Теплофизика и аэромеханика, 2013, том 20, № 2

УДК 532.517.4

О численном моделировании заглубления турбулентного слоя в устойчиво стратифицированной жидкости*

О.Ф. Васильев[1], Т.Э. Овчинникова[1, 3], Г.Г. Черных[2, 3]

[1]*Институт водных и экологических проблем СО РАН, Новосибирск*

[2]*Институт вычислительных технологий СО РАН, Новосибирск*

[3]*Новосибирский государственный университет*

E-mail: teonew@iwep.nsc.ru

Для описания процессов вертикального турбулентного обмена в устойчиво стратифицированном водоеме рассмотрены усовершенствованные численные модели, основанные на алгебраических представлениях рейнольдсовых напряжений и потоков и использовании дифференциального уравнения переноса дисперсии флуктуаций вертикальной компоненты скорости. Выполнено численное моделирование заглубления турбулентного слоя перемешанной жидкости в линейно стратифицированной среде под действием постоянного касательного напряжения. Результаты расчетов хорошо согласуются с известными экспериментальными данными и свидетельствуют о существенном влиянии анизотропии течения на его основные характеристики.

Ключевые слова: математическое моделирование, турбулентность, анизотропия турбулентного обмена.

1. Обзор исследований

Математическому моделированию вертикального турбулентного обмена в устойчиво стратифицированных средах посвящено большое число работ (например, [1–23]). Как видно из этих публикаций, к настоящему времени построена иерархия математических моделей, включающая полуэмпирические модели второго порядка замыкания. Широкое распространение получили классическая e-ε модель турбулентности и ее модификации с алгебраическими представлениями рейнольдсовых напряжений и потоков.

Интересным примером течения, в котором определяющую роль играет вертикальный турбулентный обмен, является течение, возникающее при заглублении турбулизованного слоя жидкости в линейно стратифицированной среде под ветровым воздействием на поверхность водоема. Его изучению также посвящено много работ [8, 17, 20, 24]. Задача представляет интерес и в связи с исследованием процесса формирования верхнего квазиоднородного слоя океана [2, 3, 5, 6, 15–18, 22, 23, 25, 26].

Анализ публикаций в области математического моделирования процесса заглубления показывает, что исследования не охватывают некоторые важные особенности рассматриваемого течения. В частности, мало внимания уделяется анизотропии турбулентного перемешивания.

---

* Работа выполнена при финансовой поддержке Междисциплинарного интеграционного проекта СО РАН № 132.

В настоящей работе анизотропия оценивается путем анализа поведения [10] компоненты тензора анизотропии $a_{33} = \left\langle w'^2 \right\rangle / e - 2/3$ (здесь $\left\langle w'^2 \right\rangle$ — дисперсия флуктуаций вертикальной компоненты скорости, e — энергия турбулентности). В изотропном случае $a_{33} = 0$; в случае изучаемого течения наблюдается существенное отклонение отношения $\left\langle w'^2 \right\rangle / e$ от изотропного значения, равного 2/3. Для описания процесса заглубления перемешанного слоя в стратифицированной жидкости рассмотрена иерархия усовершенствованных математических моделей второго порядка. С целью более детального описания вертикального турбулентного обмена в ряде рассмотренных моделей привлекается дифференциальное уравнение переноса дисперсии флуктуаций вертикальной компоненты скорости. Результаты расчетов хорошо согласуются с известными экспериментальными данными работы [24]. Дана количественная оценка анизотропии и ее влияния на процесс вертикального турбулентного обмена.

2. Математические модели

При исследовании процесса заглубления турбулентного слоя (как и ряда других гидрофизических процессов в устойчиво стратифицированном водоеме) делаются упрощения, в результате которых осредненное горизонтально однородное движение описывается системой дифференциальных уравнений:

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z}\left[\nu \frac{\partial U}{\partial z} - \left\langle u' w' \right\rangle\right], \tag{1}$$

$$\frac{\partial S}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z}\left[\chi \frac{\partial S}{\partial z} - \left\langle S' w' \right\rangle\right]. \tag{2}$$

Здесь U — горизонтальная компонента осредненной скорости движения, S — осредненная соленость, ν и χ — коэффициенты молекулярной вязкости и диффузии, $\left\langle u' w' \right\rangle$ — касательное рейнольдсово напряжение, $\left\langle S' w' \right\rangle$ — вертикальная компонента вектора потоков (штрихами обозначены пульсационные составляющие), z — вертикальная координата, t — время. Зависимость осредненной плотности жидкости ρ от солености задается линейным соотношением $\rho(S) = \rho_0 + \alpha S$. В силу линейности уравнения состояния $\rho' = \alpha S'$. Система уравнений (1)–(2) незамкнута. Для ее замыкания привлекается иерархия математических моделей второго порядка.

***Модель* 1** (классическая e-ε модель турбулентности) включает в себя уравнения баланса энергии турбулентности и скорости ее диссипации (см., например, [7, 10]):

$$\frac{\partial e}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z}(K_{ez} \frac{\partial e}{\partial z}) + P + G - \varepsilon, \tag{3}$$

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z}(K_{\varepsilon z} \frac{\partial \varepsilon}{\partial z}) + C_{\varepsilon 1} \frac{\varepsilon}{e}\left(P + G\right) - C_{\varepsilon 2} \frac{\varepsilon^2}{e}, \tag{4}$$

где $P = -\left\langle u' w' \right\rangle \left(\partial U / \partial z\right)$, $G = -\left(g/\rho_0\right)\left\langle w' \rho' \right\rangle$, $C_{\varepsilon 2} = 1{,}92\,(1 - 0{,}3\exp(-\mathrm{Re}_t^2))$, $\mathrm{Re}_t = e^2 / \left(\nu \varepsilon\right)$, $K_{ez} = \nu + \nu_t$, $\nu_t = c_\mu \left(e^2/\varepsilon\right)$, $K_{\varepsilon z} = \nu + \alpha_\varepsilon \nu_t$. Для корреляционных моментов $\left\langle u' w' \right\rangle$ и $\left\langle w' \rho' \right\rangle$ используются упрощенные градиентные представления: $-\left\langle u' w' \right\rangle =$

$=\nu_t\left(\partial U/\partial z\right)$, $-\left\langle w'\rho'\right\rangle=-\alpha\left\langle w's'\right\rangle=c_\rho\,\nu_t\left(\partial\rho/\partial z\right)$. Значения эмпирических констант $C_{\varepsilon1}$, c_μ, α_ε, c_ρ приведены ниже.

