УДК 532.517.013.4:536.252

# ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ ЛИНЕАРИЗОВАННЫХ УРАВНЕНИЙ КОНВЕКЦИИ СЛАБО СЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ

О. Н. Гончарова

Алтайский государственный университет, 656099 Барнаул
E-mail: gon@math.dcn-asu.ru

Рассматривается математическая модель конвекции жидкости в условиях слабой гравитации. Уравнение состояния принимается в виде, позволяющем рассматривать жидкость слабо сжимаемой средой. На основе предложенной ранее математической модели конвекции слабо сжимаемой жидкости изучается нестационарное конвективное движение в вертикальной полосе, на твердых границах которой задается периодический по времени тепловой поток. Эта модель конвекции позволяет изучить задачу в условиях, когда граничный тепловой режим колеблется в противофазе, а не в фазе, что требовалось для модели микроконвекции изотермически несжимаемой жидкости. В работе выписываются точные решения для компонент скорости и температуры и численно выстраиваются траектории движения жидких частиц. Для сравнения приводятся траектории, предписываемые классической моделью конвекции Обербека — Буссинеска и моделью микроконвекции.

Ключевые слова: конвекция, слабо сжимаемая жидкость, периодический тепловой поток.

**1. Постановка задачи.** Данная работа продолжает исследования конвективных движений теплопроводной жидкости. Различные аспекты математического моделирования и строгого математического обоснования моделей конвекции изложены в известных монографиях [1–4]. Классическими уравнениями конвекции являются уравнения Обербека — Буссинеска. Для исследования конвекции в условиях пониженной гравитации и в микромасштабах используется модель микроконвекции изотермически несжимаемой жидкости, предложенная В. В. Пухначевым (см. [1, 2, 5]). Учет несоленоидальности поля скоростей приводит к появлению небуссинесковских эффектов в течениях жидкостей, особенно ярко проявляющихся при изучении нестационарных задач [6, 7].

При изучении конвекции в замкнутых областях с твердыми непроницаемыми границами замечено, что система уравнений микроконвекции изотермически несжимаемой жидкости допускает корректную постановку начально-краевой задачи только при заданном на границе тепловом потоке с условием нулевого суммарного потока, что представляет собой необходимое условие разрешимости задачи. В работе [5] предложена модель конвекции слабо сжимаемой жидкости, свободная от данного жесткого условия. Вязкость $\nu$ и температуропроводность $\chi$ считаются постоянными, а уравнение состояния принимается в виде

$$\rho = (1 + \delta p)/(1 + \varepsilon T). \tag{1}$$

Уравнение (1) записано в безразмерной форме. Здесь $p$, $T$ — отклонения давления и температуры от некоторых равновесных значений $p_0$, $T_0$; $l$ — характерный масштаб длины;

Работа выполнена при финансовой поддержке Совета по грантам Президента Российской Федерации для поддержки ведущих научных школ (грант № НШ 902.2003.01).

$v_* = \chi/l$ — скорость; $t_* = l/v_* = l^2/\chi$ — время; $p_* = \rho_0\nu\chi/l^2$ — давление; $T_*$ — температура; $\rho_0$ — плотность. Два основных малых безразмерных параметра, появляющиеся в задаче, это $\delta = \gamma p_*$ (параметр сжимаемости) и $\varepsilon = \beta T_*$ (число Буссинеска). Действительно, число Буссинеска будет величиной порядка $10^{-5} \div 10^{-3}$ из-за малости температурного коэффициента объемного расширения $\beta$ даже при значительном (например, 50 K) перепаде температур. Параметр $\delta$, пропорциональный изотермическому коэффициенту сжимаемости $\gamma$, будет величиной порядка $10^{-14} \div 10^{-9}$, поскольку для обычных жидкостей $\gamma \in [10^{-10}, 10^{-9}]$ (см. [3, 5]).

Система уравнений гидродинамики в безразмерной форме с учетом (1) записывается следующим образом [5]:

$$\frac{1+\delta p}{1+\varepsilon T}\,\frac{d\boldsymbol{V}}{dt} = \mathrm{Pr}[\nabla(-p + \bar{\xi}\,\mathrm{div}\,\boldsymbol{V}) + \Delta\boldsymbol{V}] + \frac{\eta\,\mathrm{Pr}(1+\delta p)}{1+\varepsilon T}\,\boldsymbol{g}_0; \tag{2}$$

$$\frac{\delta}{1+\delta p}\,\frac{dp}{dt} - \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon T}\,\frac{dT}{dt} + \mathrm{div}\,\boldsymbol{V} = 0; \tag{3}$$

$$\frac{1+\delta p}{1+\varepsilon T}\,\frac{dT}{dt} - \frac{\epsilon_2 + \varepsilon\epsilon_1 T}{1+\varepsilon T}\,\frac{dp}{dt} = \Delta T + \epsilon_1\Phi. \tag{4}$$

Здесь $\mathrm{Pr} = \nu/\chi$ — число Прандтля; $\eta = gl^3/(\nu\chi)$ — параметр микроконвекции; $\epsilon_1 = \nu v_*/(lc_pT_*) = \nu\chi/(l^2c_pT_*)$; $\epsilon_2 = \varepsilon\epsilon_1T_0/T_* = \beta\nu\chi T_0/(l^2c_pT_*)$; $c_p$ — теплоемкость жидкости при постоянном давлении; $\bar{\xi} = 1+\xi$, $\xi = \lambda/(\rho_0\nu)$ — отношение коэффициентов второй и первой вязкости; $\boldsymbol{g}_0 = \boldsymbol{g}/g$, $g = |\boldsymbol{g}|$, $\boldsymbol{g}$ — ускорение силы тяжести; диссипативная функция $\Phi$ определяется равенством

$$\Phi = \xi(\mathrm{div}\,\boldsymbol{V})^2 + 2D : D,$$

где $D$ — тензор скоростей деформации.

Для того чтобы получить в дальнейшем разложения только по малому параметру сжимаемости, полагаем $\epsilon_1 = \alpha_1\delta$, $\epsilon_2 = \alpha_2\delta$, $\alpha_i = O(1)$ $(i = 1, 2)$ при $\delta \to 0$. Тогда уравнение (4) запишется в следующем виде:

$$\frac{1+\delta p}{1+\varepsilon T}\,\frac{dT}{dt} - \delta\,\frac{\alpha_2 + \varepsilon\alpha_1 T}{1+\varepsilon T}\,\frac{dp}{dt} = \Delta T + \delta\alpha_1\Phi. \tag{5}$$

Таким образом, искомой системой уравнений для неизвестных функций $\boldsymbol{V}$, $p$, $T$ будут уравнения (2), (3), (5). Заметим, что уравнения микроконвекции изотермически несжимаемой жидкости получаются из этих уравнений в предположении $\delta = 0$.

