее обстоятельство. Как видно из (1.5), при $\omega_i = \omega_e = 0$ область соответствует размеру области локализации, найденной в [6] из анализа уравнения четвертого порядка для непотенциальных возмущений, что в данном случае не является необходимым. Причина этого заключается в следующем.

Для уравнения $\alpha\varphi^{\mathrm{IV}} - u_2\varphi'' + u_1\varphi = 0$, как известно (см., например, [7]), на спектр собственных значений для асимптотических решений — $\exp\left(\pm\int(u_2/\alpha)^{1/2}\right)$ вторая пара решений оказывает слабое влияние.

Рассмотренные в [6] решения как раз и соответствуют указанным решениям для потенциальных возмущений (по крайней мере, для так называемой «гравитационной» моды).

Вернемся к исследованию уравнений (1.2) и (1.3). Первое из них является уравнением типа уравнения Шредингера, второе — Матье.

Собственные значения уравнения (1.2) определяются соотношением

$$-k_y^2-\varkappa^2+\frac{k_y^2gk_0}{\omega\omega^{(1)}}=(2n+1)\left(-i\,\frac{\omega_s\omega^{(2)}}{\omega\omega^{(1)}}\right)^{1/2}k_y\Sigma \qquad (n=0,1,2,\ldots) \quad (1.8)$$

Уравнение (1.3) представим в виде

$$Z''+(a-2q\cos 2z)\,Z=0$$

$$a=i\,\frac{4}{b^2}\,\frac{\varkappa^2\omega\omega^{(1)}}{\omega_s\omega^{(2)}},\qquad 2q=i\,\frac{4\varepsilon k_y^2gk_0}{b^2\omega_s\omega^{(2)}} \quad (1.9)$$

Тогда условие периодичности решений (1.3) для $q\lesssim 1$ можно представить в виде [8]

$$i\,\frac{\varkappa^2\omega\omega^{(1)}}{\omega_s\omega^{(2)}}=\frac{b^2m^2}{2}-\frac{1}{2\,(m^2-1)\,b^2}\left(i\,\frac{\varepsilon k_y^2gk_0}{\omega_s\omega^{(2)}}\right)^2 \quad (1.10)$$

Соотношения (1.8) и (1.10) через $\varkappa^2$ определяют дисперсионное уравнение для (1.2) и (1.3) ($m=0,1,2\ldots$).

Из (1.8) видно, что если основным членом в левой части будет k_y^2, то финитные решения отсутствуют. Здесь предположено, что основной вклад в переменную часть «потенциала» уравнения (1.2) вносит член, связанный с Σ.

Это уравнение описывает моды колебаний, развивающиеся на дрейфовых волнах при наличии диссипативных факторов (так называемая «дрейфоводиссипативная» мода) и гравитационного потенциала (гравитационная диссипативная мода). Замечание, сделанное выше, объясняет условие нефинитности «дрейфоводиссипативной» моды.

Для нулевой гармоники решения (1.10) ($m=0$) и $q>1$ дисперсионное уравнение

$$1+\frac{gk_0}{\omega\omega^{(1)}}+\left(i\,\frac{\omega_s\omega^{(2)}}{\omega\omega^{(1)}}\right)^{1/2}k_y\Sigma=0 \quad (1.11)$$

не имеет финитных решений. Здесь учтено, что средняя кривизна имеет знак устойчивой конфигурации.

Финитные решения существуют только для $|gk_0/\omega\omega^{(1)}|>1$, что соответствует $q>1$. В этом случае ($q>1$) с точностью до членов $\sim q^{1/2}$ дисперсионное уравнение имеет вид

$$-i\,\frac{\omega\omega^{(1)}}{\omega_s\omega^{(2)}}-i\,\frac{\Sigma}{k_y}\left(-i\,\frac{\omega\omega^{(1)}}{\omega_s\omega^{(2)}}\right)^{1/2}+i\,\frac{gk_0(\varepsilon-1)}{\omega_s\omega^{(2)}}=0 \quad (1.12)$$

или

$$1+\frac{\Sigma}{k_y}\left(-i\,\frac{\omega_s\omega^{(2)}}{\omega\omega^{(1)}}\right)^{1/2}-\frac{gk_0(\varepsilon-1)}{\omega\omega^{(1)}}=0$$

Если пренебречь 1 по сравнению с $gk_0(\varepsilon-1)/\omega\omega^{(1)}$, то при условии $\omega_i\approx\omega_e\approx 0$ получим

$$\omega\approx -i\left[\frac{(gk_0)^2(\varepsilon-1)^2}{\omega_s}\,\frac{k_y^2}{\Sigma^2}\right]^{1/3}$$

что соответствует апериодической неустойчивости с данным инкрементом и совпадает с результатом, полученным в [1].

