ЛИТЕРАТУРА

1. Рыжов О. С., Христианович С. А. О нелинейном отражении слабых ударных волн. ПММ, 1958, т. 22, вып. 5.
2. Гриб А. А., Рыжов О. С., Христианович С. А. Теория коротких волн. ПМТФ, 1960, № 1.
3. Гриб А. А., Рябинин А. Г., Христианович С. А. Об отражении плоской ударной волны в воде от свободной поверхности. ПММ, 1956, т. 20, вып. 4.
4. Заславский Б. И. О нелинейном взаимодействии сферической ударной волны, возникшей в результате взрыва загубленного заряда со свободной поверхностью воды. ПМТФ, 1964, № 4.
5. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Механика сплошных сред. М., Гостехиздат, 1954.

УСТОЙЧИВОСТЬ ЖИДКОЙ ПЛЕНКИ НА ПОВЕРХНОСТИ ВРАЩАЮЩЕГОСЯ ЦИЛИНДРА

Л. Н. Маурин

(Иваново)

Рассматривается устойчивость тонкого слоя вязкой жидкости, удерживаемого силами поверхностного натяжения на поверхности бесконечного вращающегося цилиндра. Показано, что цилиндрическая фигура жидкого слоя неустойчива уже при сколь угодно медленных вращениях по отношению к длинноволновым кольцеобразным аксиально-симметричным возмущениям.

В невозмущенном движении пленки отлична от нуля только азимутальная составляющая скорости (твердое вращение)

$$V_\varphi = \Omega r, \qquad P = \frac{\rho\Omega^2 r^2}{2} - \frac{\rho\Omega^2 (R+h)^2}{2} + \frac{\alpha}{R+h} \tag{1}$$

Здесь Ω — угловая скорость вращения цилиндра (направлена по оси цилиндра z), P — давление, R — радиус твердого цилиндра, h — толщина пленки, α — коэффициент поверхностного натяжения.

Пусть возмущение свободной поверхности пленки $hf(z, t)$ и возмущение течения — аксимально-симметричны

$$\begin{gathered} v_r = u(r)\, e^{ikz+\sigma t}, \qquad V_\varphi + v(r)\, e^{ikz+\sigma t} \\ v_z = w(r)\, e^{ikz+\sigma t}, \qquad p = p(r)\, e^{ikz+\sigma t} \\ R + h + hf(z, t) = R + h + h\varepsilon e^{ikz+\sigma t}, \qquad \partial(\ldots)/\partial\varphi \equiv 0, \qquad \varepsilon \ll 1 \end{gathered} \tag{2}$$

Рассмотрим линеаризованные по возмущению уравнения Навье—Стокса и неразрывности

$$\begin{gathered} \sigma u - 2\Omega v = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r} + \nu\left[\frac{d^2u}{dr^2} - k^2u + \frac{1}{r}\frac{du}{dr} - \frac{u}{r^2}\right] \\ \sigma v + 2\Omega u = \nu\left[\frac{d^2v}{dr^2} - k^2v + \frac{1}{r}\frac{dv}{dr} - \frac{v}{r^2}\right] \\ \sigma w = -\frac{ik}{\rho}p + \nu\left[\frac{d^2w}{dr^2} - k^2w + \frac{1}{r}\frac{dw}{dr}\right] \end{gathered} \tag{3}$$

$$\frac{du}{dr} + \frac{u}{r} + ikw = 0 \tag{4}$$

граничные условия имеют вид

при $r = R$

$$u = v = W = 0 \tag{5}$$

на свободной поверхности

$$\sigma_{ik} n_k = -\alpha\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) n_i, \qquad v_r = \frac{d}{dt}(hf) = \frac{\partial(hf)}{\partial t} \tag{6}$$

Тензор напряжений σ_{ik} и единичный вектор n_i взяты в цилиндрической системе координат [1].

