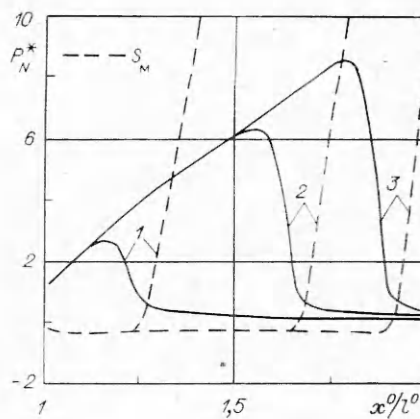


Р и с. 5



Р и с. 6

кромки уже на малом расстоянии переводит течение на сверхзвуковой режим.

На рис. 6 приведены распределения по сечениям следа критического перепада давления P_N^* в «скачке», посчитанные при различных P_w . По мере удаления от задней кромки течение в следе разгоняется, а его взаимодействие с внешним невязким потоком приобретает все более развитый закритический характер. Как и следовало ожидать, для перевода этого течения в докритический режим, согласно критерию (3.3), по мере удаления в след необходимо прикладывать все больший неблагоприятный градиент давления. Отметим, что перепад давления, достаточный для транскритического перехода, равен единице как раз в том сечении следа, где обращается в нуль интеграл $S_m(X)$, изменение знака которого соответствует смене типа взаимодействия.

ЛИТЕРАТУРА

1. Хейз У. Д., Пробстни Р. Ф. Теория гиперзвуковых течений.— М.: ИЛ, 1967.
2. Нейланд В. Я. Распространение возмущений вверх по течению при взаимодействии гиперзвукового потока с пограничным слоем // Изв. АН СССР. МЖГ.— 1970.— № 4.
3. Нейланд В. Я. К теории взаимодействия гиперзвукового потока с пограничным слоем для отрывных двумерных и пространственных течений. Ч. 1. Пространственные течения // Учен. зап. ЦАГИ.— 1974.— Т. 5, № 2.
4. Pearson H., Holliday J. B., Smith S. F. A theory of the cylindrical ejector propelling nozzle // J. Roy. Aeron. Soc.— 1958.— V. 62.— P. 746.
5. Нейланд В. Я. К теории взаимодействия гиперзвукового потока с пограничным слоем для отрывных двумерных и пространственных течений Ч. 2. Двумерные течения и треугольное крыло // Учен. зап. ЦАГИ.— 1974.— Т. 5, № 3.
6. Нейланд В. Я. Особенности взаимодействия и отрыва транскритического пограничного слоя // Учен. зап. ЦАГИ.— 1987.— Т. 18, № 2.
7. Коваленко А. А. Численное моделирование течения в гиперзвуковом ламинарном пограничном слое // Тр. ЦАГИ.— 1989.— Вып. 2417.

г. Жуковский

Поступила 8/1 1990 г.

УДК 532.59

Б. Е. Протопопов

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ЯВЛЕНИЯ ГЕНЕРАЦИИ СОЛИТОНОВ ДВИЖУЩЕЙСЯ ОБЛАСТЬЮ ПОВЕРХНОСТНОГО ДАВЛЕНИЯ

При движении по поверхности жидкости локализованной области давления с околоскритической скоростью (число Фруда по глубине близко к единице) можно наблюдать интересный феномен: наряду с образованием волнового следа источник возмущения (движущаяся область давления) периодически генерирует волны солитонного вида, убегающие от него вверх по потоку и по мере удаления выходящие на режим движения с постоянной (сверхкритической) скоростью без изменения своей формы.

Описанное явление генерации солитонов, первоначально обнаруженное в эксперименте, впоследствии было подтверждено численными расчетами. Впервые это сделано в [1], где использовано приближение Буссинеска, обобщенное на случай наличия поверхностного давления. Модель учитывает как нелинейные, так и дисперсионные эффекты (во взаимодействии которых и кроется механизм данного явления), что позволяет получить адекватную качественную картину процесса. Однако в силу приближенного характера модели, построенной на предположении малости дисперсии и нелинейности, возникает вопрос о справедливости количественных результатов. Другая приближенная модель, применяемая для исследования генерации солитонов, — вынужденное уравнение Кортевега—де Вриза [2] — обладает еще меньшей общностью, поскольку является дальнейшим упрощением приближения Буссинеска на случай, когда источник возмущения движется со скоростью, близкой к критической. Некоторое представление о степени достоверности приближенного моделирования данного процесса можно получить из [3], где сопоставлены результаты расчетов по обеим моделям, а также выполнено сравнение с экспериментом для генерации солитонов движущейся неровностью дна.

