Прикладная механика и техническая физика, 1996, т. 37, № 2

СРЕДЫ С УРАВНЕНИЯМИ СОСТОЯНИЯ, ЗАВИСЯЩИМИ ОТ ПРОИЗВОДНЫХ

УДК 532.5

С. Л. Гаврилюк, С. М. Шугрин

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН,
630090 Новосибирск

1. Введение. С. К. Годунов [1] ввел широкий класс квазилинейных уравнений вида

$$\frac{\partial}{\partial x^\alpha}\left(\frac{\partial L^\alpha}{\partial q^\beta}\right)=0 \quad (\alpha=0,\dots,n,\ \beta=1,\dots,m), \qquad L^\alpha=L^\alpha(q^1,\dots,q^m). \tag{1.1}$$

Здесь и ниже суммирование производится по повторяющимся индексам.

Этот класс обладает следующими замечательными особенностями: во-первых, допускает дополнительный (замыкающий) закон сохранения

$$\frac{\partial \Phi^\alpha}{\partial x^\alpha}=0, \qquad \Phi^\alpha \equiv q^\beta\frac{\partial L^\alpha}{\partial q^\beta}-L^\alpha; \tag{1.2}$$

во-вторых, система (1.1) является симметрической, т. е. записывается в форме

$$A^\alpha_{\beta\gamma}\frac{\partial q^\gamma}{\partial x^\alpha}=0, \qquad A^\alpha_{\beta\gamma}=A^\alpha_{\gamma\beta}=\frac{\partial^2 L^\alpha}{\partial q^\beta\partial q^\gamma}. \tag{1.3}$$

Верно и обратное. Если система из m законов сохранения допускает дополнительный выпуклый закон сохранения, то она записывается в виде (1.1). Примеры систем уравнений типа (1.1)–(1.3) имеются в [1–7]. Класс таких уравнений целесообразен для описания квазилинейных гиперболических уравнений, моделирующих распространение волн в сплошных средах. Закон сохранения (1.2) является для них законом сохранения энергии или энтропии. Возникает естественное желание расширить этот класс так, чтобы описать нелинейные волны в средах с дисперсией.

Под системой с дисперсией понимаем систему нелинейных уравнений, имеющих форму точных законов сохранения, т. е. записываемых в виде

$$\frac{\partial}{\partial x^\alpha}\varphi^\alpha_\beta=0 \qquad (\alpha=0,\dots,n, \qquad \beta=1,\dots,m),$$

где функции φ^α_β зависят от конечного числа производных по независимым переменным (ниже рассмотрим лишь случай, когда φ^α_β зависят от q^β и их первых производных), и обладающих точными законами сохранения энергии и энтропии, если понятие энтропии в системе имеет смысл.

В настоящей работе дано описание такого класса в терминах вариационных производных и приведены многочисленные примеры математических моделей, попадающих в этот класс. Кроме того, анализируются особенности сред, уравнение состояния которых зависит от производных. Оказывается, что важнейшие термодинамические соотношения для них также формулируются в терминах вариационных производных.

2. Системы с дисперсией. Введем независимые переменные (x^α) $(\alpha=0,\dots,n)$, зависимые переменные (q^β) $(\beta=1,\dots,m)$, производные $q^\beta_\gamma\equiv\partial q^\beta/\partial x^\gamma$, $q^\beta_{\gamma\delta}\equiv\partial^2 q^\beta/\partial x^\gamma\partial x^\delta$

и функции $L^\alpha(q^\beta, q^\beta_\gamma)$. Обозначим вариационную производную от L^α как

$$\frac{\delta L^\alpha}{\delta q^\beta} \equiv \frac{\partial L^\alpha}{\partial q^\beta} - \frac{\partial}{\partial x^\gamma}\Big(\frac{\partial L^\alpha}{\partial q^\beta_\gamma}\Big).$$

Определение. Систему уравнений вида

$$\frac{\partial}{\partial x^\alpha}\Big(\frac{\delta L^\alpha}{\delta q^\beta}\Big) = 0 \tag{2.1}$$

назовем обобщением системы Годунова.

Имеет место следующее утверждение.

Теорема. *Система* (2.1) *допускает закон сохранения*

$$\frac{\partial \Phi^\alpha}{\partial x^\alpha} = 0, \qquad \Phi^\alpha \equiv q^\beta \frac{\delta L^\alpha}{\delta q^\beta} - L^\alpha + q^\beta_\gamma \frac{\partial L^\gamma}{\partial q^\beta_\alpha}. \tag{2.2}$$

Доказательство. Дифференцируя (2.2), получим

$$\frac{\partial \Phi^\alpha}{\partial x^\alpha} = q^\beta_\alpha \frac{\delta L^\alpha}{\delta q^\beta} + q^\beta \frac{\partial}{\partial x^\alpha}\Big(\frac{\delta L^\alpha}{\delta q^\beta}\Big) - \frac{\partial L^\alpha}{\partial q^\beta} q^\beta_\alpha - \frac{\partial L^\alpha}{\partial q^\beta_\gamma} q^\beta_{\gamma\alpha} + q^\beta_{\gamma\alpha} \frac{\partial L^\gamma}{\partial q^\beta_\alpha} + q^\beta_\gamma \frac{\partial}{\partial x^\alpha}\Big(\frac{\partial L^\gamma}{\partial q^\beta_\alpha}\Big) =$$

$$= q^\beta_\alpha\Big(\frac{\partial L^\alpha}{\partial q^\beta} - \frac{\partial}{\partial x^\gamma}\frac{\partial L^\alpha}{\partial q^\beta_\gamma}\Big) - q^\beta_\alpha \frac{\partial L^\alpha}{\partial q^\beta} - \frac{\partial L^\alpha}{\partial q^\beta_\gamma} q^\beta_{\gamma\alpha} + q^\beta_{\gamma\alpha}\frac{\partial L^\gamma}{\partial q^\beta_\alpha} + q^\beta_\gamma \frac{\partial}{\partial x^\alpha}\frac{\partial L^\gamma}{\partial q^\beta_\alpha} = -\frac{\partial L^\gamma}{\partial q^\beta_\alpha} q^\beta_{\alpha\gamma} + \frac{\partial L^\gamma}{\partial q^\beta_\alpha} q^\beta_{\gamma\alpha} = 0.$$

Теорема доказана.

Аналогичным образом можно построить закон сохранения (2.2), если L^α зависят от производных второго порядка и выше.

3. Примеры. В дальнейшем положим $x^0 = t, x^1 = x$.