Модель 2.1. С целью более детального описания механизма вертикального турбулентного перемешивания в неоднородной по плотности жидкости уравнение баланса энергии турбулентности расщепляется на две части и вместе с тем привлекается дифференциальное уравнение переноса дисперсии турбулентных флуктуаций вертикальной компоненты скорости $\left\langle w'^2\right\rangle$ [7, 10]:

$$\frac{\partial\left\langle w'^2\right\rangle}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial z}\left[K_{ez}\frac{\partial\left\langle w'^2\right\rangle}{\partial z}\right]+2\left(1-\frac{2}{3}C_2\right)G-\varepsilon\left[C_1\frac{\left\langle w'^2\right\rangle}{e}+\frac{2}{3}\left(1-C_1\right)\right]+\frac{2}{3}C_2P. \qquad (5)$$

Подобный прием представляется весьма эффективным при моделировании широкого класса турбулентных течений в устойчиво стратифицированных жидкостях, так как в таких течениях турбулентные флуктуации вертикальной компоненты скорости в большей мере в сравнении с горизонтальными подвержены воздействию силы плавучести.

Величины $\left\langle u'w'\right\rangle$ и $\left\langle w'\rho'\right\rangle$ в данной модели определяются следующим образом [7, 10]:

$$-\left\langle u'w'\right\rangle=\left(1-C_2\right)\frac{e\left\langle w'^2\right\rangle-\dfrac{\left(1-C_{2T}\right)}{C_{1T}}\dfrac{g}{\rho_0}\dfrac{e^2}{\varepsilon^2}\left\langle w'\rho'\right\rangle}{C_1\,\varepsilon\left(1-\dfrac{1-C_2}{C_1\,C_{1T}}\dfrac{g}{\rho_0}\dfrac{e^2}{\varepsilon^2}\dfrac{\partial\rho}{\partial z}\right)}\frac{\partial U}{\partial z}\equiv K_{uz}\frac{\partial U}{\partial z}, \qquad (6)$$

$$-\left\langle w'\rho'\right\rangle=\frac{e\left\langle w'^2\right\rangle}{C_{1T}\varepsilon\left(1-2\dfrac{1-C_{2T}}{C_{1T}\,C_T}\dfrac{g}{\rho_0}\dfrac{e^2}{\varepsilon^2}\dfrac{\partial\rho}{\partial z}\right)}\frac{\partial\rho}{\partial z}\equiv K_{\rho z}\frac{\partial\rho}{\partial z}. \qquad (7)$$

В уравнениях (3), (4), (5) полагается

$$K_{ez}=\nu+\frac{C_S\,e\left\langle w'^2\right\rangle}{\varepsilon},\quad K_{\varepsilon z}=\nu+\alpha_\varepsilon\frac{C_S\,e\left\langle w'^2\right\rangle}{\varepsilon}.$$

Модель 2.2 отличается от предыдущей введением демпфирующей функции f, позволяющей учесть подавление турбулентных флуктуаций вертикальной компоненты скорости поверхностью жидкости [10, 11, 20]:

$$\begin{gathered}\frac{\partial\left\langle w'^2\right\rangle}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial z}\left[K_{ez}\frac{\partial\left\langle w'^2\right\rangle}{\partial z}\right]+2\left(1-\frac{2}{3}C_2\right)G-\\ -\varepsilon\left[\left(C_1+2C_1'f\right)\frac{\left\langle w'^2\right\rangle}{e}+\frac{2}{3}\left(1-C_1\right)\right]+\frac{2}{3}C_2\left(1-2C_2'f\right)P,\end{gathered} \qquad (8)$$

$$f=C_f\,\frac{e^{3/2}}{\varepsilon}\left[H-z+0{,}04\frac{e_{\mathrm{Surf}}^{3/2}}{\varepsilon_{\mathrm{Surf}}}\right]^{-1}, \qquad (9)$$

где e_{Surf} и $\varepsilon_{\text{Surf}}$ — значения энергии турбулентности и скорости диссипации на поверхности жидкости. Величины $\langle u'w'\rangle$ и $\langle w'\rho'\rangle$ в этой модели аппроксимируются следующим образом [10, 11, 20]:

$$-\langle u'w'\rangle = \frac{\left[1-C_2\left(1-\frac{3}{2}C_2'f\right)\right]\left[e\left\langle w'^2\right\rangle+\frac{(1-C_{2T})}{C_{1T}}\frac{e^2}{\varepsilon}G\right]}{\left(C_1+\frac{3}{2}C_1'f\right)\varepsilon\left[1-C_2\left(1-\frac{3}{2}C_2'f\right)\right]\left[\frac{1}{C_{1T}}\frac{g}{\rho_0}\frac{e^2}{\varepsilon^2}\left(-\frac{\partial\rho}{\partial z}\right)\right]}\frac{\partial U}{\partial z} \equiv K_{uz}\frac{\partial U}{\partial z}, \quad (10)$$

$$-\langle w'\rho'\rangle = \frac{e\left\langle w'^2\right\rangle}{\left(C_{1T}+C_{1T}'f\right)\varepsilon+\left[1-C_{2T}\left(1-C_{2T}'f\right)\right]\left[2\frac{g}{\rho_0}R\frac{e^2}{\varepsilon}\left(-\frac{\partial\rho}{\partial z}\right)\right]}\frac{\partial\rho}{\partial z} \equiv K_{\rho z}\frac{\partial\rho}{\partial z}. \quad (11)$$