В [5] проводится анализ критериев подобия задачи и характерных величин процесса, в том числе характерных времен. При построении модели конвекции, справедливой в условиях микрогравитации, выбираются характерные внутренние времена $t_*$ (время релаксации температуры) и $t_\nu = l^2/\nu$ (время релаксации вязких напряжений), которые одного порядка при $\mathrm{Pr} \sim 1$, а также характерное время $t_f$ (время изменения функций, определяющих граничный тепловой режим). Условие $\mathrm{Pr} \sim 1$ определяет достаточно широкий класс жидкостей, а введение отношения $\zeta = t_*/t_f$ в граничные температурные условия позволяет рассмотреть ситуации, когда эти характерные времена сильно различаются.

Асимптотическое разложение решения системы (2)–(5) строится по параметру сжимаемости $\delta \to 0$ и при условии, что $\varepsilon$, $\mathrm{Pr}$, $\bar{\xi}$, $\eta$, $\alpha_1$, $\alpha_2$ сохраняют конечные значения. Решение системы (2)–(5) ищется в виде формальных степенных рядов

$$\boldsymbol{V} = \sum_{k=0}^{\infty}\delta^k\boldsymbol{V}^{(k)}(x,t), \quad T = \sum_{k=0}^{\infty}\delta^kT^{(k)}(x,t), \quad p = \frac{P(t)-1}{\delta} + \sum_{k=0}^{\infty}\delta^kp^{(k)}(x,t). \tag{6}$$

Функция $p$ имеет сингулярную составляющую при $\delta \to 0$, а величину $(P(t) - 1)/\delta$ отождествляют со средним по области $\Omega$ давлением жидкости. Если стенки полости неподвижны и непроницаемы, то масса заключенной в ней жидкости сохраняется. При отличном от нуля суммарном тепловом потоке через границу и конечном изменении вследствие этого средней по области температуры наблюдается (в соответствии с уравнением состояния (1)) изменение среднего давления на величину порядка $\delta^{-1}$ при $\delta \to 0$. Главные члены разложений (6) удовлетворяют в области течения $\Omega$ системе уравнений

$$\frac{P}{1+\varepsilon T^{(0)}}\,(\boldsymbol{V}_t^{(0)} + \boldsymbol{V}^{(0)}\cdot\nabla\boldsymbol{V}^{(0)}) = \Pr[\nabla\,(-p^{(0)} + \bar\xi\operatorname{div}\boldsymbol{V}^{(0)}) + \Delta\boldsymbol{V}^{(0)}] + \frac{\eta\Pr P}{1+\varepsilon T^{(0)}}\,\boldsymbol{g}_0; \qquad (7)$$

$$\frac{\dot P}{P} - \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon T^{(0)}}\,(T_t^{(0)} + \boldsymbol{V}^{(0)}\cdot\nabla T^{(0)}) + \operatorname{div}\boldsymbol{V}^{(0)} = 0; \qquad (8)$$

$$\frac{P}{1+\varepsilon T^{(0)}}\,(T_t^{(0)} + \boldsymbol{V}^{(0)}\cdot\nabla T^{(0)}) - \dot P\,\frac{\alpha_2 + \varepsilon\alpha_1 T^{(0)}}{1+\varepsilon T^{(0)}} = \Delta T^{(0)}, \qquad (9)$$

которые называются уравнениями конвекции слабо сжимаемой жидкости. При этом $\dot P = dP(t)/dt$.

Начально-краевая задача для системы (7)–(9) формулируется следующим образом. Рассматриваются условия прилипания для вектора скорости

$$\boldsymbol{V}^{(0)} = 0, \qquad x\in\Sigma, \quad t>0$$

и условия второго рода для температуры, задающие поток тепла на границе области $\Sigma$

$$\frac{\partial T^{(0)}}{\partial n} = f(x,\zeta t), \qquad x\in\Sigma, \quad t>0. \qquad (10)$$

В начальный момент времени задаются вектор скорости и температура:

$$\boldsymbol{V}^{(0)} = \boldsymbol{V}_0(x), \quad T^{(0)} = T_0(x), \qquad x\in\Omega, \quad t=0.$$

Функция $P(t)$ удовлетворяет уравнению

$$\dot P\int\limits_\Omega \Big[1 - \frac{\varepsilon(\alpha_2 + \varepsilon\alpha_1 T^{(0)})}{1+\varepsilon T^{(0)}}\Big]\,dx = \varepsilon\int\limits_\Sigma f\,d\Sigma$$

и начальному условию

$$P(0) = 1.$$

Заметим, что в предельном случае при $\varepsilon = 0$ уравнения (7)–(9) превращаются в уравнения Навье — Стокса несжимаемой жидкости.

Корректность сформулированной начально-краевой задачи исследуется в [5], где показывается, что построенное приближенное решение может рассматриваться как аппроксимация порядка $O(\delta)$ при $\delta \to 0$ решения соответствующей начально-краевой задачи для исходной системы (2)–(5) при $t \geqslant 1$. Формальная асимптотика (6) не работает на малых временах, но для уравнений (2)–(5) может быть осуществлена линеаризация вблизи состояния изотермического равновесия. Так возникает линейная модель переходного процесса (см. [5]). Асимптотическое решение линейной задачи переходного процесса не имеет поточечного предела при $\delta \to 0$, но может быть рассмотрено в качестве главного члена внутреннего разложения линеаризованных уравнений движения (2)–(5), описывающего начальный этап конвекции. Переходный процесс сопровождается распространением нелинейных акустических волн высокой частоты. Подчеркнем, что высокочастотные акустические колебания “отфильтрованы” в результирующих уравнениях модели слабо сжимаемой жидкости, они учитываются лишь на начальном этапе движения. Характеристика осцилляций, их локализация изучаются в [5].

Процедура “фильтрации звука” осуществлялась и в работах [8–11]. В [12, 13] рассмотрена модель сплошной среды, применимая для существенно дозвуковых течений, и гидродинамическое приближение с “фильтрацией акустики” используется для описания околокритических явлений. Следует назвать также монографию [14], где рассматриваются слабо сжимаемые жидкости как жидкости с малыми числом Буссинеска и параметром сжимаемости, выступающими множителями в уравнении состояния при температуре и давлении соответственно. В [14] проведено математическое моделирование, носящее асимптотически обобщающий характер для классической модели Обербека — Буссинеска, и исследованы разрешимость некоторых осесимметрических и общих трехмерных задач, а также вопросы устойчивости решений.

**2. Точные решения уравнений конвекции слабо сжимаемой жидкости в бесконечной полосе.** Замечено, что уравнения конвекции слабо сжимаемой жидкости допускают группу с прибавлением к давлению произвольной функции времени. Рассмотрим систему уравнений (7)–(9) для главных членов разложений $\boldsymbol{V}^{(0)}$, $T^{(0)}$, $p^{(0)}$, при этом индекс 0 будем опускать. Построим решения этих уравнений, инвариантные относительно оператора $\partial/\partial y + \varphi(t)\,\partial/\partial p$, где $\varphi(t)$ — произвольная функция времени. Построение проведем подобно тому, как это было сделано в [1, 2].