1. *Обобщенное уравнение Кортевега — де Вриза* [8, 9]:

$$u_t + f(u)_x + u_{xxx} = 0. \tag{3.1}$$

Положим $L_0 = u^2/2, L^1 = \int^u f(z)dz - u_x^2/2$. Тогда (3.1) равносильно уравнению

$$\Big(\frac{\delta L^0}{\delta u}\Big)_t + \Big(\frac{\delta L^1}{\delta u}\Big)_x = 0.$$

2. *Обобщенное регуляризованное уравнение Буссинеска* [8–10]:

$$v_{tt} - v_{xx} - (f(v))_{xx} - v_{ttxx} = 0. \tag{3.2}$$

Запишем (3.2) в виде системы

$$\Big(\frac{\delta L^0}{\delta u}\Big)_t + \Big(\frac{\delta L^1}{\delta u}\Big)_x = 0, \quad \Big(\frac{\delta L^0}{\delta v}\Big)_t + \Big(\frac{\delta L^1}{\delta v}\Big)_x = 0,$$

$$L^0 = uv, \ L^1 = \frac{v_t^2}{2} - \frac{v^2}{2} - \int^v f(z)dz - \frac{u^2}{2}.$$

3. *Поперечные колебания грузиков, закрепленных на невесомой ненатянутой нити* (длинноволновое приближение) [11]. В безразмерных переменных уравнение движения таково:

$$v_{tt} = \Big(v^3 + \frac{\varepsilon^2}{4}(vv_x^2 + v^2 v_{xx})\Big)_{xx} \tag{3.3}$$

(ε — малый параметр). Уравнение (3.3) переписывается в виде системы

$$v_t - u_x = 0,\ u_t + p_x = 0, \qquad p = -\frac{\delta e}{\delta v}, \quad e = \frac{v^4}{4} - \frac{\varepsilon^2}{8} v^2 v_x^2. \tag{3.4}$$

Таким образом, необходимо положить

$$L^0 = uv, \qquad L^1 = -u^2/2 - e(v, v_x),$$

тогда (3.4) равносильно системе

$$\left(\frac{\delta L^0}{\delta u}\right)_t + \left(\frac{\delta L^1}{\delta u}\right)_x = 0, \qquad \left(\frac{\delta L^0}{\delta v}\right)_t + \left(\frac{\delta L^1}{\delta v}\right)_x = 0.$$

4. ***Модель снарядного режима течения газожидкостной смеси в окрестности термодинамической критической точки*** (длинноволновое приближение) [12]. Уравнения этой модели имеют вид (3.4).

5. ***Мелкая вода в приближении Буссинеска*** [8]:

$$h_t + (hu)_z = 0, \qquad u_t + uu_z + gh_z + c_0^2 h_0 h_{zzz}/3 = 0. \tag{3.5}$$

Здесь t — время; z — эйлерова координата; h — глубина жидкости; h_0 — невозмущенная глубина; g — ускорение свободного падения; $c_0^2 = gh_0$. Введем массовую лагранжеву координату x из соотношения $\partial z/\partial x = h^{-1}$. Так как

$$h_z = h_x \frac{\partial x}{\partial z} = hh_x, \qquad h_{zz} = h(hh_x)_x, \qquad h_{zzz} = h(h(hh_x)_x)_x,$$

то дивергентная форма записи производной такова:

$$h_z = (h^2/2)_x, \qquad h_{zzz} = h(h(h^2/2)_{xx})_x = hh_x(h^2/2)_{xx} + h^2(h^2/2)_{xxx} =$$
$$= (h^2/2)_x(h^2/2)_{xx} + (h^2(h^2/2)_{xx})_x - (h^2)_x(h^2/2)_{xx} =$$
$$= (h^2(h^2/2)_{xx})_x - (1/4)(h^2)_{xx}(h^2)_x = \left\{h^2(h^2/2)_{xx} - (1/8)((h^2)_x)^2\right\}_x.$$

После перехода к лагранжевым переменным уравнения (3.5) примут вид

$$\left(\frac{1}{h}\right)_t - u_x = 0,\ u_t + \left\{\frac{gh^2}{2} + \frac{h_0 c_0^2}{3}\left[h^2\left(\frac{h^2}{2}\right)_{xx} - \frac{1}{8}((h^2)_x)^2\right]\right\}_x = 0. \tag{3.5$'$}$$

Введем переменную $v = 1/h$. Имеем

$$(h^2)_x = -\frac{2v_x}{v^3}, \qquad (h^2)_{xx} = -2\left(\frac{v_x}{v^3}\right)_x = -\frac{2\left(v_{xx}v - 3v_x^2\right)}{v^4},$$

откуда

$$h^2\left(\frac{h^2}{2}\right)_{xx} - \frac{1}{8}((h^2)_x)^2 = -\frac{v_{xx}v - 3v_x^2}{v^6} - \frac{v_x^2}{2v^6} = -\frac{v_{xx}}{v^5} + \frac{5v_x^2}{2v^6}.$$

Следовательно, уравнения (3.5$'$) переписываются как

$$v_t - u_x = 0, \quad u_t + \left\{\frac{g}{2v^2} + \frac{h_0 c_0^2}{3}\left[\frac{5v_x^2}{2v^6} - \frac{v_{xx}}{v^5}\right]\right\}_x = 0. \tag{3.5$''$}$$

Введем функцию

$$e(v, v_x) = \frac{g}{2v} - \frac{h_0 c_0^2}{6}\frac{v_x^2}{v^5}.$$

Тогда

$$-\frac{\delta e}{\delta v} = -\left[-\frac{g}{2v^2} + \frac{5h_0c_0^2}{6}\frac{v_x^2}{v^6} + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{h_0c_0^2}{3}\frac{v_x}{v^5}\right)\right] =$$

$$= -\left[-\frac{g}{2v^2} + \frac{5h_0c_0^2}{6}\frac{v_x^2}{v^6} + \frac{h_0c_0^2}{3}\frac{v_{xx}}{v^5} - \frac{5h_0c_0^2}{3}\frac{v_x^2}{v^6}\right] = \frac{g}{2v^2} + \frac{5h_0c_0^2}{6}\frac{v_x^2}{v^6} - \frac{h_0c_0^2}{3}\frac{v_{xx}}{v^5}.$$

Таким образом, уравнения (3.5″) можно записать так [12]:

$$v_t - u_x = 0, \quad u_t + p_x = 0, \quad p = -\frac{\delta e}{\delta v}, \quad e = \frac{g}{2v} - \frac{h_0c_0^2}{6}\frac{v_x^2}{v^5}. \tag{3.5‴}$$

6. *Гранулированные среды* (*одномерные цепочки*). При распространении нелинейных волн в дискретных одномерных средах при взаимодействии частиц по обобщенному закону Герца в длинноволновом приближении возникает уравнение [13]

$$w_{tt} = -c_n^2\left\{(-w_x)^n + \frac{na^2}{6(n+1)}\left[(-w_x)^{\frac{n-1}{2}}((-w_x)^{\frac{n+1}{2}})_{xx}\right]\right\}_x, \tag{3.6}$$

где a — расстояние между частицами; w — смещение из положения равновесия; c_n — параметр, имеющий размерность скорости; $n > 1$ — показатель нелинейности в обобщенном законе Герца ($F \sim \delta^n$, F — сила взаимодействия между частицами, δ — сближение частиц). Из физических соображений рассматриваются лишь решения с $w_x < 0$.