В настоящей работе явление генерации солитонов рассмотрено в рамках более общей, свободной от ограничений на амплитуды и длины исследуемых волн, модели потенциального течения идеальной несжимаемой жидкости. Проведен численный анализ зависимости основных характеристик процесса от интенсивности поверхностного давления. При этом помимо потенциальной модели использована обобщенная модель Буссинеска с целью оценки границ применимости последней.

1. Предполагается, что в любой момент времени t область, занятая жидкостью, представляет собой криволинейный четырехугольник $Q(t) = \{0 \leq x \leq l, -h \leq y \leq \eta(x, t)\}$ в декартовой системе координат Oxy с осями x и y , направленными по уровню поверхности невозмущенной жидкости и вертикально вверх соответственно. Движение жидкости происходит под действием внешней силы — заданного поверхностного распределения давления $p(x, t)$. Рассматривается случай, когда давление сосредоточено на ограниченном носителе и перемещается со временем как единое целое:

$$(1.1) \quad p(x, t) = p_0(\xi) = \begin{cases} p_m f(\xi) & \text{при } |\xi| \leq 1, \\ 0 & \text{при } |\xi| > 1, \end{cases}$$

где $\xi = x - X(t)$ — локальная координата; $x = X(t)$ — заданный закон движения средней точки $\xi = 0$ области давления; $p_m = \text{const}$; $\max f(\xi) = 1$. Здесь и далее используются только безразмерные переменные, масштабы всех величин выбраны таким образом, что полудлина области поверхностного давления, ускорение свободного падения и плотность жидкости равны единице.

Для описания движения жидкости применяются модель потенциального течения идеальной жидкости и обобщенное приближение Буссинеска. В той и другой модели соответствующая система содержит два уравнения эволюционного типа, одно из которых описывает изменение во времени формы поверхности жидкости $\eta(x, t)$, а второе необходимо для определения эволюции поля скорости. Формально их можно записать в общем для обеих моделей виде

$$(1.2) \quad \eta_t + v = 0;$$

$$(1.3) \quad q_t + s_x = 0$$

с функциями $v(x, t)$, $q(x, t)$, $s(x, t)$. К выписанным уравнениям добавим начальные данные

$$(1.4) \quad \eta = \eta_0(x), \quad q = q_0(x) \quad \text{при } t = 0$$

и дополнительные соотношения между η , v , q , s , замыкающие систему.

В потенциальной модели эти соотношения имеют вид

$$(1.5) \quad q = u;$$

$$(1.6) \quad s = \frac{1}{1 - \eta_{xx}^2} \left(\frac{1}{2} (u^2 - v^2) + \eta_{xuv} \right) + \eta + p.$$

Здесь $u(x, t)$ и $v(x, t)$ — касательная и нормальная компоненты (с точностью до нормирующего множителя) вектора скорости частиц жидкости,

находящихся на поверхности $y = \eta(x, t)$. Согласно [4], v определяется как результат действия оператора нормальной производной N на граничное значение потенциала $\varphi = \varphi(x, t)$: $v = N\varphi$, где

$$(1.7) \quad \varphi(x, t) = \varphi_0(t) + \int_0^x u(\xi, t) d\xi$$

с произвольной функцией $\varphi_0(t)$. Действие нелокального оператора $N(\eta)$ определяется как

$$(1.8) \quad N\varphi = \eta_x \Phi_x - \Phi_y \text{ при } y = \eta(x, t).$$

Здесь $\Phi(x, y, t)$ — решение эллиптической задачи:

$$\begin{aligned} \Phi_{xx} + \Phi_{yy} &= 0 \text{ в } Q(t), \quad \Phi_x = 0 \text{ при } x = 0, x = l, \\ \Phi_y &= 0 \text{ при } y = -h, \quad \Phi = \varphi \text{ при } y = \eta(x, t). \end{aligned}$$

Искомая функция $\eta(x, t)$ определяет одну из границ области $Q(t)$, что вызывает некоторые затруднения при решении эллиптической задачи, для преодоления которых используется замена переменных $(x, y, t) \rightarrow (x, z, t)$ ($z = (\eta - y)/(\eta + h)$). Область течения $Q(t)$ этой заменой переводится в постоянный прямоугольник $\Pi = \{0 \leq x \leq l, 0 \leq z \leq 1\}$. Эллиптическая задача в новых переменных принимает вид

$$(1.9) \quad U_x + V_z = 0 \text{ в } \Pi;$$

$$(1.10) \quad U = 0 \text{ при } x = 0, x = l;$$

$$(1.11) \quad V = 0 \text{ при } z = 1;$$

$$(1.12) \quad \Phi = \varphi \text{ при } z = 0.$$

Здесь использованы обозначения:

$$(1.13) \quad U(x, z, t) = \alpha\Phi_x + \beta\Phi_z, \quad V(x, z, t) = \beta\Phi_x + \gamma\Phi_z;$$

$$(1.14) \quad \alpha(x, t) = \eta + h, \quad \beta(x, z, t) = (1 - z)\eta_x, \quad \gamma(x, z, t) = (1 + \beta^2)/\alpha.$$