Обозначим через $x, y, z$ декартовы координаты в пространстве. Пусть система координат выбрана так, что $\boldsymbol{g}_0 = (0, -1, 0)$, а жидкость заполняет слой $|x| \leqslant 1$, на твердых границах которого задан тепловой поток согласно (10). Пусть величина теплового потока не зависит от $z$. Инвариантные решения должны иметь следующий вид:

$$\boldsymbol{V} = (u, v), \quad u = u(x,t), \quad v = v(x,t), \quad T = T(x,t), \quad p = \varphi(t)y + r(x,t).$$

Тогда система уравнений (7)–(9) преобразуется к виду

$$\frac{\dot P}{P} - \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon T}\,(T_t + uT_x) + u_x = 0; \tag{11}$$

$$\frac{P}{1+\varepsilon T}\,(u_t + uu_x) = \mathrm{Pr}\,(-r_x + \bar{\bar{\xi}} u_{xx}); \tag{12}$$

$$\frac{P}{1+\varepsilon T}\,(v_t + uv_x) = \mathrm{Pr}\Big(-\varphi + v_{xx} - \frac{\eta}{1+\varepsilon T}\Big); \tag{13}$$

$$\frac{P}{1+\varepsilon T}\,(T_t + uT_x) - \dot P\,\frac{\alpha_2 + \varepsilon\alpha_1 T}{1+\varepsilon T} = T_{xx}. \tag{14}$$

Здесь $\bar{\bar{\xi}} = \bar{\xi} + 1$. Будем предполагать, что функции $u$, $v$, $\dot P$ — это функции порядка числа Буссинеска $\varepsilon$, а температура $T$ — функция порядка 1, т. е. $u = \varepsilon U(x,t)$, $v = \varepsilon V(x,t)$, $\dot P = \varepsilon f(t)$. Другими словами, разложения функций $u, v$ в ряды по степеням малого параметра $\varepsilon$ начинаются с членов первого порядка $U$ и $V$, а функций $T$, $P$ — с членов нулевого порядка $T^0$ и 1 соответственно. Тогда следствием уравнения (11) является соотношение

$$f(t) - T^0_t + U_x = 0,$$

а следствием уравнения переноса тепла (14) — соотношение

$$T^0_t = T^0_{xx}, \tag{15}$$

и, значит,

$$U_x = T^0_{xx} - f(t)$$

или

$$U = T^0_x - xf(t) + b(t).$$

Так как согласно условиям прилипания $U(1,t) = U(-1,t) = 0$, рассмотрим сначала случай, когда

$$T^0_x(-1,t) = a_-(t), \qquad T^0_x(1,t) = a_+(t), \qquad a_-(t) = a_+(t) = a(t).$$

В этом случае $f = 0$, что соответствует условию нулевого суммарного теплового потока (см. ситуацию, описанную в [1, 3, 15]).

Пусть теперь $a_-(t) = -a_+(t) = a(t)$. Тогда $b = 0$ и

$$U = T^0_x - xf(t); \tag{16}$$

$$T^0_x(-1,t) = a(t), \qquad T^0_x(1,t) = -a(t), \tag{17}$$

при этом, например, $a(t) = \mathcal{A}\sin\omega t$.

Итак, $T^0$ есть решения уравнения (15) в области $|x| \leqslant 1$, $t \in [0, t_{end}]$, при этом на границе выполняется условие (17), а в начальный момент времени может быть задано следующее начальное условие:

$$T^0(x,0) = T_0(x), \qquad |x| \leqslant 1. \tag{18}$$

Функция $U$ определяется из (16). Заметим, что вследствие (17) $f(t) = -a(t)$. Уравнение (12) определяет теперь функцию $r(x,t)$ с точностью до произвольной функции времени:

$$r_x = -U_t/\operatorname{Pr} + \bar{\bar{\xi}} U_{xx}.$$

В уравнение (13) для определения функции $V(x,t)$ входит функция $\varphi(t)$, для нахождения которой пользуются условием нулевого расхода жидкости через любое поперечное сечение полосы вида $y = \text{const}$ (см. [1, 2]). Для этого условие $\int\limits_{-1}^{1} \rho v\,dx = 0$ продифференцируем по $t$ и воспользуемся уравнениями (11), (13), а также уравнением состояния $\rho = P(t)/(1+\varepsilon T)$ в рассматриваемой ситуации. Тогда

$$\rho_t v = \frac{\varepsilon P}{(1+\varepsilon T)^2}\, T_x uv - \frac{P}{1+\varepsilon T}\, u_x v,$$

$$\rho v_t = \frac{P}{1+\varepsilon T}\, v_t = \operatorname{Pr}\Big[-\varphi + v_{xx} - \frac{\eta}{1+\varepsilon T}\Big] - \frac{P}{1+\varepsilon T}\, u v_x,$$

и как следствие определим функцию

$$\varphi(t) = \frac{1}{2}\,[v_x(1,t) - v_x(-1,t)] - \frac{\eta}{2}\int\limits_{-1}^{1} \frac{dx}{1+\varepsilon T^0}. \tag{19}$$

Теперь уравнение (13) с учетом (19) позволяет определить $V(x,t)$:

$$V_t = -\operatorname{Pr}\tilde{\varphi} + \operatorname{Pr} V_{xx} + \operatorname{Pr}\eta T^0,$$

где

$$\tilde{\varphi} = \frac{1}{2}\,[V_x]\Big|_{-1}^{1} + \frac{\eta}{2}\int\limits_{-1}^{1} T^0\,dx,$$

а потому

$$V_t = \Pr\Big[-\frac{1}{2}\,[V_x(1,t) - V_x(-1,t)] + V_{xx} + \eta T^0 - \frac{\eta}{2}\int\limits_{-1}^{1} T^0\,dx\Big]. \tag{20}$$

Для этого уравнения рассмотрим следующие начальные и граничные условия:

$$V(x,0) = V_0(x), \qquad |x| \leqslant 1; \tag{21}$$

$$V(-1,t) = 0, \qquad V(1,t) = 0, \qquad t \in [0, t_{end}]. \tag{22}$$

Каждая из задач (15), (17), (18) и (20)–(22) решается методом Фурье. Рассмотрим периодические решения этих задач, когда начальные условия не задаются, граничные значения определены функцией $a(t) = \mathcal{A}\sin\omega t$, а функции $T^0$ и $V$ имеют вид

$$T^0 = T_s(x)\sin\omega t + T_c(x)\cos\omega t; \tag{23}$$

$$V = V_s(x)\sin\omega t + V_c(x)\cos\omega t. \tag{24}$$

Затем по функциям $U$, $V$ определяются компоненты безразмерной скорости $u = \varepsilon U(x,t)$, $v = \varepsilon V(x,t)$. При сравнении в дальнейшем с результатами классической модели Обербека — Буссинеска необходимо иметь в виду, что в инвариантном решении компонента скорости $u$ постоянна в каждый момент времени (и может быть задана равной нулю с учетом удовлетворения начальному условию). Вторая же компонента скорости $v$ будет определяться выписанными выше соотношениями.