Рассматриваемая математическая модель турбулентного перемешивания (усовершенствованная модель) отличается от примененной Зиновьевым и Яковенко [20] введением дифференциального уравнения (8). Отметим, что авторы работы [20] не уделили, на наш взгляд, должного внимания анализу анизотропии и ее влиянию на процесс перемешивания.

Модель 3.1. К уравнениям (1–4) добавляется алгебраическое соотношение для корреляционного момента $\left\langle w'^2\right\rangle$, являющееся следствием усечения соответствующего дифференциального уравнения переноса [12]

$$\left\langle w'^2\right\rangle = \frac{2}{3}e+\frac{e}{C_1\varepsilon}\left[(1-C_3)\left(G_{33}-\frac{2}{3}G\right)-(1-C_2)\frac{2}{3}P\right], \quad (12)$$

где $G_{33}=-2(g/\rho_0)\langle w'\rho'\rangle$, величины $\langle u'w'\rangle$ и $\langle w'\rho'\rangle$ вычисляются по формулам (6), (7) соответственно.

Модель 3.2 отличается от модели 2.2 применением вместо уравнения (8) алгебраического представления — следствия его усечения

$$\left\langle w'^2\right\rangle = \frac{2}{3}e\left\{1-\frac{2C_1'f\varepsilon+\left[1-C_2\left(1-2C_2'f\right)\right](P-2G)}{\left(C_1+2C_1'f\right)\varepsilon+P+G-\varepsilon}\right\}, \quad (13)$$

корреляции $\langle u'w'\rangle$ и $\langle w'\rho'\rangle$ вычисляются по формулам (10), (11) соответственно. Уравнения модели 3.2 аналогичны принятым в работе [20], но, как увидим в дальнейшем, отличаются в постановке начально-краевой задачи.

Структура математических моделей 2.1, 3.1 обусловлена опытом авторов в области численного моделирования анизотропного вырождения безымпульсных турбулентных следов в линейно стратифицированной среде [27, 28].

Приведенные выше формулы и уравнения содержат ряд эмпирических констант, значения которых являются в достаточной степени общепринятыми:
$C_{\varepsilon1}=1{,}44$, $\alpha_\varepsilon=0{,}6$, $c_\mu=0{,}09$, $C_1=2{,}2$, $C_2=C_3=0{,}55$, $c_\rho=0{,}8$, $C_S=0{,}25$, $C_T=1{,}25$, $C_{1T}=3{,}2$, $C_{2T}=0{,}5$, $C_1'=0{,}5$, $C_2'=0{,}3$. Постановку начально-краевой задачи рассмотрим

на примере моделей 2.1 и 2.2. Граничные условия для систем уравнений (1)–(4), (5) и (1)–(4), (8) ставятся следующим образом.

На дне ($z = 0$):

$$K_{uz}\left(\partial U/\partial z\right) = k_b U\left|U\right|, \quad S = S_b, \quad \partial e/\partial z = 0, \quad \varepsilon = c_\varepsilon \left(e^{3/2}/l_b\right), \quad \partial\left\langle w'^2\right\rangle/\partial z = 0;$$

на поверхности ($z = H$):

$$K_{uz}\left(\partial U/\partial z\right) = \tau_W/\rho, \quad \partial S/\partial z = 0, \quad \varepsilon = c_\varepsilon \left(e^{3/2}/l_S\right).$$

Для энергии турбулентности использовалось два различных условия:

$$\frac{\partial e}{\partial z} = k_\tau \left(\frac{\left|\tau_W\right|}{\rho}\right)^{3/2}, \tag{14}$$

$$e = \frac{\tau_W}{\rho\sqrt{c_\mu}}. \tag{15}$$

В модели 2.1 при $z = H$ величина $\left\langle w'^2\right\rangle$ задается формулой (12), а в модели 2.2 — соотношением (13). Здесь τ_W — касательное напряжение, обусловленное ветровой нагрузкой, l_S и l_b — масштабы шероховатости при $z = H$ и $z = 0$ соответственно. Эмпирические константы: $k_b = 0{,}014$, $k_\tau = 2{,}5$, $c_\varepsilon = 0{,}314$ (см., например, [13]).

В начальный момент времени задавались следующие условия: $U = 0$, распределение S соответствовало линейному распределению плотности по вертикали (см. ниже), $\nu_t = 0$, $e = 0$, $\left\langle w'^2\right\rangle = 0$, $\varepsilon = 0$. При этом встречающиеся в уравнениях математических моделей соотношения e^2/ε, $e\left\langle w'^2\right\rangle/\varepsilon$, e^2/ε^2 подвергались регуляризации вида: $e^2/\left[\varepsilon + \delta\,\varepsilon(t,H)\right]$, $e\left\langle w'^2\right\rangle/\left[\varepsilon + \delta\,\varepsilon(t,H)\right]$, $e^2/\left[\varepsilon + \delta\,\varepsilon(t,H)\right]^2$, $\delta \in \left[10^{-6}, 10^{-3}\right]$, $e(0,H) = \tau_W/\left(\rho(0,H)\sqrt{c_\mu}\right)$, $\varepsilon(0,H) = c_\varepsilon\, e(0,H)^{3/2}/l_S$.