Сделаем замену переменных $w_t \equiv u$, $w_x \equiv v$. Тогда (3.6) равносильно системе

$$v_t - u_x = 0, \qquad u_t + p_x = 0, \qquad p = c_n^2\left\{(-v)^n + \frac{na^2}{6(n+1)}(-v)^{\frac{n-1}{2}}\left((-v)^{\frac{n+1}{2}}\right)_{xx}\right\}.$$

Далее имеем

$$p = c_n^2\left\{(-v)^n + \frac{na^2}{12}(-v)^{\frac{n-1}{2}}\left((-v)^{\frac{n-1}{2}}(-v_x)\right)_x\right\},$$

$$p = c_n^2\left\{(-v)^n + \frac{n(n-1)a^2}{24}(-v)^{n-2}v_x^2 - \frac{na^2}{12}(-v)^{n-1}v_{xx}\right\}.$$

Возьмем теперь

$$e(v, v_x) = c_n^2\left\{\frac{(-v)^{n+1}}{n+1} + A(-v)^{n-1}v_x^2\right\}.$$

Определим постоянную A так, чтобы

$$p = -\left\{\frac{\partial e}{\partial v} - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial e}{\partial v_x}\right)\right\},$$

$$p = -c_n^2\left\{-(-v)^n - A(n-1)(-v)^{n-2}v_x^2 - \frac{\partial}{\partial x}(2A(-v)^{n-1}v_x)\right\} =$$

$$= c_n^2\left\{(-v)^n - A(n-1)(-v^{n-2})v_x^2 + 2A(-v)^{n-1}v_{xx}\right\}.$$

Сравнивая это выражение с полученным ранее, находим $A = -na^2/24$.

Таким образом, система (3.6) также записывается в виде

$$v_t - u_x = 0, \quad u_t + p_x = 0, \quad p = -\frac{\delta e}{\delta v}, \quad e = c_n^2\left\{\frac{(-v)^{n+1}}{n+1} - \frac{na^2}{24}(-v)^{n-1}v_x^2\right\}. \tag{3.6′}$$

Отметим, что при $n = 3$ система (3.6′) совпадает с (3.4).

7. *Теория капиллярности Ван-дер-Ваальса — Кортевега* [14–16]. При исследовании изотермических фазовых переходов жидкость — газ возникает система

$$v_t - u_x = 0, \qquad u_t + p_x = 0,$$
$$p = -\frac{\delta e}{\delta v}, \qquad e = -\int^{v} p_0(w)dw + \frac{cv_x^2}{2}, \qquad p_0(v) = \frac{RT}{v-b} - \frac{a}{v^2}, \tag{3.7}$$

где x — массовая лагранжева координата; v — удельный объем смеси; u — скорость смеси; R — газовая постоянная; T — температура; a, b, c — положительные постоянные.

Отметим, что системы (3.4), (3.5‴), (3.6′), (3.7) отличаются друг от друга лишь разными функциями $e(v,\ v_x)$ и напоминают уравнения газовой динамики в массовых лагранжевых координатах. Отличие в том, что давление p здесь зависит не только от удельного объема v, но и от производных v_x и v_{xx}. Для систем уравнений этого типа наиболее естественной является не задача о распаде производного разрыва, а задача о структуре бегущих волн. В [12] изучен вопрос об устойчивости периодических бегущих волн при произвольной функции $e(v,\ v_x)$. (Периодические волны устойчивы или неустойчивы в зависимости от того, является ли соответствующая система уравнений модуляций системой гиперболического или переменного типа. Исследование устойчивости периодических волн в одном частном случае проведено также в [17].)

8. *Пузырьковая жидкость.* Уравнения пузырьковой жидкости были получены независимо авторами работ [18–20]. Одномерные уравнения движения без учета эффектов диссипации, массообмена, дробления пузырьков, поверхностного натяжения и сжимаемости несущей среды имеют вид

$$\rho_t + (\rho u)_z = 0, \qquad u_t + uu_z + \frac{1}{\rho}p_z = 0,$$
$$R\frac{d^2R}{dt^2} + \frac{3}{2}\left(\frac{dR}{dt}\right)^2 = \frac{1}{\rho_e}(p_g(R) - p), \qquad N_t + (uN)_z = 0. \tag{3.8}$$

Здесь z — эйлерова координата; $d/dt = \partial/\partial t + u\partial/\partial z$; $\rho = \alpha_l\rho_l + \alpha_g\rho_g$ — плотность смеси (индекс l относится к жидкости, а g — к газу); α_l, α_g $(\alpha_l + \alpha_g = 1)$ — объемные концентрации жидкости и газа соответственно; p — давление в смеси; R — осредненный радиус пузырьков; $p_g(R)$ — давление внутри газового пузырька; N — число пузырьков в единице объема смеси. Объемная концентрация α_g и плотность ρ_g выражаются по формулам

$$\alpha_g = \frac{4}{3}\pi R^3 N, \qquad \rho_g = \frac{3m_g}{4\pi R^3},$$

где $m_g = \text{const}$ — масса газа внутри пузырька.

В [21] показано, что если ввести массовую лагранжеву координату x, то уравнения (3.8) записываются в виде

$$v_t - u_x = 0, \qquad u_t + p_x = 0, \qquad p = -\frac{\delta e(v,v_t)}{\delta v} = -\left[\frac{\partial e}{\partial v} - \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial e}{\partial v_t}\right], \tag{3.8′}$$
$$e(v,v_t) = e_g(v) - 2\pi n\rho_l R^3 R_t^2, \quad v \equiv \frac{1}{\rho_l} + \frac{4}{3}\pi R^3 n, \quad n \equiv \frac{N}{\rho} = \text{const}, \quad de_g(v) + p_g(R)dv = 0.$$

В [21] построены уравнения модуляций для системы (3.8′) при произвольной функции $e(v, v_t)$. Частный случай системы уравнений модуляций, когда рассматриваются колебания пузырьков вблизи резонанса, получен в [22]. В [23] при выводе уравнений модуляций учтены эффекты диссипации.

4. Среды с уравнениями состояния, зависящими от $\nabla\rho$. Рассмотрим уравнения среды, для которой удельная внутренняя энергия ε есть функция плотности, градиента плотности и энтропии.

Механическая система. Вначале разберем случай механической системы, где ε зависит только от ρ и $\nabla\rho$ (многомерный аналог системы (3.4)). Так как ε есть галилеев инвариант, то

$$\varepsilon = \varepsilon(\rho, |\nabla\rho|^2), \quad |\nabla\rho|^2 \equiv \sum_i |\partial\rho/\partial x^i|^2.$$

Уравнения такой среды были построены в [15, 16, 24] (см. также библиографию в этих работах). В данной работе дается вывод уравнений в целях полноты изложения, а также для того, чтобы явно выделить роль вариационных производных в определении эффективного давления P (см. ниже (4.6)) и отметить некоторые другие важные обстоятельства.

Всюду далее латинские координатные индексы принимают значения $1, \ldots, n$, $x = (x^i) \in R^n$. Для производных также используются обозначения: $\varphi_t \equiv \partial\varphi/\partial t$, $\varphi_k \equiv \partial\varphi/\partial x^k$.