2.1. *Решение задачи* (15), (17), (18) *для температуры.* Рассмотрим в бесконечной полосе $-1 \leqslant x \leqslant 1$ уравнение

$$T^0_t = T^0_{xx},$$

а на границе полосы — граничные условия, определяющие поток тепла в противофазе:

$$T^0_x(-1,t) = a(t), \qquad T^0_x(1,t) = -a(t),$$

где $a(t) = \mathcal{A}\sin\omega t$. Поиск решения в виде (23) приводит нас к следующей задаче для $T_c$:

$$T_c^{(IV)} + \omega^2 T_c = 0; \tag{25}$$

$$T_c'(-1) = 0, \quad T_c'(1) = 0, \quad T_c'''(-1) = \omega\mathcal{A}, \quad T_c'''(1) = -\omega\mathcal{A}, \tag{26}$$

тогда как $T_s$ определится через $T_c$ в виде

$$T_s = T_c''/\omega$$

и для $T_s$ будут выполнены граничные условия

$$T_s'(-1) = \mathcal{A}, \qquad T_s'(1) = -\mathcal{A}.$$

Введем обозначения $\vartheta = \sqrt{\omega/2}$, $æ = \sqrt{\omega/(2\Pr)}$, причем $\Pr \neq 1$. Решение задачи (25), (26) приводит к линейной системе алгебраических уравнений вида

$$-DC_1 + CC_2 - BC_3 + AC_4 = \mathcal{A}\omega/(2\vartheta^3), \qquad DC_1 + CC_2 - BC_3 - AC_4 = -\mathcal{A}\omega/(2\vartheta^3),$$
$$AC_1 + BC_2 + CC_3 + DC_4 = 0, \qquad -AC_1 + BC_2 + CC_3 - DC_4 = 0.$$

При этом коэффициенты системы определяются следующим образом:

$$\begin{aligned} A &= -\operatorname{sh}\vartheta\cos\vartheta + \operatorname{ch}\vartheta\sin\vartheta, \qquad B = \operatorname{sh}\vartheta\sin\vartheta + \operatorname{ch}\vartheta\cos\vartheta,\\ C &= \operatorname{ch}\vartheta\cos\vartheta - \operatorname{sh}\vartheta\sin\vartheta, \qquad D = -(\operatorname{ch}\vartheta\sin\vartheta + \operatorname{sh}\vartheta\cos\vartheta), \end{aligned} \tag{27}$$

а решением задачи (25), (26) является функция

$$T_c = C_1 \operatorname{ch} \vartheta x \cos \vartheta x + C_4 \operatorname{sh} \vartheta x \sin \vartheta x,$$

где

$$C_1 = \frac{\mathcal{A}\omega}{4\vartheta^3} \frac{\operatorname{ch}\vartheta \sin\vartheta + \operatorname{sh}\vartheta\cos\vartheta}{\operatorname{sh}^2\vartheta\cos^2\vartheta + \operatorname{ch}^2\vartheta\sin^2\vartheta}, \qquad C_4 = \frac{\mathcal{A}\omega}{4\vartheta^3} \frac{-\operatorname{sh}\vartheta\cos\vartheta + \operatorname{ch}\vartheta\sin\vartheta}{\operatorname{sh}^2\vartheta\cos^2\vartheta + \operatorname{ch}^2\vartheta\sin^2\vartheta}. \tag{28}$$

Функция $T_s$ имеет следующий вид:

$$T_s = (2\vartheta^2/\omega)[-C_1 \operatorname{sh}\vartheta x \sin\vartheta x + C_4 \operatorname{ch}\vartheta x\cos\vartheta x].$$

2.2. *Решение задачи* (20)–(22) *для скорости.* Рассмотрим задачу о нахождении периодического решения вида (24) для системы (20)–(22), которую перепишем для удобства следующим образом:

$$V_t = \operatorname{Pr} V_{xx} - \frac{\operatorname{Pr}}{2}\,[V_x(1,t) - V_x(-1,t)] - \frac{\operatorname{Pr}\eta}{2}\int\limits_{-1}^{1} T^0\,dx + \operatorname{Pr}\eta T^0,$$

$$V(-1,t) = 0, \qquad V(1,t) = 0, \qquad t \in [0, t_{end}].$$

Функция $V_c$ находится из решения неоднородного обыкновенного дифференциального уравнения

$$V_c^{(IV)} + \frac{\omega^2}{\operatorname{Pr}^2} V_c = \frac{1}{2}\,[V_c'''(1) - V_c'''(-1)] - \eta T_c'' + \frac{\eta\omega}{\operatorname{Pr}} T_s + \frac{\eta\omega}{2\operatorname{Pr}} I_1.$$

При этом функция $V_s$ определяется из соотношения

$$V_s = \frac{\operatorname{Pr}}{\omega} V_c'' - \frac{\operatorname{Pr}}{2\omega}\,[V_c'(1) - V_c'(-1)] - \frac{\operatorname{Pr}\eta}{2\omega} I_2 + \frac{\operatorname{Pr}\eta}{\omega} T_c. \tag{29}$$

Здесь

$$I_1 = \int\limits_{-1}^{1} T_s(x)\,dx, \qquad I_2 = \int\limits_{-1}^{1} T_c(x)\,dx.$$

Решение (29) выстраиваем как сумму общего решения однородного уравнения и частного, определяемого правой частью (29):

$$V_c = \bar C_1 \operatorname{ch} æx \cos æx + \bar C_2 \operatorname{ch} æx \sin æx + \bar C_3 \operatorname{sh} æx \cos æx + \bar C_4 \operatorname{sh} æx \sin æx + \tilde V,$$

$$\tilde V = G_0 + G_1 \operatorname{sh}\vartheta x \sin\vartheta x + G_4 \operatorname{ch}\vartheta x\cos\vartheta x.$$