3. Численный алгоритм

Для численного решения начально-краевой задачи с использованием описанных здесь моделей применялся неявный конечно-разностный алгоритм с итерациями по нелинейностям, основанный на интегро-интерполяционном методе [29]. Разностную аппроксимацию продемонстрируем на уравнениях (3), (4):

$$\frac{e_i - e_i^{t-1}}{\tau} + \frac{1}{hz}\left[\left(K_{ez}\frac{\partial e}{\partial z}\right)_{i-1} - \left(K_{ez}\frac{\partial e}{\partial z}\right)_i\right] = P_i + G_i - \varepsilon_i, \tag{16}$$

$$\frac{\varepsilon_i - \varepsilon_i^{t-1}}{\tau} + \frac{1}{hz}\left[\left(K_{\varepsilon z}\frac{\partial \varepsilon}{\partial z}\right)_{i-1} - \left(K_{\varepsilon z}\frac{\partial \varepsilon}{\partial z}\right)_i\right] + \left(\frac{C_{\varepsilon 1}\,\varepsilon_i^{t-1}}{e_i^t}\right)\varepsilon_i = C_{\varepsilon 2}\left(P_i + G_i\right)\frac{\varepsilon_i^{t-1}}{e_i^t}, \tag{17}$$

где τ, hz — шаги разностной сетки по времени и пространственной переменной z; верхний индекс $t - 1$ означает, что значение берется с предыдущего временного шага.

Во внутренних точках области для каждой из переменных имеем ($\varphi = e$, ε):

$$\left(K_\varphi \frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)_{i-1} - \left(K_\varphi \frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)_i = \frac{1}{hz}\Big[\big(R_1 + R_2\big)\varphi_i - R_1 \varphi_{i-1} - R_2 \varphi_{i+1}\Big],$$

$$R_1 = K_{\alpha\, i-1/2} \equiv 0{,}5\big(K_{\varphi\, i} + K_{\varphi\, i-1}\big), \quad R_2 = K_{\varphi\, i+1/2} \equiv 0{,}5\big(K_{\varphi i+1} + K_{\varphi i}\big), \quad \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)_i = \frac{\varphi_{i+1} - \varphi_i}{hz}.$$

На нижней границе ставится условие $\big(K_{ez}\, \partial e/\partial z\big)_1 = 0$, а ε_1 вычисляется через e_1. На верхней границе для энергии турбулентности ставится условие $\big(K_{ez}\, \partial e/\partial z\big)_n =$ $= k_\tau \left(|\tau_W|/\rho_n\right)^{3/2}$, либо используется явное выражение энергии турбулентности через касательное напряжение; скорость диссипации вычисляется через e_n (n — число узлов сетки по координате z).

Алгоритм решения задачи сводится к последовательному численному интегрированию уравнений математической модели. Значения τ, hz выбирались в ходе численных экспериментов. Полученные системы алгебраических уравнений для каждой из переменных решались методом прогонки с использованием итераций по нелинейности.

4. Результаты численных экспериментов

В дальнейшем для простоты изложения будем использовать следующие обозначения для численных моделей с учетом выбора краевых условий для энергии турбулентности e на свободной поверхности:

– $БМ_1$ — классическая e-ε модель с краевым условием (14);

– $БМ_2$ — классическая e-ε модель с краевым условием (15).

Остальные модели, базирующиеся на модели $БМ_2$, обозначим $М_{ij}$. Использование в качестве исходной модели $БМ_2$ выбрано из соображений согласованности вида краевого условия для е и $\left\langle w'^2 \right\rangle$ в том смысле, что в обоих случаях используется краевое условие Дирихле, к тому же аналог краевого условия (15) для $\left\langle w'^2 \right\rangle$ нам не известен.

С применением построенных численных моделей выполнены расчеты течения в канале глубиной $H = 0{,}3$ м, обусловленного действием постоянного касательного напряжения на поверхности жидкости, в соответствии с данными лабораторного эксперимента [24].

Для вертикального распределения плотности и значения касательного напряжения на свободной поверхности рассмотрены два варианта условий:

I. $\partial \rho/\partial z = 192\,\text{кг/м}^4$, $\tau_W = 0{,}0995\,\text{кг}\big/\big(\text{м}\cdot\text{с}^2\big)$;

II. $\partial \rho/\partial z = 384\,\text{кг/м}^4$, $\tau_W = 0{,}212\,\text{кг}\big/\big(\text{м}\cdot\text{с}^2\big)$.

Расчеты выполнялись на последовательности равномерных сеток с числом узлов от 100 до 800, шаг по времени варьировался от 5 до 1 с.

В работе [17] рассмотрен вариант течения, полученного переносом результатов лабораторных экспериментов [24] на морские условия с глубиной расчетной области $H = 40$ м. При этом, согласно оценкам авторов [17], параметры течения принимали следующие значения:

III. $\partial \rho/\partial z = 0{,}01\,\text{кг/м}^4$, $\tau_W = 0{,}1\,\text{кг}\big/\big(\text{м}\cdot\text{с}^2\big)$.

Расчеты также выполнялись на последовательности равномерных сеток с числом узлов от 100 до 400, шаг по времени варьировался от 30 до 120 с. Во всех вариантах начальное значение плотности на поверхности жидкости было одинаково: $\rho^* = 10^3$ кг$/$м^3.

Главное внимание при анализе результатов численных экспериментов уделялось динамике заглубления перемешанного слоя и анизотропии характеристик турбулентного обмена (отношение $\left\langle w'^2 \right\rangle / e$), а также вертикальным распределениям основных переменных задачи: скорости U, энергии турбулентности e, скорости диссипации ε, коэффициентов вертикального турбулентного обмена ν_t, K_{uz}, $K_{\rho z}$. Анализ результатов коснется в основном эксперимента [24] с условиями II, поскольку результаты расчетов для условий I приводят к аналогичным выводам.