Пусть лагранжевы координаты частиц есть $\xi(t,x) = (\xi^a)$, $\xi^a_k = \partial\xi^a/\partial x^k$. Матрицу, обратную матрице (ξ^a_k), обозначим через (x^k_a), так что

$$x^k_a \xi^b_k = \delta^b_a, \quad x^k_a \xi^a_i = \delta^k_i, \tag{4.1}$$

где δ^b_a — символ Кронекера. Из (4.1) после дифференцирования по ξ^c_m и умножения на x^i_b следует

$$\frac{\partial x^i_a}{\partial \xi^c_n} = -x^m_a x^i_c. \tag{4.2}$$

Поскольку (ξ^a) — лагранжевы координаты, то

$$\frac{\partial\xi^a}{\partial t} + v^k \frac{\partial\xi^a}{\partial x^k} = 0,$$

откуда с учетом (4.2) вытекают равенства

$$v^i = -x^i_a \xi^a_t; \tag{4.3}$$

$$\frac{\partial v^k}{\partial \xi^a_i} = -x^k_a v^i. \tag{4.4}$$

Обозначим

$$p \equiv \rho^2 \frac{\partial\varepsilon}{\partial\rho} = \rho\frac{\partial(\rho\varepsilon)}{\partial\rho} - \rho\varepsilon, \qquad \frac{1}{2}\lambda \equiv \frac{\partial\varepsilon}{\partial|\nabla\rho|^2}. \tag{4.5}$$

Для вывода уравнений воспользуемся вариационным принципом (см. также [25]). Возьмем функционал

$$J' = \int\limits_{t_0}^{t_1} \int\limits_{R^n} \left\{\rho\left[\frac{v^2}{2} - \varepsilon\right] + \varphi\left[\frac{\partial\rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x^k}(\rho v^k)\right]\right\} dx dt.$$

Здесь $\varphi(t, x)$ — лагранжев множитель, соответствующий введению в качестве связи закона сохранения массы. Поскольку добавление дивергентного слагаемого на вид уравнений

Эйлера не влияет, то J' можно заменить более удобным для вычислений функционалом

$$J = \int_{t_0}^{t_1} \int_{R^n} L dx dt, \qquad L \equiv \rho\Big\{\frac{v^2}{2} - \varepsilon - \frac{d\varphi}{dt}\Big\}, \qquad \frac{d\varphi}{dt} \equiv \frac{\partial\varphi}{\partial t} + v^k \frac{\partial\varphi}{\partial x^k}.$$

Вычисление вариационных производных. Определим

$$E_\varphi \equiv \frac{\delta L}{\delta\varphi} = \frac{\partial\rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x^k}(\rho v^k), \qquad E_\rho \equiv \frac{\delta L}{\delta\rho} = \frac{1}{\rho}(L - P),$$
$$P \equiv p - \rho\frac{\partial}{\partial x^i}\Big(\rho\lambda\frac{\partial\rho}{\partial x^i}\Big) = \rho\frac{\delta(\rho\varepsilon)}{\delta\rho} - \rho\varepsilon. \tag{4.6}$$

Обозначим $E_a \equiv \delta L/\delta\xi^a$ и вычислим $E_j \equiv \xi^a_j E_a$:

$$E_j = -\xi^a_j \frac{\partial}{\partial t}\Big(\frac{\partial L}{\partial \xi^a_t}\Big) - \xi^a_j \frac{\partial}{\partial x^k}\Big(\frac{\partial L}{\partial \xi^a_k}\Big) = -\frac{\partial}{\partial t}\Big(\xi^a_j \frac{\partial L}{\partial \xi^a_t}\Big) - \frac{\partial}{\partial x^k}\Big(\xi^a_j \frac{\partial L}{\partial \xi^a_k} - L\delta^{jk}\Big) - R_j,$$

$$R_j = \frac{\partial L}{\partial\rho}\frac{\partial\rho}{\partial x^j} + \frac{\partial L}{\partial\rho_i}\frac{\partial\rho_i}{\partial x_j} + \frac{\partial L}{\partial\varphi_t}\frac{\partial\varphi_t}{\partial x^j} + \frac{\partial L}{\partial\varphi_k}\frac{\partial\varphi_k}{\partial x^j} =$$

$$= E_\rho\frac{\partial\rho}{\partial x^j} + \frac{\partial}{\partial x^i}\Big(\frac{\partial\rho}{\partial x^j}\frac{\partial L}{\partial\rho_i}\Big) - \Big\{\frac{\partial}{\partial t}(\rho\varphi_j) + \frac{\partial}{\partial x^k}(\rho v^k\varphi_j)\Big\} + \varphi_j E_\varphi.$$

Учитывая (4.3), (4.4), находим

$$\xi^a_j \frac{\partial L}{\partial \xi^a_t} = -\rho v^j + \rho\varphi_j, \qquad \xi^a_j \frac{\partial L}{\partial \xi^a_k} = -\rho v^j v^k + \rho v^k \varphi_j.$$

Инвариантность и закон сохранения импульса. Функционал J инвариантен относительно пространственных сдвигов, т. е. групп преобразований G_j с оператором $\partial/\partial x^j$ [26]. По теореме Нетер отсюда следует дивергентность выражения

$$\mathbf{J}^j \equiv \varphi_j E_\varphi + \rho_j E_\rho + \xi^a_j E_a \equiv \varphi_j E_\varphi + \rho_j E_\rho + E_j.$$

Собирая полученные ранее соотношения, находим

$$\mathbf{J}^j = \frac{\partial}{\partial t}(\rho v^j) + \frac{\partial}{\partial x^k}\Big\{\rho v^j v^k + L\delta^{jk} + \rho\lambda\frac{\partial\rho}{\partial x^k}\frac{\partial\rho}{\partial x^j}\Big\}.$$

Инвариантность и закон сохранения энергии. Функционал J инвариантен относительно временных сдвигов, т. е. группы G_0 с оператором $\partial/\partial t$. По теореме Нетер это влечет дивергентность выражения

$$\mathbf{E} \equiv -\varphi_t E_\varphi - \rho_t E_\rho - \xi^a_t E_a.$$

После вычислений получим

$$\mathbf{E} = \frac{\partial}{\partial t}\Big\{\rho\Big(\varepsilon + \frac{v^2}{2}\Big)\Big\} + \frac{\partial}{\partial x^k}\Big\{\rho v^k\Big(\varepsilon + \frac{v^2}{2}\Big) + v^k L - \rho\lambda\frac{\partial\rho}{\partial t}\frac{\partial\rho}{\partial x^k}\Big\}.$$

Итоговая система. Уравнения Эйлера имеют вид $E_\varphi = 0$, $E_\rho = 0$, $E_a = 0$. Из них следует, что $\mathbf{J}^j = 0$ и $\mathbf{E} = 0$. Уравнение $E_\rho = 0$ дает соотношение

$$L = P. \tag{4.7}$$

Учитывая равенство (4.7), приходим к системе уравнений

$$\mathbf{M} \equiv \frac{\partial\rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x^k}(\rho v^k) = 0; \tag{4.8}$$

$$\mathbf{J}^j \equiv \frac{\partial}{\partial t}(\rho v^j) + \frac{\partial}{\partial x^k}(\rho v^j v^k + \Pi^{jk}) = 0; \qquad (4.9)$$

$$\Pi^{jk} \equiv P\delta^{jk} + \rho\lambda \frac{\partial \rho}{\partial x^j}\frac{\partial \rho}{\partial x^k}; \qquad (4.10)$$

$$\mathbf{E} \equiv \frac{\partial}{\partial t}\Big\{\rho\Big(\varepsilon + \frac{v^2}{2}\Big)\Big\} + \frac{\partial}{\partial x^k}\Big\{\rho v^k\Big(\varepsilon + \frac{v^2}{2}\Big) + v^j\Pi^{jk} - \rho\lambda\frac{\partial\rho}{\partial x^k}\frac{d\rho}{dt}\Big\} = 0. \qquad (4.11)$$

Уравнение (4.11) есть следствие (4.6) и (4.8)–(4.10). Справедливо важное равенство

$$\mathbf{E} = (h - v^2/2)\mathbf{M} + v^j\mathbf{J}^j; \qquad (4.12)$$

$$h \equiv \delta(\rho\varepsilon)/\delta\rho. \qquad (4.13)$$

Соотношения (4.12), (4.13) имеют характерную особенность — они совпадают по форме с соответствующими им соотношениями для баротропной жидкости с заменой обычной производной $\partial(\rho\varepsilon)/\partial\rho$ на вариационную (ср. также (4.5) и (4.6)).