С учетом граничных условий

$$V_c(-1) = 0, \qquad V_c(1) = 0, \qquad V_s(-1) = 0, \qquad V_s(1) = 0$$

коэффициенты $\bar C_1$, $\bar C_2$, $\bar C_3$, $\bar C_4$ определяются как решения линейной алгебраической системы

$$\begin{aligned} &\tilde A\bar C_1 + \tilde B\bar C_2 + \tilde C\bar C_3 + \tilde D\bar C_4 = \tilde E, \qquad &&\tilde A\bar C_1 - \tilde B\bar C_2 - \tilde C\bar C_3 + \tilde D\bar C_4 = \tilde E,\\ &K\bar C_1 + L\bar C_2 + M\bar C_3 + N\bar C_4 = F, &&K\bar C_1 - L\bar C_2 - M\bar C_3 + N\bar C_4 = F. \end{aligned} \tag{30}$$

Коэффициенты системы определяются следующим образом:

$$\tilde A = \bar A + \bar\Phi_1, \quad \bar A = \operatorname{ch} æ \cos æ, \qquad \tilde D = \bar D + \bar\Phi_4, \quad \bar D = \operatorname{sh} æ \sin æ,$$

$$\tilde B = \bar B = \operatorname{ch} æ \sin æ, \quad \tilde C = \bar C = \operatorname{sh} æ\cos æ, \quad \tilde E = -(\Phi_0 + G_1 \operatorname{sh}\vartheta\sin\vartheta + G_4\operatorname{ch}\vartheta\cos\vartheta),$$

$$K = -2æ^2 \bar{D}\, \frac{\mathrm{Pr}}{\omega} - 2æ(\bar{C} - \bar{B})\, \frac{\mathrm{Pr}}{2\omega}, \qquad L = 2æ^2 \bar{C}\, \frac{\mathrm{Pr}}{\omega},$$
$$M = -2æ^2 \bar{B}\, \frac{\mathrm{Pr}}{\omega}, \qquad N = 2æ^2 \bar{A}\, \frac{\mathrm{Pr}}{\omega} - 2æ(\bar{C} + \bar{B})\, \frac{\mathrm{Pr}}{2\omega},$$
$$F = \frac{\mathrm{Pr}\,\eta}{2\omega}\, I_2 - \frac{\mathrm{Pr}\,\eta}{\omega}\,(C_1\bar{\Phi}_c + C_4\bar{\Phi}_s) - \frac{\mathrm{Pr}}{2\omega}\, 2\vartheta(G_1 D + G_4 A) - \frac{\mathrm{Pr}}{\omega}\, 2\vartheta^2(G_1\bar{\Phi}_c - G_4\bar{\Phi}_s).$$

Коэффициенты $A, D$ вычисляются по формулам (27), $C_1, C_4$ — по формулам (28). Здесь вычислены

$$I_1 = \frac{2\vartheta}{\omega}\,(C_4 - C_1)\,\mathrm{ch}\,\vartheta \sin\vartheta + \frac{2\vartheta}{\omega}\,(C_4 + C_1)\,\mathrm{sh}\,\vartheta \cos\vartheta,$$
$$I_2 = \frac{1}{\vartheta}\,(C_1 + C_4)\,\mathrm{ch}\,\vartheta \sin\vartheta + \frac{1}{\vartheta}\,(C_1 - C_4)\,\mathrm{sh}\,\vartheta \cos\vartheta,$$

а для удобства записи введены обозначения

$$\Phi_0 = \frac{\eta\omega}{8\,\mathrm{Pr}\,æ^4}\, I_1, \quad \bar{\Phi}_1 = \frac{\Phi_1}{4æ^4}, \quad \bar{\Phi}_4 = \frac{\Phi_4}{4æ^4}, \quad \bar{\Phi}_c = \mathrm{ch}\,\vartheta\cos\vartheta, \quad \bar{\Phi}_s = \mathrm{sh}\,\vartheta\sin\vartheta,$$
$$\Phi_1 = -4æ^3(\mathrm{ch}\,æ\sin æ + \mathrm{sh}\,æ\cos æ)/2, \qquad \Phi_4 = -4æ^3(\mathrm{sh}\,æ\cos æ - \mathrm{ch}\,æ\sin æ)/2,$$
$$G_0 = \Phi_0 + \bar{\Phi}_1\bar{C}_1 + \bar{\Phi}_4\bar{C}_4, \qquad G_1 = F_1/(4(æ^4 - \vartheta^4)), \qquad G_4 = F_4/(4(æ^4 - \vartheta^4)),$$
$$F_1 = 2\eta\vartheta^2 C_1 - \frac{\eta\omega}{\mathrm{Pr}}\,\frac{2\vartheta^2}{\omega}\, C_1, \qquad F_4 = -2\eta\vartheta^2 C_4 + \frac{\eta\omega}{\mathrm{Pr}}\,\frac{2\vartheta^2}{\omega}\, C_4.$$

Решение системы (30) имеет вид

$$\bar{C}_1 = \bar{\Delta}_1/\bar{\Delta}, \qquad \bar{C}_4 = \bar{\Delta}_4/\bar{\Delta}, \qquad \bar{C}_2 = \bar{C}_3 = 0,$$

где знаменатель определяется следующим образом:

$$\bar{\Delta} = (\bar{A} + \bar{\Phi}_1)\Big(2æ^2\bar{A}\,\frac{\mathrm{Pr}}{\omega} - 2æ(\bar{C} + \bar{B})\,\frac{\mathrm{Pr}}{2\omega}\Big) - \Big(-2æ^2\bar{D}\,\frac{\mathrm{Pr}}{\omega} - 2æ(\bar{C} - \bar{B})\,\frac{\mathrm{Pr}}{2\omega}\Big)(\bar{D} + \bar{\Phi}_4),$$

а числители записываются так:

$$\bar{\Delta}_1 = -(\Phi_0 + G_1\,\mathrm{sh}\,\vartheta\sin\vartheta + G_4\,\mathrm{ch}\,\vartheta\cos\vartheta)\Big(2æ^2\bar{A}\,\frac{\mathrm{Pr}}{\omega} - 2æ(\bar{C} + \bar{B})\,\frac{\mathrm{Pr}}{2\omega}\Big) -$$
$$-\Big(\frac{\mathrm{Pr}\,\eta}{2\omega}\, I_2 - \frac{\mathrm{Pr}\,\eta}{\omega}\,(C_1\bar{\Phi}_c + C_4\bar{\Phi}_s) - \frac{\mathrm{Pr}}{2\omega}\,2\vartheta(G_1D + G_4A) - \frac{\mathrm{Pr}}{\omega}\,2\vartheta^2(G_1\bar{\Phi}_c - G_4\bar{\Phi}_s)\Big)(\bar{D} + \bar{\Phi}_4),$$
$$\bar{\Delta}_4 = (\bar{A}+\bar{\Phi}_1)\Big(\frac{\mathrm{Pr}\,\eta}{2\omega}\, I_2 - \frac{\mathrm{Pr}\,\eta}{\omega}\,(C_1\bar{\Phi}_c + C_4\bar{\Phi}_s) - \frac{\mathrm{Pr}}{2\omega}\,2\vartheta(G_1D + G_4A) - \frac{\mathrm{Pr}}{\omega}\,2\vartheta^2(G_1\bar{\Phi}_c - G_4\bar{\Phi}_s)\Big) -$$
$$-\Big(2æ^2\bar{D}\,\frac{\mathrm{Pr}}{\omega} + 2æ(\bar{C} - \bar{B})\,\frac{\mathrm{Pr}}{2\omega}\Big)(\Phi_0 + G_1\,\mathrm{sh}\,\vartheta\sin\vartheta + G_4\,\mathrm{ch}\,\vartheta\cos\vartheta),$$