При этом $n_\varphi = 0$ в силу аксиальной симметрии возмущения, а $n_z = -hdf/dz$ — порядка величины возмущения. Выражение для главных радиусов кривизны также линеаризуется по возмущению

$$R_1 = R + h + hf(z, t), \qquad R_2^{-1} = -h\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \tag{7}$$

Учитывая это, получаем граничные условия на свободной поверхности в виде

$$-\Omega^2 (R+h) h\varepsilon - \frac{p}{\rho} + 2\nu\frac{du}{dr} = \frac{\alpha}{\rho}\left(\frac{h\varepsilon}{(R+h)^2} - hk^2\varepsilon\right)$$

$$\frac{dv}{dr} - \frac{v}{r} = 0, \qquad \frac{dw}{dr} + iku = 0, \qquad u = \sigma h\varepsilon \tag{8}$$

В случае тонкой пленки положим $h / R \ll 1$ и введем новую переменную

$$r = R + hx \tag{9}$$

Тогда

$$\frac{d}{dr} = \frac{1}{h}\frac{d}{dx}, \qquad \frac{1}{r} = \frac{1}{R} + O\left(\frac{h}{R}\right) \tag{10}$$

Рассматривая h / R как малый параметр, проведем в (3)—(8) разложение по нему. В нулевом приближении после исключения давления p и $w(r)$ получим

$$\left[\frac{d^2}{dx^2} - \left(\frac{\sigma h^2}{\nu} + k^2h^2\right)\right]\left[\frac{d^2}{dx^2} - k^2h^2\right]u = \frac{2\,\Omega k^2h^4}{\nu}v$$

$$\left[\frac{d^2}{dx^2} - \left(\frac{\sigma h^2}{\nu} + k^2h^2\right)\right]v = \frac{2\,\Omega h^2}{\nu}u \tag{11}$$

$$u = v = \frac{du}{dx} = 0 \quad \text{при } x = 0$$

$$x = 1, \quad \left[\frac{d^2}{dx^2} - \left(\frac{\sigma h^2}{\nu} + k^2h^2\right)\right]\frac{du}{dx} - 2k^2h^2\frac{du}{dx} + \frac{k^2h^3}{\sigma\nu}\left(\Omega^2 R - \frac{\alpha}{\rho}k^2\right)u = 0$$

$$\frac{d^2u}{dx^2} + k^2h^2u = 0, \qquad \frac{dv}{dx} = 0$$

Рассмотрим длинноволновые возмущения. Если положим

$$kh \ll 1, \qquad \frac{\sigma h^2}{\nu} \ll 1, \qquad \frac{\Omega h^2}{\nu} \ll 1$$

разложим решение по малым параметрам kh, $\Omega h^2 / \nu$, $\sigma h^2 / \nu$ и ограничимся главными членами разложения, то получим из (11)

$$u(x) = A_0 + A_1x + A_2x^2 + A_3x^3 + O\left(\frac{\Omega^2h^4}{\nu^2}, \; k^2h^2, \; \frac{\sigma h^2}{\nu}\right) \tag{12}$$

При подстановке $u(x)$ в граничные условия (11) получим для σ секулярное уравнение

$$\det \|a_{ij}\| = 0 \quad (ij = 1, 2) \tag{13}$$

$$a_{11} = \frac{k^2h^3}{\sigma\nu}\left(\Omega^2R - \frac{\alpha}{\rho}k^2\right) + O\left(\frac{\Omega^2h^4}{\nu^2}, \; k^2h^2\right), \qquad a_{21} = 2 + O\left(\frac{\Omega^2h^4}{\nu^2}, \; k^2h^2\right)$$

$$a_{12} = \frac{k^2h^3}{\sigma\nu}\left(\Omega^2R - \frac{\alpha}{\rho}k^2\right) + 6 + O\left(\frac{\Omega^2h^4}{\nu^2}, \; k^2h^2\right), \qquad a_{22} = 6 + O\left(\frac{\Omega^2h^4}{\nu^2}, \; k^2h^2\right)$$

Отсюда

$$\sigma = \frac{k^2h^3}{3\nu}\left(\Omega^2R - \frac{\alpha}{\rho}k^2\right)\left[1 + O\left(\frac{\Omega^2h^4}{\nu^2}, \; k^2h^2, \; \frac{\sigma h^2}{\nu}\right)\right] \tag{14}$$

Таким образом, цилиндрическая пленка неустойчива по отношению к возмущениям с волновым числом

$$k < \left(\frac{\rho\Omega^2R}{\alpha}\right)^{1/2}$$

Поступила 25 V 1968

ЛИТЕРАТУРА

1. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Механика сплошных сред. М., Гостехиздат, 1953.