Учет тепла. Пусть локальное состояние интересующей нас физической системы описывается набором величин $\rho,\ \nabla\rho,\ s,\ v = (v^k)$ (s — удельная энтропия) и задано уравнение состояния $\varepsilon = \varepsilon(\rho, |\nabla\rho|^2, s)$. Полагаем

$$p \equiv \rho^2\frac{\partial\varepsilon}{\partial\rho} = \rho\frac{\partial(\rho\varepsilon)}{\partial\rho} - \rho\varepsilon, \quad \frac{\lambda}{2} \equiv \frac{\partial\varepsilon}{\partial|\nabla\rho|^2}, \quad T \equiv \frac{\partial\varepsilon}{\partial s},$$

$$P \equiv \rho^2\frac{\partial\varepsilon}{\partial\rho} - \rho\frac{\partial}{\partial x^j}\Big(\rho\lambda\frac{\partial\rho}{\partial x^i}\Big) = \rho\frac{\delta(\rho\varepsilon)}{\delta\rho} - \rho\varepsilon.$$

Введем галилеевы векторы

$$V = (V^\alpha) \equiv (1, v) = (1, v^1, \ldots, v^n), \quad W = (W^\alpha) \equiv (0, \rho_1, \ldots, \rho_n),$$

где $\rho_j \equiv \partial\rho/\partial x^j$. Далее понадобится общий вид дивергентного галилеева скаляра, т. е. выражения

$$X \equiv \frac{\partial}{\partial x^\alpha}Y^\alpha, \quad x^0 \equiv t,$$

где по предположению Y^α могут зависеть только от $\rho,\ s,\ V,\ W$, а X есть галилеев инвариант, или скаляр. Согласно [27],

$$Y = AV + BW + \mathrm{const}. \qquad (4.14)$$

Здесь A и B зависят только от $\rho,\ |\nabla\rho|^2,\ s$.

Теперь задача сводится к отысканию стационарного (экстремального) положения функционала

$$J' \equiv \int\limits_{t_0}^{t_1}\int\limits_{R^n}\rho\Big(\frac{v^2}{2} - \varepsilon\Big)dx\,dt$$

при наложенных связях. В качестве таковых берутся закон сохранения массы (4.8) и закон сохранения энтропии. Последний должен быть, во-первых, точным законом сохранения (ср. определение системы с дисперсией в п. 1), т. е. иметь форму $\partial Y^\alpha/\partial x^\alpha = 0$, во-вторых, левая часть этого равенства должна быть галилеевым скаляром. Поскольку рассматриваются системы, локальное состояние которых характеризуется набором $(\rho,\ \nabla\rho,\ s,\ v)$, то принимаем, что Y^α зависят только от этих величин. Следовательно, имеет место (4.14).

Наконец, по своему физическому смыслу закона сохранения энтропии он должен записываться так: $\partial(\rho s)/\partial t + \partial(\ldots)^k/\partial x^k = 0$, откуда $A = \rho s$. Окончательно берем

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho s) + \frac{\partial}{\partial x^k}\Big(\rho s v^k + \rho\zeta\frac{\partial\rho}{\partial x^k}\Big) = 0, \tag{4.15}$$

где $\zeta = \zeta(\rho, |\nabla\rho|^2, s)$. Пусть вначале $\zeta = 0$. В этом случае получаются уравнения, имеющие форму уравнений (4.8)–(4.11), где $\varepsilon = \varepsilon(\rho, |\nabla\rho|^2, s)$, к которым присоединяется уравнение

$$\mathbf{S} \equiv \frac{\partial}{\partial t}(\rho s) + \frac{\partial}{\partial x^k}(\rho s v^k) = 0. \tag{4.16}$$

В уравнениях (4.8)–(4.11), (4.16) одно является следствием остальных. Это вытекает из равенства, аналогичного (4.12):

$$\mathbf{E} = \Big(\gamma - \frac{v^2}{2}\Big)\mathbf{M} + v^j\mathbf{J}^j + T\mathbf{S}; \tag{4.17}$$

$$\gamma \equiv \left.\frac{\delta(\rho\varepsilon)}{\delta\rho}\right|_{(\rho s)} = \varepsilon + P/\rho - Ts. \tag{4.18}$$

Если $\varepsilon = \varepsilon(\rho, s) = \varepsilon(\rho, (\rho s)/\rho)$, то

$$\gamma = \left.\frac{\partial(\rho\varepsilon)}{\partial\rho}\right|_{(\rho s)} = \varepsilon + p/\rho - Ts, \tag{4.19}$$

т. е. γ — удельный потенциал Гиббса. Таким образом, выражение (4.18) — это естественное обобщение удельного потенциала Гиббса (4.19) для рассматриваемого класса систем. Справедливо равенство

$$P = \rho\left.\frac{\delta(\rho\varepsilon)}{\delta\rho}\right|_{(\rho s)} + (\rho s)\left.\frac{\delta(\rho\varepsilon)}{\delta(\rho s)}\right|_{\rho} - \rho\varepsilon, \tag{4.20}$$

которое есть, очевидно, не что иное, как вариационный аналог преобразования Лежандра. Символ типа $\delta(\rho\varepsilon)/\left.\delta(\rho s)\right|_\rho$ означает, что при вычислении вариационной производной переменная ρ не варьируется. В данном случае

$$\left.\frac{\delta(\rho\varepsilon)}{\delta(\rho s)}\right|_{\rho} = \frac{\partial\varepsilon}{\partial s} = T, \quad \left.\frac{\delta(\rho\varepsilon)}{\delta\rho}\right|_{(\rho s)} = \gamma = \varepsilon + \frac{P}{\rho} - Ts.$$

По-видимому, в некотором разумном смысле преобразование (4.20) обратимо, однако этот вопрос до конца не ясен. Фундаментальное равенство (4.17) можно записать еще как

$$\mathbf{S} = -\frac{1}{T}\Big(\gamma - \frac{v^2}{2}\Big)\mathbf{M} - \frac{1}{T}v^j\mathbf{J}^j + \frac{1}{T}\mathbf{E}, \tag{4.21}$$

откуда видно, что $1/T$ — интегрирующий множитель при законе сохранения энергии, как и в классической механике сплошной среды.

По сути дела (4.21) есть одно из наиболее точных и общих выражений второго начала термодинамики (за вычетом того, что входит в круг идей необратимости). Возьмем классическую дифференциальную форму Гиббса

$$d\varepsilon = Tds - pd(1/\rho), \tag{4.22}$$

где $\varepsilon = \varepsilon(\rho, s)$.