и, значит,

$$V_c(x) = \bar{C}_1\,\mathrm{ch}\,æx\cos æx + \bar{C}_4\,\mathrm{sh}\,æx\sin æx + \tilde{V}(x),$$
$$\tilde{V}(x) = G_0 + G_1\,\mathrm{sh}\,\vartheta x\sin\vartheta x + G_4\,\mathrm{ch}\,\vartheta x\cos\vartheta x.$$

Для функции $V_s$ имеет место выражение

$$V_s(x) = \mathrm{Pr}\,[-2\bar{C}_1æ^2\,\mathrm{sh}\,æx\sin æx + 2\bar{C}_4æ^2\,\mathrm{ch}\,æx\cos æx +$$
$$+ 2\vartheta^2(G_1\,\mathrm{ch}\,\vartheta x\cos\vartheta x - G_4\,\mathrm{sh}\,\vartheta x\sin\vartheta x)]/\omega -$$
$$- \mathrm{Pr}\,[2æ\bar{C}_1(\bar{C} - \bar{B}) + 2æ\bar{C}_4(\bar{C} + \bar{B}) - 2\vartheta(G_1D + G_4A)]/(2\omega) - \mathrm{Pr}\,\eta I_2/(2\omega) +$$
$$+ \mathrm{Pr}\,\eta[C_1\,\mathrm{ch}\,\vartheta x\cos\vartheta x + C_4\,\mathrm{sh}\,\vartheta x\sin\vartheta x]/\omega.$$

Таким образом, определены функции $V_c$ и $V_s$ и вместе с ними $V(x,t)$ вида (24).

Заметим, что в реальных ситуациях значения числа Буссинеска $\varepsilon$ малы. Проведенный анализ линеаризованной задачи вполне оправдан, поскольку ее решение дает главный член асимптотики при $\varepsilon \to 0$ (см. в [15] аналогичное обоснование для модели микроконвекции).

**3. Расчет траекторий.** Компоненты физической (размерной) скорости определяются как $v_1 = v_* u$, $v_2 = v_* v$, где $u = \varepsilon U$, $v = \varepsilon V$, $v_* = \chi/l$, а для $U$, $V$ используются формулы (16), (24). Зная функции $v_1$, $v_2$, можно рассчитать траектории жидких частиц. Для этого следует решить задачу Коши

$$\frac{dx}{dt} = v_1(x,t), \quad \frac{dy}{dt} = v_2(x,t), \quad t > 0, \qquad x(0) = x_0, \quad y(0) = 0. \tag{31}$$

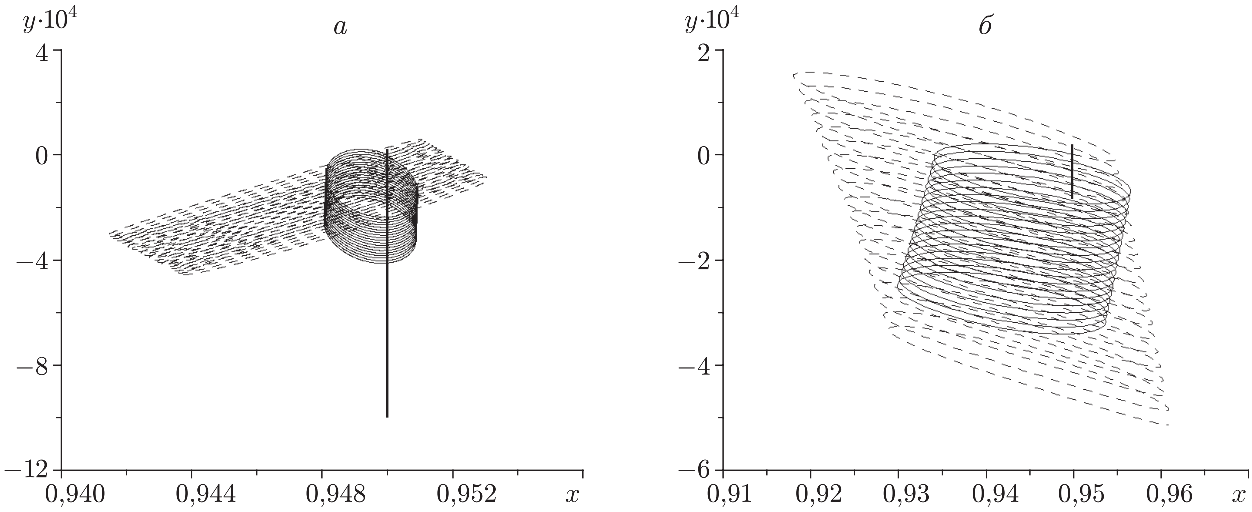
Заметим, что при построении траекторий жидких частиц по модели Обербека — Буссинеска следует взять $v_1 = 0$, в то время как выражение для $v_2$ не меняется.

Целью работы является определение траектории жидких частиц по результатам расчетов с использованием модели конвекции слабо сжимаемой жидкости. Отличия от результатов, предписываемых классической моделью конвекции, позволяют сделать вывод о наличии небуссинесковских эффектов и приводят к обоснованию целесообразности использования новых математических моделей конвекции. Кроме того, ставится задача сравнения результатов с теми, что получаются с использованием модели микроконвекции изотермически несжимаемой жидкости. Постановка начально-краевой задачи для уравнений микроконвекции с необходимостью предполагает задание на границе теплового потока при условии, что интегральный поток тепла равен нулю. В случае задачи о конвекции теплопроводной жидкости в бесконечной полосе это проявляется в том, что граничный тепловой режим изменяется в фазе, т. е. происходит нагрев одной боковой границы и одновременное охлаждение другой. Рассмотрение периодического во времени потока тепла на границе, изменяющегося в противофазе, стало возможным при моделировании конвекции в условиях микрогравитации благодаря новой математической модели конвекции слабо сжимаемой жидкости.