Прежде всего, были сопоставлены результаты расчетов по классическим моделям БМ$_1$ и БМ$_2$ с двумя вариантами условий на свободной поверхности. Как видно из рис. 1, краевое условие сказывается только вблизи поверхности, причем условие (15) приводит к заметному (примерно в 2 раза) уменьшению значений e и ε. Величины изменяются одновременно и это практически не сказывается на вертикальном распределении остальных параметров течения (ν_t, U, ρ).

Сравнение результатов расчетов по двум дифференциальным моделям (М$_{21}$ и М$_{22}$) и одной алгебраической (М$_{32}$) показало (рис. 2.), что вертикальные распределения полей скорости и плотности практически не отличаются в трех расчетах. В распределениях e, ε и ν_t имеются слабые отличия между М$_{21}$ и М$_{22}$, а М$_{22}$ и М$_{32}$ дают практически совпадающие результаты. Распределения корреляционного момента $\left\langle w'^2 \right\rangle$ заметно отличаются в приповерхностной области в трех расчетах, особенно если сравнивать между собой

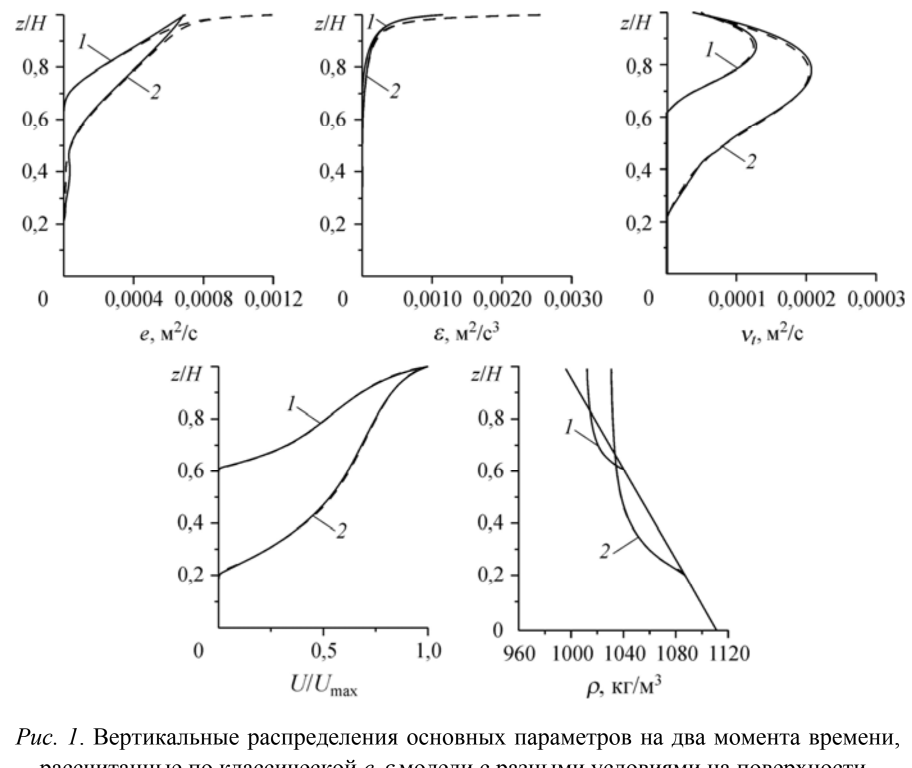

Рис. 1. Вертикальные распределения основных параметров на два момента времени, рассчитанные по классической e-ε модели с разными условиями на поверхности.
БМ$_1$ — пунктирная линия, БМ$_2$ — сплошная линия; 60 (*1*), 240 (*2*) с.

модели с использованием демпфирующей функции и без нее. Можно видеть, что величина дисперсии турбулентных флуктуаций вертикальной компоненты скорости значительно убывает к поверхности жидкости вследствие демпфирования вертикальных пульсаций скорости. Анизотропия турбулентного перемешивания характеризуется распределением по глубине в зависимости от времени величины $\left\langle w'^2 \right\rangle / e$. Обращает на себя внимание тот факт, что в значительной части области турбулентного смешения (а при использовании демпфирующей функции – во всей области) отношение $\left\langle w'^2 \right\rangle / e$ существенно меньше величины 2/3. Наиболее ярко выраженную анизотропию дает модель 3.2. Видно, что соответствующие дифференциальные и алгебраические модели $\left\langle w'^2 \right\rangle$ дают близкие (но не совпадающие) результаты. К сожалению, экспериментальные данные о поведении величин $\left\langle w'^2 \right\rangle$ и e нам не известны. Отметим, что в работе [28] рассматривалась задача об анизотропном вырождении безымпульсного турбулентного следа в линейно стратифицированной среде. В этой задаче имеются детальные экспериментальные данные о вырождении нормальных компонент тензора рейнольдсовых напряжений $\left\langle u'^2 \right\rangle$ и $\left\langle w'^2 \right\rangle$. При исследовании течения в следе, как уже говорилось выше, применялись модели типа 2.1 и 3.1. Модель типа 2.1 с дифференциальным уравнением переноса $\left\langle w'^2 \right\rangle$ позволила более детально описать поведение этой величины в зависимости от времени вырождения следа.

Сопоставление результатов расчетов с использованием моделей M_{31} и M_{32} показало, что они дают практически одинаковую динамику заглубления турбулентного слоя. Лишь вблизи поверхности жидкости распределения $\left\langle w'^2 \right\rangle$ и $\left\langle w'^2 \right\rangle / e$ заметно отличаются (влияние демпфирующей функции).