Она равносильна дифференциальной форме

$$d(\rho\varepsilon) = \gamma d\rho + Td(\rho s), \tag{4.23}$$

$$\gamma = \partial(\rho\varepsilon)/\,\partial\rho|_{(\rho s)} = \varepsilon + p/\rho - Ts, \quad T = \partial(\rho\varepsilon)/\,\partial(\rho s)|_{\rho}.$$

Для уравнений классической газовой динамики равенства (4.22), (4.23) и (4.17) равносильны. Поэтому каждое из них — своеобразное представление второго начала термодинамики. Но (4.17) является в некотором отношении более общим выражением, чем (4.23), поскольку имеет смысл и для неклассических сред и на его базе можно определить аналог потенциала Гиббса γ и температуру T. Чтобы еще отчетливее выявить далеко идущее структурное родство классических и новых вариационных формул, введем вариационную термодинамическую форму

$$\delta(\rho\varepsilon) = \gamma\delta\rho + T\delta(\rho s), \tag{4.24}$$

которой придается следующий естественный смысл: по определению она равносильна соотношениям

$$\gamma = \left.\frac{\delta(\rho\varepsilon)}{\delta\rho}\right|_{(\rho s)}, \qquad T = \left.\frac{\delta(\rho\varepsilon)}{\delta(\rho s)}\right|_{\rho}.$$

Структура выражений (4.23) и (4.24) тождественна.

Итак, фундаментальные соотношения классической механики сплошной среды и термодинамики переносятся на рассматриваемый класс сред с дисперсией с заменой обычной производной на вариационную.

Общее замечание. К уравнению состояния типа $\varepsilon = \varepsilon(\rho, |\nabla\rho|^2, s)$, вообще говоря, можно прийти двумя разными способами.

Во-первых, его можно получить после подходящего осреднения первоначальной системы, где имеются высокочастотные колебания (флуктуации). В этом случае величина $T = \partial\varepsilon/\partial s$ может не иметь прямого смысла физической температуры. Но она является ее точным аналогом, так что $1/T$ — интегрирующий множитель при $\mathbf{E}$ в (4.21). Эта аналогия будет полезна при исследовании сред с невыпуклыми уравнениями состояния, где могут быть фазовые переходы или иные особенности, при построении диссипативных систем и обобщении соотношений Онсагера на среды с дисперсией (см. [27, 28]).

Во-вторых, можно исходить из обобщения простой классической ситуации, в которой локальное состояние интересующей нас физической системы первоначально характеризовалось набором величин $\rho, s, v = (v^k)$ и задавалось уравнением состояния $\varepsilon = \varepsilon_0(\rho, s)$, причем $T = \partial\varepsilon_0/\partial s$ имело смысл физической температуры. Если такое описание оказалось в каком-то отношении неудовлетворительным, то можно попытаться расширить первоначальный набор величин, определяющих состояние системы в точке (t, x), вводя в него дополнительно еще какие-то величины, например $\nabla\rho$, и одновременно обобщая уравнение состояния, т. е. задавая его в виде $\varepsilon = \varepsilon(\rho, \nabla\rho, s)$ (фактически так именно часто и происходит). В этом случае единственное корректное определение температуры есть $T = \partial\varepsilon/\partial s$, что ограничивает выбор возможных уравнений состояния.

Если в локальный набор определяющих состояние системы величин введены производные $\partial s/\partial x$, то при вычислении температуры через $(\rho\varepsilon)$ нужно будет перейти к вариационной производной. Во всех случаях величина, обратная температуре, должна быть интегрирующим множителем при $\mathbf{E}$ в выражении типа (4.21).

Общий случай. Пусть $\zeta \neq 0$. Возьмем функционал

$$J' \equiv \int\limits_{t_0}^{t_1} \int\limits_{R^n} \left\{ \rho\left[\frac{v^2}{2} - \varepsilon\right] + \varphi\left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x^k}(\rho v^k)\right] + \psi\left[\frac{\partial (\rho s)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x^k}\left(\rho s v^k + \rho\zeta\frac{\partial \rho}{\partial x^k}\right)\right]\right\} dx dt,$$

учитывающий связь (4.15). После вычислений приходим к системе уравнений

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x^k}\left(\rho v^k\right) = 0; \tag{4.25}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\rho v^j\right) + \frac{\partial}{\partial x^k}\left\{\rho v^j v^k + (P+G)\delta^{jk} + \rho\lambda\frac{\partial \rho}{\partial x^i}\frac{\partial \rho}{\partial x^j} + G^{jk}\right\} = 0,$$

$$G \equiv \rho\left\{\frac{\partial \zeta}{\partial \rho}\rho_k\psi_k - \frac{\partial}{\partial x^i}\left(\rho\zeta\psi_i + 2\rho\frac{\partial \zeta}{\partial |\nabla\rho|^2}\rho_i\rho_k\psi_k\right)\right\}, \tag{4.26}$$

$$G^{jk} \equiv 2\zeta\left(\rho_j\psi_k + \rho_k\psi_j\right) + 2\rho\frac{\partial \zeta}{\partial |\nabla\rho|^2}\rho_j\rho_k\rho_i\psi_i;$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho s) + \frac{\partial}{\partial x^k}\left(\rho s v^k + \rho\zeta\frac{\partial \rho}{\partial x^k}\right) = 0; \tag{4.27}$$

$$\frac{d\psi}{dt} + \frac{\partial \zeta}{\partial s}\frac{\partial \rho}{\partial x^k}\frac{\partial \psi}{\partial x^k} = -T. \tag{4.28}$$

Закон сохранения энергии для системы (4.25)–(4.28) таков:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left\{\rho\left(\varepsilon + \frac{v^2}{2} + \zeta\rho_i\psi_i\right)\right\} + \frac{\partial}{\partial x^k}\left\{\rho v^k\left(\varepsilon + \frac{v^2}{2} + \zeta\rho_i\psi_i\right) + \right.$$
$$\left. + v^k(P+G) - \frac{\partial \rho}{\partial t}\left(\rho\lambda\rho_k\right) + \rho\zeta\left(\rho_k\psi_t - \rho_t\psi_k\right) - 2\frac{\partial \zeta}{\partial |\nabla\rho|^2}\rho_k\rho_i\psi_i\right\} = 0. \tag{4.29}$$

Уравнения (4.25)–(4.29) сложны. Но в некоторых случаях они сильно упрощаются. Например, если ζ зависит только от ρ, то

$$G = -\rho\zeta\frac{\partial}{\partial x^i}\left(\rho\frac{\partial \psi}{\partial x^i}\right), \quad \frac{d\psi}{dt} = -T.$$

Случай $\zeta \neq 0$ разобран для того, чтобы продемонстрировать, что в системах с дисперсией, наряду с традиционными по форме законами сохранения вида (4.16), логически возможны более общие выражения, подобные (4.15). В некоторых ситуациях они, вероятно, могут иметь физический смысл и описывать новые физические явления.

5. Среды с уравнениями состояния, зависящими от $\dot\rho$. Рассмотрим теперь среду, для которой набор величин, определяющих состояние системы, таков: $\rho, \dot\rho \equiv d\rho/dt$, $s, v = (v^k)$. Возьмем функционал

$$J \equiv \int\limits_{t_0}^{t_1} \int\limits_{R^n} \left\{ \rho\left[\frac{v^2}{2} - e\right] + \varphi\left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x^k}(\rho v^k)\right] + \psi\left[\frac{\partial (\rho s)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x^k}(\rho s v^k)\right]\right\} dx dt,$$

где $e = e(\rho, \dot\rho, s)$. В качестве связи здесь приняты законы сохранения массы и энтропии.