Проекции интегральных кривых системы (31) на плоскость $(x, y)$, рассчитанные по модели микроконвекции при значениях параметров $\varepsilon = 0{,}01$; $0{,}02$ и $\omega = 0{,}5$; $2$ ($\text{c}^{-1}$), приведены в [1, 2] и демонстрируют спиралеобразное (основной виток — эллипс) периодическое движение жидкой частицы. Как отмечено в [1], анализ поведения траекторий представляется делом весьма трудоемким ввиду многообразия безразмерных параметров, от которых зависит решение задачи Коши (31). Однако можно предположить, что в условиях применимости модели микроконвекции и при использовании в тех же условиях модели конвекции слабо сжимаемой жидкости интенсивность периодического движения и дрейфа частицы определяется прежде всего значениями угловой частоты $\omega$, параметром Буссинеска $\varepsilon$ и, конечно, положением точки $(x_0, y_0)$ относительно боковых границ области. Эти предположения подтверждены в [15].

Основные параметры задачи приводятся в таблице и условно представляются тремя моделями жидких сред и физических ситуаций, различающихся значениями Pr, $\eta$, $g$, аналогично тому, как было рассмотрено в [15]. При этом характерные скорости, числа Рейнольдса и времена процесса также различны. Для демонстрации траекторий, развивающихся во времени достаточно сложно, выбираются значения $\varepsilon = 0{,}5$; $0{,}02$ и $\omega = 0{,}5$; $5$. При этом значение $\varepsilon = 0{,}5$ выбирается для того, чтобы показать наиболее важную для

| Вариант расчета | Pr | $\eta$ | $\varepsilon$ | $\nu$, см$^2$/с | $\chi$, см$^2$/с | $g$, см/с$^2$ | $\beta$, град$^{-1}$ | $\omega$, с$^{-1}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0,75 | 1 | 0,01; 0,5 | 0,15 | 0,2 | 0,03 | 0,0003 | 0,5; 2,5; 5 |
| 2 | 0,01 | 0,4 | 0,01; 0,5 | 0,015 | 1,5 | 0,009 | 0,0006 | 0,5; 2,5; 5 |
| 3 | 0,1 | 0,4 | 0,02; 0,5 | 0,15 | 1,5 | 0,09 | 0,0006 | 0,5; 5 |



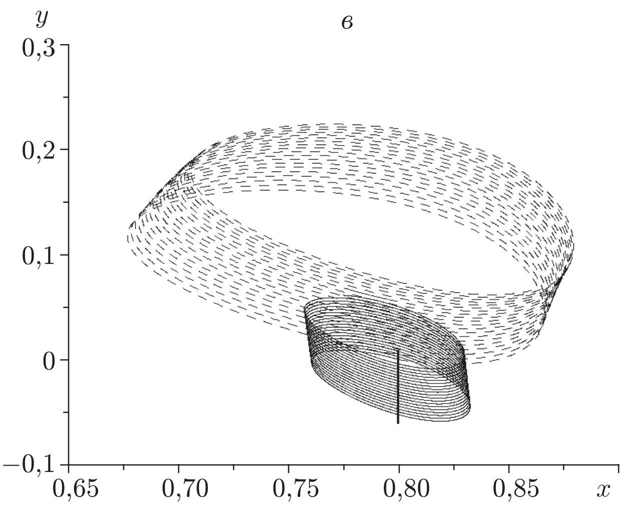




Рис. 1. Траектория движения жидкой частицы ($\varepsilon = 0{,}5$; $\omega = 5$; $\mathcal{A} = -1$):
*а, б* — $t = 0 \div 24$ с; $x_0 = 0{,}95$; $y_0 = 0$; варианты 1, 2; *в* — $t = 0 \div 240$ с; $x_0 = 0{,}8$; $y_0 = 0$; вариант 3

развития траектории зависимость от числа Буссинеска и для демонстрации ярких по наглядности результатов.

Расчеты проведены при $\mathcal{A} = -1$ (см. граничное условие (17)), что определяет нагрев правой грани $x = 1$ как в модели микроконвекции, так и в модели конвекции слабо сжимаемой жидкости. Это позволяет наиболее просто провести сравнение с результатами, изложенными в [1, 2, 15]. На рис. 1,*а,б,в* для вариантов 1, 2, 3 соответственно представлены траектории жидких частиц, рассчитанные по трем моделям конвекции. При этом траектории, рассчитанные по классической модели Обербека — Буссинеска, показаны отрезками вертикальных прямых, а траектории, рассчитанные по модели микроконвекции, представляют собой спиралеобразное движение. Они отмечены штриховой линией. Траектории, рассчитанные согласно модели конвекции слабо сжимаемой жидкости, являются по типу тоже спиралеобразными и отмечены сплошной линией. На рис. 1,*а,б* для $\varepsilon = 0{,}5$, $\omega = 5$ представлены траектории движения жидкой частицы на промежутке времени $[0, 24\text{ с}]$, которая в начальный момент времени $t = 0$ находится в точке $x_0 = 0{,}95$, $y_0 = 0$. На рис. 1,*в* для значений $\varepsilon = 0{,}5$, $\omega = 0{,}5$ представлены траектории движения жидкой частицы на промежутке времени $[0, 240\text{ с}]$. В начальный момент времени $t = 0$ частица находилась

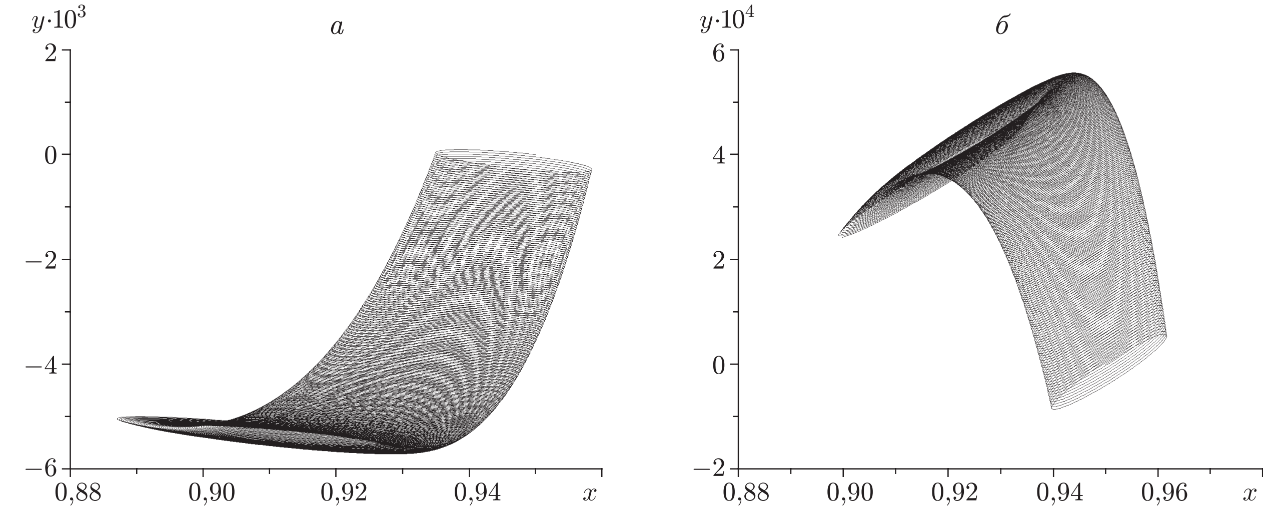



Рис. 2. Траектория движения жидкой частицы:
$t = 0 \div 600$ с; $x_0 = 0{,}95$; $y_0 = 0$; вариант 2; $\varepsilon = 0{,}5$; $\omega = 5$; $\mathcal{A} = -1$ ($a$), $\mathcal{A} = 1$ ($б$)