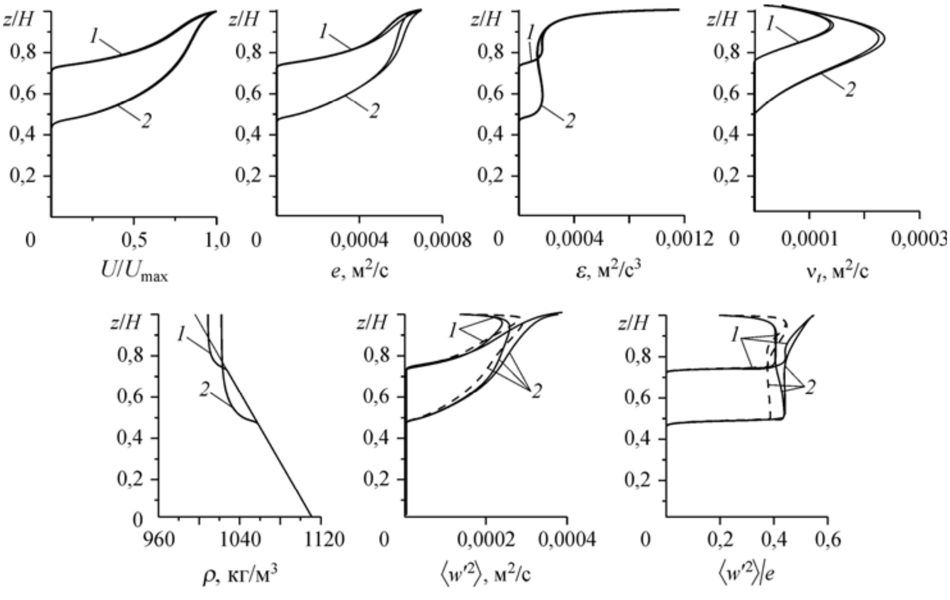

Рис. 2. Вертикальные распределения основных параметров на два момента времени, полученные с использованием модели M_{21} (тонкая сплошная линия), M_{22} (жирная сплошная линия) и M_{32} (пунктирная линия).
60 (*1*), 240 (*2*) с.

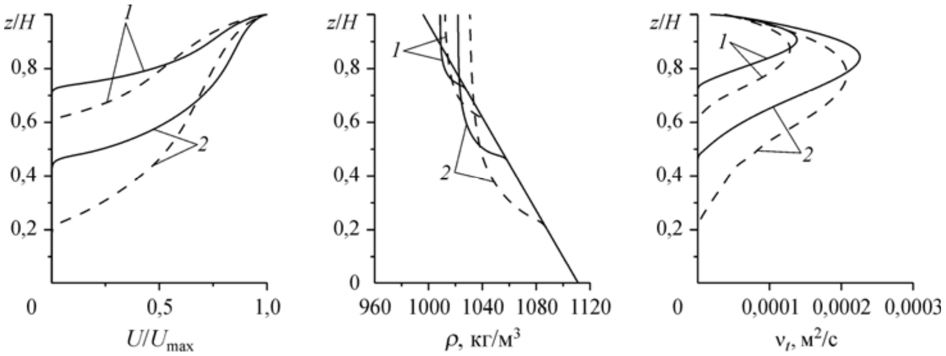

Рис. 3. Вертикальные распределения основных параметров течения по классической e-ε модели (пунктирная линия) и модели 2.2 (сплошная линия).

60 (*1*), 240 (*2*) с.

Сравнение результатов расчетов, основанных на применении классической e-ε модели (БМ$_1$, БМ$_2$) и усовершенствованных моделей 2.1, 2.2, 3.1, 3.2, позволяет сделать вывод о том, что распределения основных переменных, полученные с использованием e-ε модели, существенно отличается от рассчитанных по остальным моделям (сравним рис. 1, 2). Дополнительно на рис. 3 приводятся вертикальные распределения этих переменных на разные моменты времени для условий II. Классическая e-ε модель турбулентности, в которой $\langle u'^2 \rangle = \langle v'^2 \rangle = \langle u'^2 \rangle = 2/3e$, дает значительно более выраженное турбулентное перемешивание (что отмечено также и в работе [20]).

Этот факт иллюстрируется и рис. 4, на котором представлена динамика безразмерной глубины перемешанного слоя $h_1 = N_0 h / u^*$ в зависимости от безразмерного времени $t_1 = N_0 t$. Здесь $N_0 = \left[-\left(g/\rho^* \right) \left(\partial \rho / \partial z \right)_{t=0} \right]^{1/2}$ — частота Вяйсяля–Брента, h — толщина перемешанного слоя, $u^* = \sqrt{\tau_w / \rho^*}$, ρ^* — начальное значение плотности жидкости на поверхности. Толщина перемешанного слоя определялась следующим образом: $h = H - z_h$, где z_h — величина, удовлетворяющая условию $U(t, z_h) = 0{,}02 U_{\max}(t)$, $U_{\max}(t) = \max\limits_z U(t, z)$).