После вычислений приходим к системе

$$\mathrm{M} \equiv \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial (\rho v^k)}{\partial x^k} = 0; \tag{5.1}$$

$$\mathbf{J}^j \equiv \frac{\partial}{\partial t}(\rho v^j) + \frac{\partial}{\partial x^k}(\rho v^j v^k + P\delta^{jk}) = 0; \tag{5.2}$$

$$P \equiv p - \rho\Big\{\frac{\partial}{\partial t}\Big[\frac{\partial(\rho e)}{\partial\dot\rho}\Big] + \frac{\partial}{\partial x^k}\Big[\frac{\partial(\rho e)}{\partial\dot\rho}v^k\Big]\Big\}; \tag{5.3}$$

$$p \equiv \rho^2\frac{\partial e}{\partial\rho} = \rho\frac{\partial(\rho e)}{\partial\rho} - \rho e; \tag{5.4}$$

$$\mathbf{S} \equiv \frac{\partial}{\partial t}(\rho s) + \frac{\partial}{\partial x^k}(\rho s v^k) = 0. \tag{5.5}$$

Следствием этих уравнений является закон сохранения энергии

$$\mathbf{E} \equiv \frac{\partial}{\partial t}\Big\{\rho\Big(\varepsilon + \frac{v^2}{2}\Big)\Big\} + \frac{\partial}{\partial x^k}\Big\{\rho v^k\Big(\varepsilon + \frac{v^2}{2}\Big) + v^k P\Big\} = 0; \tag{5.6}$$

$$\varepsilon \equiv e - \dot\rho\frac{\partial e}{\partial\dot\rho}. \tag{5.7}$$

Выражение (5.7) есть модификация преобразования Лежандра. Перейдем от набора переменных $(\rho, \dot\rho, s;\ e(\rho, \dot\rho, s))$ к набору $(\rho, \sigma, s;\ \varepsilon(\rho, \sigma, s))$, где $\sigma \equiv -\partial e/\partial\dot\rho$, предполагая, что последнее уравнение однозначно разрешимо, так что преобразование $(\rho, \dot\rho, s) \to (\rho, \sigma, s)$ взаимно однозначно. Имеют место соотношения, характерные для преобразований Лежандра:

$$\frac{\partial\varepsilon}{\partial\rho}(\rho,\sigma,s) = \frac{\partial e}{\partial\rho}(\rho,\dot\rho,s), \qquad \frac{\partial\varepsilon}{\partial s}(\rho,\sigma,s) = \frac{\partial e}{\partial s}(\rho,\dot\rho,s), \qquad \sigma = -\frac{\partial e}{\partial\dot\rho}(\rho,\dot\rho,s),$$

$$\varepsilon = e - \dot\rho\frac{\partial e}{\partial\dot\rho} = e + \dot\rho\sigma, \qquad \dot\rho = \frac{\partial\varepsilon}{\partial\sigma}(\rho,\sigma,s), \qquad e = \varepsilon - \sigma\frac{\partial\varepsilon}{\partial\sigma} = \varepsilon - \sigma\dot\rho.$$

В частности, если $e = \varepsilon_0(\rho, s) - \mu(\rho, s)(\dot\rho)^2/2$, то $\sigma = \mu\dot\rho$ и $\varepsilon = \varepsilon_0(\rho, s) + \sigma^2/2\mu$.

Выражение (5.3) можно записать в виде

$$P = \rho\frac{\delta(\rho e)}{\delta\rho} - \rho e, \qquad e = e(\rho, \dot\rho, s). \tag{5.8}$$

Таким образом, система (5.1)–(5.6) имеет структуру классических уравнений газовой динамики с заменой при определении давления P обычной производной $\partial/\partial\rho$ на вариационную. Соотношение (5.8) есть вариационный аналог преобразования Лежандра. Справедливы также соотношения, подобные (4.17), (4.18):

$$\mathbf{E} = \Big(\gamma - \frac{v^2}{2}\Big)\mathbf{M} + v^j\mathbf{J}^j + T\mathbf{S}; \tag{5.9}$$

$$\gamma \equiv \frac{\delta(\rho e)}{\delta\rho}\bigg|_{(\rho s)} = e + \frac{P}{\rho} - Ts, \qquad T \equiv \frac{\partial e}{\partial s} = \frac{\partial\varepsilon}{\partial s} = \frac{\delta(\rho e)}{\delta(\rho s)}\bigg|_{\rho}. \tag{5.10}$$

При вычислении γ в (5.10) (ρe) рассматривается как функция величин $\rho, \dot\rho, \rho s$, т. е. $e = e(\rho, \dot\rho, (\rho s)/\rho)$.

Справедливо равенство, аналогичное (4.20):

$$P = \rho\,\frac{\delta(\rho e)}{\delta\rho}\bigg|_{(\rho s)} + (\rho s)\,\frac{\delta(\rho e)}{\delta(\rho s)}\bigg|_{\rho} - \rho e. \tag{5.11}$$

Совпадение фундаментальных соотношений (4.17), (4.18) и (5.9), (5.10), (4.20) и (5.11) не может быть случайным. Оно выявляет единую фундаментальную структуру правильно построенных уравнений для сред с дисперсией и в принципе позволяет распространить важнейшие понятия классической термодинамики (температура, потенциал Гиббса и др.) на среды с уравнениями состояния, зависящими от производных, а в дальнейшем — обобщить для них теорию фазовых переходов для невыпуклых уравнений состояния и правильно строить диссипативные системы (см. также [27–29]).

Механическая система. Если e зависит только от ρ, $\dot{\rho}$, то получается система уравнений (5.1)–(5.3), (5.6). В [30] были построены уравнения второго приближения теории длинных волн без гипотезы малости амплитуды волны. В случае горизонтального дна и при пренебрежении трением о дно для планового течения ($x = (x^1, x^2)$) они имеют вид

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x^k}(hV^k) = 0; \tag{5.12}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(hV^j) + \frac{\partial}{\partial x^k}(\rho V^j V^k + P\delta^{jk}) = 0, \qquad P \equiv g\frac{h^2}{2} + \pi, \tag{5.13}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(hW) + \frac{\partial}{\partial x^k}(hWV^k) = \frac{3}{2h}\pi; \tag{5.14}$$

$$\frac{\partial V^k}{\partial x^k} + \frac{2}{h}W = 0. \tag{5.15}$$

Здесь $h(t,x)$ — глубина потока; $V(t,x) = (V^1, V^2)$ — компоненты средней скорости в направлении осей x^1, x^2 соответственно; W — средняя по вертикали скорость:

$$W = \frac{1}{h}\int\limits_0^h w(t,x,z)dz;$$

величина π характеризует отклонение давления от гидростатического закона. Из (5.12)–(5.15) вытекает закон сохранения энергии

$$\frac{\partial}{\partial t}\left\{h\left(\varepsilon + \frac{v^2}{2}\right)\right\} + \frac{\partial}{\partial x^k}\left\{hV^k\left(\varepsilon + \frac{v^2}{2}\right) + V^k P\right\} = 0, \quad \varepsilon \equiv \frac{1}{2}gh + \frac{2}{3}W^2. \tag{5.16}$$

Система (5.12)–(5.15) представляет собой совокупность пяти уравнений для пяти искомых величин: h, V^1, V^2, W, π. Преобразуем ее. Из (5.12) и (5.15) находим

$$W = \frac{\dot{h}}{2}, \qquad \varepsilon = \frac{1}{2}gh + \frac{1}{3}\frac{(\dot{h})^2}{2}, \qquad \sigma = \frac{1}{3}\dot{h}.$$

Окончательно получим

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x^k}\left(hV^k\right) = 0; \tag{5.17}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(hV^j) + \frac{\partial}{\partial x^k}(hV^jV^k + P\delta^{jk}) = 0; \tag{5.18}$$

$$P \equiv \frac{1}{2}gh^2 + h\left\{\frac{\partial}{\partial t}(h\sigma) + \frac{\partial}{\partial x^k}\left(h\sigma V^k\right)\right\}. \tag{5.19}$$

Искомыми в (5.17), (5.18) являются h и V. Уравнения (5.17)–(5.19) с законом сохранения энергии (5.16) с точностью до обозначений совпадают с (5.1)–(5.3) и (5.6) соответственно.