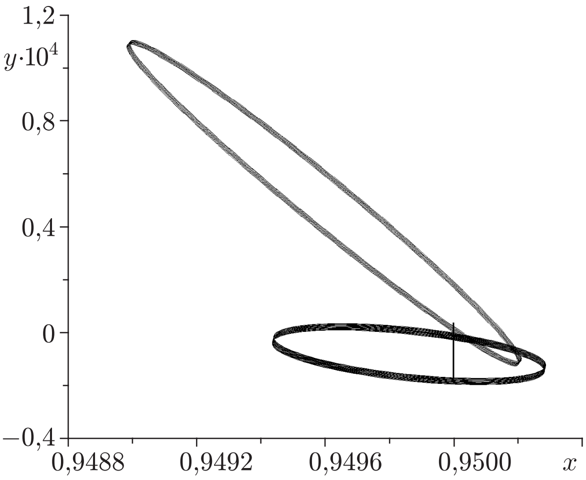



Рис. 3. Траектория движения жидкой частицы:
$t = 0 \div 24$ с; $x_0 = 0{,}95$; $y_0 = 0$; вариант 3; $\varepsilon = 0{,}02$; $\omega = 5$; $\mathcal{A} = -1$

в точке $x_0 = 0{,}8$, $y_0 = 0$. Модели Обербека — Буссинеска соответствует движение по вертикальному отрезку прямой $x = 0{,}95$ (рис. 1,*а,б*) или $x = 0{,}8$ (рис. 1,*в*).

На рис. 2 представлены результаты расчета для варианта 2 при $\varepsilon = 0{,}5$, $\omega = 2{,}5$, при этом жидкая частица в начальный момент времени находится в точке $(0{,}95, 0)$. Дрейф частицы прослеживается на промежутке времени $[0, 600$ с$]$. На этих рисунках показано сложное спиралеобразное движение согласно модели конвекции слабо сжимаемой жидкости. На рис. 2,*б* представлена траектория частицы в случае $\mathcal{A} = 1$ (см. условие (17)), что соответствует охлаждению правой грани $x = 1$. Для сравнения с моделью микроконвекции следует сказать, что при расчете для модели слабо сжимаемой жидкости меняется направление дрейфа частицы, в то время как для модели микроконвекции направление дрейфа частицы не изменится (см. рис. 2,*а*: движение вниз меняется на движение вверх).

На рис. 3 представлены траектории, рассчитанные для варианта 3 на промежутке времени $[0, 24$ с$]$ при $\varepsilon = 0{,}02$, $\omega = 5$. Жидкая частица находится в начальный момент времени в точке $(0{,}95, 0)$. Сравнивая траектории, заметим, что согласно модели микроконвекции получается спиралеобразная траектория большего диаметра, чем при расчете по модели слабо сжимаемой жидкости.

Все расчеты проводились до конечного времени $t_{end} = 2400$ с. Задача Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений (31) исследовалась численно методом Рунге — Кутты [16].

Автор выражает искреннюю благодарность В. В. Пухначеву за обсуждение постановки задачи и результатов исследования.

## ЛИТЕРАТУРА


1. **Андреев В. К., Капцов О. В., Пухначев В. В., Родионов А. А.** Применение теоретико-групповых методов в гидродинамике. Новосибирск: Наука. Сиб. отд-ние, 1994.
2. **Andreev V. K., Kaptsov O. V., Pukhnachov V. V., Rodionov A. A.** Applications of group-theoretical methods in hydrodynamics. Dordrecht; Boston; London: Kluwer Acad. Publ., 1998.
3. **Джозеф Д.** Устойчивость движений жидкости. М.: Мир, 1981.
4. **Юдович В. И.** Конвекция изотермически несжимаемой жидкости / Рост. гос. ун-т. Ростов-на-Дону, 1999. Деп. в ВИНИТИ 28.05.99, № 1699-В99.
5. **Пухначев В. В.** Иерархия моделей в теории конвекции // Зап. С.-Петерб. отд-ния мат. ин-та им. В. А. Стеклова. 2003. Вып. 288. С. 152–177.
6. **Гончарова О. Н.** Микроконвекция в слабых силовых полях. Сравнение двух моделей при численном исследовании // ПМТФ. 1997. Т. 38, № 2. С. 58–63.
7. **Гончарова О. Н.** Численное исследование микроконвекции в длинном прямоугольнике // Вычисл. технологии. 2000. Т. 5, № 5. С. 26–37.
8. **Paolucci S.** On the filtering of sound from the Navier — Stokes equations // Sandia Nat. Lab. Rep. SAND 82. Dec. 1982.
9. **Chenoweth D. R., Paolucci S.** Natural convection in an enclosed vertical air layer with large horizontal temperature differences // J. Fluid Mech. 1986. V. 169. P. 173–210.
10. **Никулин Д. А., Стрелец М. Х.** Численное моделирование нестационарной естественной конвекции сжимаемого газа в замкнутой недиабатической области // Теплофизика высоких температур. 1984. Т. 22, № 5. С. 906–912.
11. **Лапин Ю. В., Стрелец М. Х.** Внутренние течения газовых смесей. М.: Наука, 1989.
12. **Соболева Е. Б.** Моделирование естественной конвекции на основе уравнений Навье — Стокса в приближении дозвукового течения. М., 1997. (Препр. / Ин-т пробл. механики РАН; № 602).
13. **Соболева Е. Б., Крюков И. А.** Моделирование околокритических явлений в гидродинамическом приближении с “фильтрацией звука”. М., 1998. (Препр. / Ин-т пробл. механики РАН; № 624).
14. **Мосеенков В. Б.** Качественные методы исследования задач конвекции вязкой слабо сжимаемой жидкости. Киев: Наукове видання, 1998.
15. **Гончарова О. Н.** Точные решения линеаризованных уравнений микроконвекции в бесконечной полосе // VII Рос. симпозиум “Механика невесомости. Итоги и перспективы фундаментальных исследований гравитационно-чувствительных систем”, Москва, 11–14 апр. 2000 г. М.: Ин-т пробл. механики РАН, 2001. С. 78–85.
16. **Калиткин Н. Н.** Численные методы. М.: Наука, 1978.


*Поступила в редакцию 2/VI 2004 г.*