В завершение постановки задачи в рамках потенциальной модели соотношение (1.8) переписывается:

$$(1.15) \quad v = V \text{ при } z = 0.$$

В обобщенной модели Буссинеска система уравнений (1.2)–(1.4) замыкается существенно более простым способом [4]:

$$(1.16) \quad q = w - (1/3)h^2 w_{xx};$$

$$(1.17) \quad w = 0 \text{ при } x = 0, x = l;$$

$$(1.18) \quad s = (1/2)w^2 + \eta + p, \quad v = [(\eta + h)w]_x$$

($w(x, t)$ — осредненная по глубине горизонтальная компонента скорости). Относительная простота обобщенного приближения Буссинеска (системы уравнений (1.2)–(1.4), (1.16)–(1.18)) в сравнении с потенциальной моделью (системой (1.2)–(1.7), (1.9)–(1.15)) достигнута за счет ограничений на амплитуды a и длины λ исследуемых волн [4]:

$$(1.19) \quad \delta_1 = a/h \ll 1, \quad \delta_2 = h/\lambda \ll 1, \quad \delta_1 = O(\delta_2^2)^{***}$$

2. Алгоритм численного решения задачи как в рамках потенциальной модели, так и в приближении Буссинеска, строится методом конечных разностей. Эволюционные уравнения аппроксимируются по схеме Кранка — Николсона со вторым порядком по t :

$$\eta^{n+1, k+1} = \eta^n - \frac{\tau}{2}(v^{n+1, k} + v^n), \quad q^{n+1, k+1} = q^n - \frac{\tau}{2}(s_x^{n+1, k} + s_x^n)$$

(τ — шаг по времени, первый верхний индекс — номер шага по времени, второй — номер итерации). Итерационный процесс на каждом шаге по t

необходим в силу неявности схемы и нелинейности дополнительных соотношений на η , v , q , s .

В потенциальной модели параллельно с итерированием нелинейных членов осуществляется установление решения эллиптической задачи по схеме стабилизирующей поправки (первый индекс опущен):

$$\begin{aligned}
 (2.1) \quad & \Phi^{k+1/2} - \omega U_x^{k+1/2} = \Phi^k + \omega V_z^k; \\
 (2.2) \quad & U^{k+1/2} = (\Phi_x^{k+1/2} + \beta^{k+1} V^k) / \gamma^{k+1}; \\
 (2.3) \quad & U^{k+1/2} = 0 \text{ при } x = 0, x = l; \\
 (2.4) \quad & \Phi^{k+1} - \omega V_z^{k+1} = \Phi^{k+1/2} - \omega V_z^k; \\
 (2.5) \quad & V^{k+1} = (\Phi_z^{k+1} + \beta^{k+1} U^{k+1/2}) / \alpha^{k+1}; \\
 (2.6) \quad & \Phi^{k+1} = \varphi^{k+1} \text{ при } z = 0, V^{k+1} = 0 \text{ при } z = 1
 \end{aligned}$$

(ω — итерационный параметр).

Производные по пространственным переменным в обеих моделях аппроксимируются со вторым порядком, причем используются с этой целью только симметричные разности, что возможно благодаря подходящему разнесению узлов сетки для различных функций. В точках $x_{i-1/2}$, где $x_v = v h_1$ ($h_1 = l/m_1$ — шаг сетки по переменной x , m_1 — целое), помещаются узлы $\eta_{i-1/2} = \eta(x_{i-1/2}, t)$, $v_{i-1/2}$, $s_{i-1/2}$ ($i = 1, \dots, m_1$), между этими точками — узлы q_i ($i = 1, \dots, m_1 - 1$). Также в точках x_i , включая и концы отрезка $[0, l]$, располагаются узлы u_i или в зависимости от модели w_i ($i = 0, \dots, m_1$).

В потенциальной модели эллиптическая задача (2.1)–(2.6) рассчитывается на сетке, состоящей из узлов $\Phi_{i-1/2, j-1} = \Phi(x_{i-1/2}, z_{j-1}, t)$ ($i = 1, \dots, m_1, j = 1, \dots, m_2$), $U_{i, j-1}$ ($i = 0, \dots, m_1, j = 1, \dots, m_2$), $V_{i-1/2, j-1/2}$ ($i = 1, \dots, m_1, j = 0, \dots, m_2$), где $z_v = v h_2$ ($h_2 = l/(m_2 - 0,5)$ — шаг по координате z , m_2 — целое). После замены производных соответствующими разностными аналогами решение системы уравнений (2.1)–(2.6) сводится к обращению последовательности трехдиагональных матриц. Более детальное описание алгоритма расчета эллиптической задачи можно найти в [5].