Инкремент этой неустойчивости соответствует гравитационной диссипативной моде, но значительно меньше, чем в отсутствие продольной гофрировки.

§ 2. Вопрос о стабилизирующих свойствах гофрированных систем приобретает особую важность в связи с тем, что системы с перекрещенными силовыми линиями магнитного поля, по-видимому, малоэффективны. Роль этого фактора фактически сводится к тому, что возмущения с малыми k_z весьма локализованы в поперечном направлении, что уменьшает аномальную диффузию (см. [9]). Однако остается вопрос об устойчивости плазмы на возмущениях $k_z > \omega / v_{ti}$.

Покажем, что на таких возмущениях в бесстолкновительном режиме существует неустойчивость. Запишем полученные в [4] для высокотемпературной плазмы дисперсионное уравнение в виде

$$2 + \frac{i\sqrt{\pi}}{k_z v_{te}}(\omega - \omega_e) W\left(\frac{\omega}{k_z v_{te}}\right)\Gamma_0(\eta_e) + \frac{i\sqrt{\pi}}{k_z v_{ti}} W\left(\frac{\omega}{k_z v_{ti}}\right)\Gamma_0(\eta_i)(\omega - \omega_i) = 0 \quad (2.1)$$

$$\Gamma_0(\eta) = e^{-\eta} I_0(\eta), \quad \eta_e = k_y r_e, \quad \eta_i = k_y r_i$$

Здесь $I_0(\eta)$ — функция Бесселя мнимого аргумента, $W(x)$ — функция Крампа. Возьмем асимптотику функций

$$\Gamma_0(\eta_i) \text{ при } k_y r_i \gtrsim 1, \qquad \Gamma_0(\eta_e) \text{ при } k_y r_e \ll 1, \qquad W\left(\frac{\omega}{k_z v_{ti}}\right) \text{ при } \omega \ll k_z v_{ti}$$

В результате получим следующее уравнение:

$$2 + \frac{i\sqrt{\pi}}{k_z v_{te}}(\omega - \omega_e)\left(1 + 2i\frac{\omega}{\sqrt{\pi}\, k_z v_{te}}\right) + \frac{\omega - \omega_i}{\sqrt{2}\, k_y r_i k_z v_{ti}} = 0$$

из которого находим $\operatorname{Im}\omega \sim \operatorname{Re}\omega \sim k_z v_{ti}^2 k_y r_i / \omega_i$. Из предположения $\omega / k_z v_{ti} < 1$ условие существования решения имеет вид $k_z \ll k_0$.

Рассмотрим диффузию, развивающуюся на данной неустойчивости. Пользуясь формулой для коэффициента диффузии $D \sim I m\omega\lambda_x^2$ и учитывая, что в данном случае $\lambda_x \sim r_e$ (r_e — ларморовский радиус электронов), получим $D \sim r_e^2 v_{ti} / r$ (r — поперечный размер системы).

Как видно, коэффициент существенно меньше коэффициента диффузии Бома, однако в высокотемпературном режиме может приводить к опасным потерям частиц.

Благодарим А. А. Галеева за ценные дискуссии.

Поступила 12 II 1966

ЛИТЕРАТУРА

1. Furth H. P. Lecture Notes at the International Centre for Theoretical Physics, Plasma, Phys., 1964.
2. Furth H. P., Killen J., Rosenbluth M. N., Coppy B. 2nd Conf. Plasma Phys. and Nucl. Fusion. Paper C No. 21/106, Calham, 1965.
3. Coppy B., Rosenbluth M. N. 2nd Conf. Plasma Phys. and Nucl. Fusion, Paper C No. 21/105, Calham, 1965.
4. Галеев А. А., Ораевский В. Н., Сагдеев Р. З. Универсальная неустойчивость неоднородной плазмы. Ж. эксперим. и теор. физ., 1963, т. 44, стр. 903.
5. Kroll N. A., Rosenbluth M. N. Universal Instability in Complex Field Geometries, Phys. Fluids, 1965, vol. 8, p. 1488.
6. Furth H. P., Killenj, Rosenbluth M. N. Finite resistivity instabilities of a sheat piach. Phys. Fluids, 1963, vol. 6, p. 459.
7. Заславский Г. М., Моисеев С. С., Сагдеев Р. З. Асимптотический метод решения дифференциального уравнения четвертого порядка. Докл. АН СССР, 1964, т. 158, № 6.
8. Мак-Лахлан Н. В. Теория и приложение функции Матье. Изд. иностр. лит., 1953.
9. Кадомцев Б. Б., Погуце О. П. Доклад на Международной конференции по физике плазмы С № 21/127, Калам, сентябрь 1965.