Заметим еще, что система (5.12)–(5.15) записывается в канонической форме вида (1.1), а именно: имеет место представление [30]

$$\frac{\partial}{\partial x^\alpha}\Big(\frac{\partial L^\alpha}{\partial q^\beta}\Big) = F_\beta, \qquad \alpha = 0,1,2, \qquad \beta = 0,1,\ldots,4, \tag{5.20}$$

$$L^0 \equiv P, \quad L^k \equiv PV^k, \quad q^0 \equiv gh - \frac{2}{3}W^2 - \frac{V^2}{2}, \quad q^1 \equiv V^1, \quad q^2 \equiv V^2, \quad q^3 \equiv \frac{4}{3}W, \quad q^4 = \pi.$$

Стоящий в правой части системы (5.20) вектор $F = (F_\beta)$ не зависит от производных, а зависит только от искомых функций, в качестве которых можно взять (q^β),

$$F \equiv \Big(0,0,0,\frac{3}{2h}\pi,-\frac{2}{h}W\Big).$$

Форма (5.20) позволяет записать правило постановки краевых условий для системы (5.12)–(5.15) (см. [7]).

Авторы признательны H. Gouin за предоставленные им работы по теории капиллярности.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 94-01-01210-а).

ЛИТЕРАТУРА

1. **Годунов С. К.** Интересный класс квазилинейных систем // Докл. АН СССР. 1961. Т. 139, № 3. С. 521–523.
2. **Годунов С. К.** Симметрическая форма магнитной гидродинамики // Числ. методы механики сплош. среды: Сб. науч. тр. / АН СССР. Сиб. отд-ние. Ин-т прикл. и теорет. механики. 1972. Т. 3, № 1. С. 26–34.
3. **Годунов С. К.** Элементы механики сплошной среды. М.: Наука, 1978.
4. **Роменский Е. И.** Законы сохранения и симметрическая форма уравнений нелинейной теории упругости // Краевые задачи для уравнений с частными производными. Новосибирск, 1984. № 1. С. 132–134.
5. **Блохин А. М.** Интегралы энергии и их приложения к задачам газовой динамики. Новосибирск: Наука, 1986.
6. **Блохин А. М., Доровский В. Н.** Проблемы математического моделирования в теории многоскоростного континуума. Новосибирск, 1994.
7. **Воеводин А. Ф., Шугрин С. М.** Методы решения одномерных эволюционных систем. М.: Наука, 1993.
8. **Уизем Дж.** Линейные и нелинейные волны. М.: Мир, 1977.
9. **Pego R. L., Weinstein M. J.** Eigenvalues and instabilities of solitary waves // Phil. Trans. Royal Soc. Lond. A. 1992. V. 340. P. 47–94.
10. **Benjamin T. B., Bona J. L., Mahony J. J.** Model equations for long waves in nonlinear dispersive systems // Phil. Trans. Royal Soc. Lond. A. 1972. V. 272. P. 47–78.
11. **Нестеренко В. Ф.** Примеры «звукового вакуума» // Физика горения и взрыва. 1993. Т. 29, № 2. С. 132–134.
12. **Gavrilyuk S. L., Serre D.** A model of a plug-chain system near the thermodynamic critical point: connection with the Korteweg theory of capillarity and modulation equations // IUTAM Symposium on Waves in liquid/gas and liquid/vapour two-phase systems, Kyoto, Japan, 1994. Dordrecht: Kluwer, 1995. P. 419–428.

13. **Нестеренко В. Ф.** Уединенные волны в дискретной среде с аномальной сжимаемостью // Физика горения и взрыва. 1993. Т. 29, № 2. С. 134–136.
14. **Slemrod M.** The viscosity-capillarity approach to phase transitions // PDEs and Continuum models of Phase Transitions. Berlin et al.: Springer, 1989. (Lect. Not. in Phys.; V. 344).
15. **Gouin H., Debieve J.-F.** Variational principle involving the stress tensor in elastodynamics // Int. J. Engng Sci. 1986. V. 24, N 7. P. 1057–1066.
16. **Casal P., Gouin H.** A representation of liquid-vapour interfaces by using fluids of second grade // Ann. de Physique. Suppl. 3. 1988. V. 13. P. 3–12.
17. **Гаврилюк С. Л., Нестеренко В. Ф.** Устойчивость периодических возбуждений для модели «звукового вакуума» // ПМТФ. 1993. Т. 34, № 6. С. 45–48.
18. **Иорданский С. В.** Об уравнениях движения жидкости, содержащей пузырьки газа // ПМТФ. 1960. № 3. С. 102–110.
19. **Когарко Б. С.** Об одной модели кавитирующей жидкости // Докл. АН СССР. 1961. Т. 137, № 6. С. 1331–1333.
20. **Van Wijngaarden L.** One-dimensional flow of liquids containing small gas bubbles // Ann. Rev. Fluid Mech. 1972. V. 4. P. 369–396.
21. **Gavrilyuk S. L.** Large amplitude oscillations and their «thermodynamics» for continua with «memory» // Europ. J. Mech. B/Fluids. 1994. V. 13, N 6. P. 753–764.
22. **Гаврилюк С. Л.** Уравнения модуляций для пузырьковой смеси с несжимаемой несущей фазой // ПМТФ. 1989. № 2. С. 86–92.
23. **Gumerov N. A.** Equations describing the propagation of nonlinear modulation waves in bubbly liquids // Bubble Dynamics and Interface Phenomena. Dordrecht: Kluwer, 1994. P. 131–140.
24. **Gouin H.** Utilization of the second gradient theory in continuum mechanics to study the motion and thermodynamics of liquid-vapour interfaces // Interfacial Phenomena. London: Plenum press, 1987. P. 667–682.
25. **Бердичевский В. Л.** Вариационные принципы механики сплошной среды. М.: Наука, 1983.
26. **Олвер П.** Приложение групп Ли к дифференциальным уравнениям. М.: Мир, 1989.
27. **Шугрин С. М.** Двухскоростная гидродинамика и термодинамика // ПМТФ. 1994. Т. 35, № 4. С. 41–59.
28. **Шугрин С. М.** Диссипативная двухскоростная гидродинамика // Там же. С. 59–68.
29. **Casal P., Gouin H.** Invariance properties of inviscid fluids of grade N // PDEs and Continuum Models of Phase Transitions. Berlin et al.: Springer, 1989. (Lect. Not. in Phys.; V. 344). P. 85–98.
30. **Атавин А. А., Шугрин С. М.** О дифференциальных уравнениях теории «мелкой воды» // Динамика сплошной среды: Сб. науч. тр. / АН СССР. Сиб. отд-ние. Ин-т гидродинамики. 1985. Вып. 70. С. 25–53.

Поступила в редакцию 14/III 1995 г.