На рис. 4, *a* результаты расчетов сопоставляются с экспериментальными данными [24]. Как и следовало ожидать, классическая e-ε модель дает заметно завышенные значения

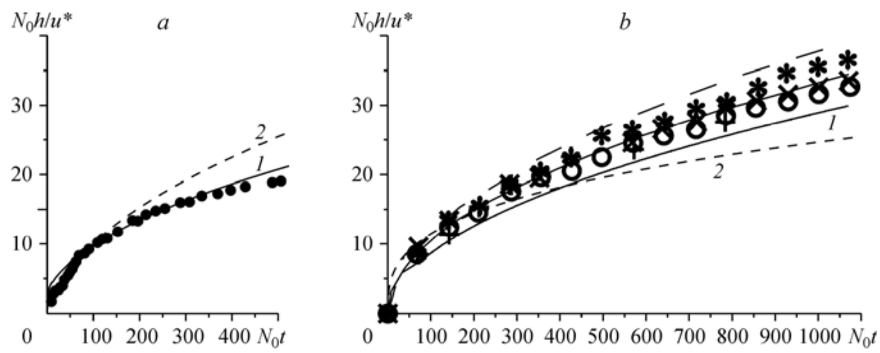

Рис. 4. Динамика заглубления перемешанного слоя.

a — расчет по модели 2.2 (*1*), расчет по классической модели (*2*), данные эксперимента [24] (символы); *b* — расчет по модели 2.2 (*1*), аппроксимация данных эксперимента [24] (*2*), данные из работы [17] (остальные кривые и символы).

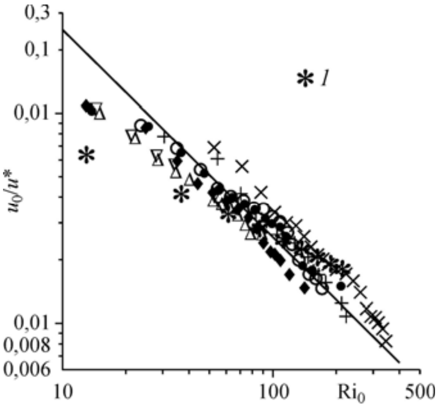

Рис. 5. Зависимость скорости заглубления перемешанного слоя от числа Ричардсона. *1* — результаты расчета по модели 2.2, прямая линия и остальные символы — данные из работы [24].

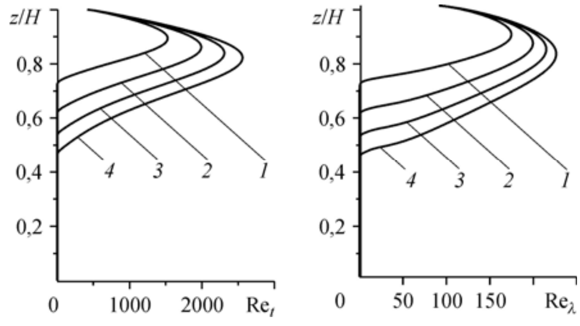

Рис. 6. Рассчитанные по модели 2.1 турбулентные числа Рейнольдса Re_t и Re_λ в условиях эксперимента [24] с условиями II.
60 (*1*), 120 (*2*), 180 (*3*), 240 (*4*) с.

глубины перемешанного слоя в сравнении с другими используемыми здесь моделями (которые дают практически совпадающие кривые), что согласуется и с данными рис. 3. Тем не менее, и эти усовершенствованные модели (кривая *1*) дают более интенсивное в сравнении с экспериментом расширение турбулентного слоя на больших временах (на это обстоятельство указано также в работе [8]). На рис. 4, *b* сопоставлены результаты расчетов, полученных в работе [17], с расчетами настоящей работы по усовершенствованной модели 2.2 варианта III (кривая *1*). В [17] была предложена аппроксимация $h_1(t) = 15^{1/3} N_0^{1/3} t^{1/3}$ экспериментальной зависимости [24], что дает возможность в условиях варианта III сопоставить расчетные данные с экспериментальной кривой. Результаты расчетов по модели настоящей работы лучше согласуются с аппроксимационной кривой при $N_0 t > 300$.

На рис. 5 показаны зависимости скорости заглубления турбулентного слоя u_0/u^*, $u_0 = \partial h/\partial t$ от числа Ричардсона $\mathrm{Ri}_0 = \left(\partial\rho/\partial z\right)_{t=0} h^2 \Big/ \left(2\rho^* u^{*2}\right)$ в численном расчете с использованием модели 2.2 и данные эксперимента [24]. Видно, что убывание скорости заглубления с ростом числа Ричардсона в численном расчете происходит медленнее, чем в эксперименте. Требуется дальнейшее совершенствование математической модели, что представляет задачу ближайших исследований.

На рис. 6 приведены вертикальные распределения турбулентных чисел Рейнольдса $\mathrm{Re}_t = e^2 / (\nu\varepsilon)$ и $\mathrm{Re}_\lambda = \lambda\sqrt{2e}/\nu$, $\lambda = \sqrt{10\nu e/\varepsilon}$, которые свидетельствуют о том, что в значительной части области ненулевых турбулентных возмущений течение является развитым турбулентным течением ($\mathrm{Re}_\lambda \ge 100$).

Заключение

В настоящей работе для описания процессов вертикального турбулентного обмена в устойчиво стратифицированном водоеме рассмотрены усовершенствованные математические модели второго порядка, основанные на алгебраических представлениях рейнольдсовых напряжений и потоков и использовании дифференциального уравнения переноса дисперсии флуктуаций вертикальной компоненты скорости $\langle w'^2 \rangle$. Выполнено численное моделирование задачи о заглублении турбулентного слоя перемешанной жидкости в линейно стратифицированной среде под действием постоянного касательного напряжения. Результаты расчетов хорошо согласуются с известными экспериментальными данными [24] и свидетельствуют о существенном влиянии анизотропии течения на его основные характеристики.

Авторы выражают благодарность О. Ф. Воропаевой, принимавшей активное участие в обсуждении постановки задачи.

Список литературы

1. **Монин А.С., Яглом А.М.** Статистическая гидромеханика. Механика турбулентности. Ч. 1. М.: Наука, 1965. 639 с.
2. **Кочергин В.П., Цветова Е.А., Сухоруков В.А.** Моделирование процессов вертикальной турбулентной диффузии в океане // Численные методы расчета океанических течений. Новосибирск: ВЦ СО АН СССР, 1974. С. 129–152.
3. **Кочергин В.П., Климок В.И., Сухоруков В.А.** Однородный слой океана в рамках "дифференциальных" моделей // Числ. методы механики сплошной среды. Новосибирск: ВЦ СО АН СССР, 1977. Т. 8. № 5. С. 105–114.
4. **Игнатова Г.Ш., Квон В.И.** О модели турбулентного течения со скольжением на дне водотока // Метеорология и гидрология. 1977. № 8. С. 49–56.
5. **Marchuk G.I., Kochergin V.P., Klimok V.I., Sukhorukov V.A.** On the dynamics of the ocean surface mixed layer // J. Phys. Oceanography. 1977. Vol. 7. P. 865–875.
6. **Зилитинкевич С.С., Реснянский Ю.Д., Чаликов Д.В.** Теоретическое моделирование верхнего слоя океана // Итоги науки и техн. ВИНИТИ. Сер. Механика жидкости и газа. 1978. Т. 12. С. 5–51.
7. **Rodi W.** Turbulence models and their application in hydraulics. A state of the art review. University of Karlsruhe, 1980. 104 p.
8. **Левеллен В.** Метод инвариантного моделирования // Турбулентность. Принципы и применения / Под ред. В. Колльмана; пер. с англ. М.: Мир. 1980. С. 262–310.
9. **Mellor G.L., Yamada T.** Development of a turbulence closure model for geophysical fluid problems // Reviews Geophysics and Space Physics. 1982. Vol. 20, No. 4. P. 851–875.
10. **Роди В.** Модели турбулентности окружающей среды // Методы расчета турбулентных течений / Под ред. В. Колльмана; пер. с англ. М.: Мир, 1984. С. 227-322.
11. **Celik I., Rodi W.** Simulation of free-surface effects in turbulent channel flows // Phys.-Chem. Hydrodynamics. 1984. Vol. 5, No. 3–4. P. 217–227.
12. **Rodi W.** Examples of calculation methods for flow and mixing stratified fluids // J. Geophys. Res. 1987. Vol. 92, No. C5. P. 5305–5328.
13. **Vasiliev O.F., Dumnov S.V.** Numerical modelling of flow in a river estuary // Proc. Technical Session B. XXII Congress IAHR. Lausanne, 1987. P. 83–87.
14. **Курбацкий А.Ф.** Моделирование нелокального переноса импульса и тепла. Новосибирск: Наука, Сиб. отделение, 1988. 240 с.
15. **Sukhorukov V.A., Dmitriev N.V.** Theory of the turbulent drift friction layer of the Ocean // J. Phys. Oceanography. 1990. Vol. 20, No. 8. P. 1137–1149.
16. **Дмитриев Н.В.** Математическое моделирование вертикального турбулентного обмена в верхнем слое океана / Под ред. Г.Г. Черных. Новосибирск: ВЦ СО РАН, 1993. 154 с.
17. **Deleersnijer E., Luyten P.** On the practical advantages of the quasi-equilibrium version of the Mellor and Yamada level 2, 5 turbulence closure applied to marine modelling // Appl. Math. Modelling. 1994. Vol. 18. P. 281–287.
18. **Druzhinin O.A., Kazakov V.I., Matusov P.A., Ostrovsky L.A.** The evolution of a thermocline effect by a turbulent stream // Nonlinear Processes in Geophysics. 1995. Vol. 2, No. 1. P. 49–57.
19. **Илюшин Б.Б., Курбацкий А.Ф.** Новые модели для вычисления моментов третьего порядка в пограничном планетарном слое // Изв. РАН. Физика атмосферы и океана. 1998. Т. 34, № 6. С. 772–781.
20. **Зиновьев А.Е., Яковенко С.Н.** Моделирование вертикального турбулентного обмена в пристенном стратифицированном течении // Прикладная механика и техническая физика. 1998. Т. 39, № 6. С. 57–64.
21. **Курбацкий А.Ф.** Введение в моделирование турбулентного переноса импульса и скаляра. Новосибирск: Гео, 2007. 331 с.

22. Kantha L. Modeling turbulent mixing in the global ocean: second moment closure models // Turbulence: Theory, Types and Simulation. Chapter 1. Nova Sci. Publishers, Inc., 2010. P. 1–68.

23. Васильев О.Ф., Воропаева О.Ф., Курбацкий А.Ф. Турбулентное перемешивание в устойчиво стратифицированных течениях окружающей среды: современное состояние проблемы (обзор) // Изв. РАН. Физика атмосферы и океана. 2011. Т. 47, № 3. С. 291–307.

24. Kato H., Phillips O.M. On the penetration of a turbulent layer into stratified fluid // J. Fluid Mech. 1969. Vol. 37, part 4. P. 643–655.

25. Филлипс О.М. Динамика верхнего слоя океана. Л.: Гидромереоиздат, 1980. 319 с.

26. Линейкин П.С., Мадерич В.С. Теория океанического термоклина. Л.: Гидрометеоиздат, 1982. 271 с.

27. Vasiliev O.F., Kuznetsov B.G., Lytkin Yu.M., Chernykh G.G. Development of the turbulent mixing zone in a stratified medium // Proc. of the Int. Seminar "Heat Transfer and Turbulent Buyant Convection", Dubrovnik, Yugoslavia, August 30 – September 4, 1976. Washington: Hemisphere Publ. Corp., 1976. Vol. 2. P. 123–136.

28. Chernykh G.G., Voropaeva O.F. Numerical modelling of momentumless turbulent wake dynamics in a linearly stratified medium // Computers and Fluids. 1999. Vol. 28, No 3. P. 281–306.

29. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1977. 735 с.

Статья поступила в редакцию 9 апреля 2012 г.