В приближении Буссинеска эллиптическая часть задачи, представленная уравнением (1.16) с граничными условиями (1.17), достаточно проста и ее конечно-разностная реализация очевидна.

3. В расчетах использованы следующие значения параметров, определяющих геометрию течения: длина канала $l = 75$, глубина $h = 1$. Давление распределено по своему носителю согласно (1.1) с функцией $f(\xi) = (1/2)(1 + \cos \pi \xi)$. Максимальное значение давления p_m варьировалось. Закон движения источника возмущения задан в виде

$$(3.1) \quad X(t) = \begin{cases} x_0 & \text{при } t \leq 0, \\ x_0 + ct & \text{при } t > 0 \end{cases}$$

с точкой старта $x_0 = 2$ и постоянной скоростью $c = 1$, которая при выбранной глубине канала является критической: $Fr = c/\sqrt{h} = 1$. До момента начала движения области давления жидкость покоится, т. е. $\eta_0(x) = -p_0(x - x_0)$, $q_0(x) = 0$.

Результаты расчета по потенциальной модели в случае $p_m = 0,2$ с параметрами сетки $m_1 = 375$, $m_2 = 10$, $\tau/h_1 = 0,5$ представлены на рис. 1 п 2. На рис. 1 приведена эволюция волнового профиля. Нижняя кривая — форма поверхности жидкости при $t = 0$, далее вверх — профили через равные промежутки времени $\Delta t = 10$ до момента окончания счета $t = 60$. На каждой кривой двумя вертикальными штрихами очерчен участок поверхности, на котором в данный момент времени давление отлично от нуля. Рис. 1 наглядно демонстрирует процесс образования солитонов, убегających от источника возмущения вперед по направлению его дви-

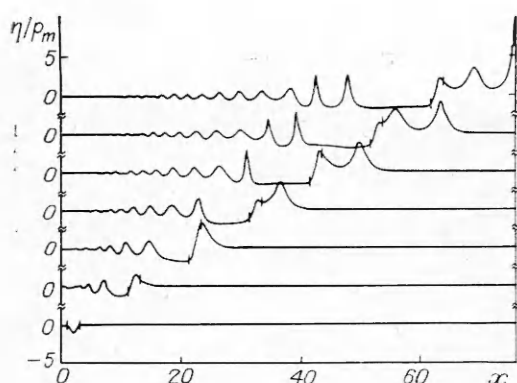


Рис. 1

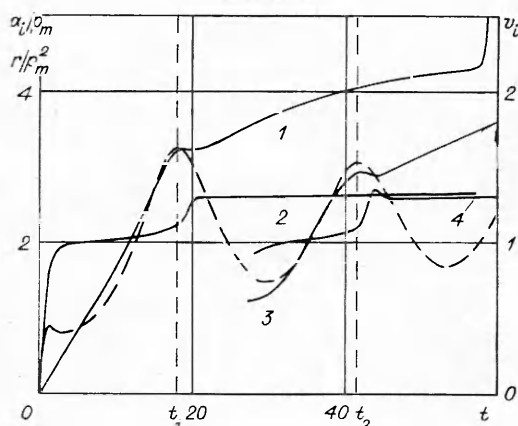


Рис. 2

соответственно. Пунктирной линией на рис. 2 представлено волновое сопротивление $r(t)$ [1]:

$$r(t) = \int_0^l p \eta_x dx.$$

Отделение i -го ($i = 1, 2, \dots$) солитона от источника возмущения проявляется в немонотонном поведении соответствующей кривой $a_i(t)$, резком возрастании $v_i(t)$ и достижении очередного локального максимума функцией $r(t)$. Точки максимума $r(t)$ естественно считать моментами отделения солитонов. Каждый отделившийся солитон, как видно из рис. 2, движется далее с почти постоянной скоростью, в то время как его амплитуда продолжает расти (с замедлением темпа).

Представляет интерес зависимость основных характеристик исследуемого процесса (частоты генерации солитонов, их амплитуд, волнового сопротивления) от интенсивности внешнего воздействия на жидкость. В данном случае распределение $f(\xi)$ и скорость движения области давления s предполагаются фиксированными, так что мерой интенсивности служит параметр p_m . Согласно результатам исследований по приближенным моделям [2, 3], с ростом p_m надо ожидать увеличения частоты генерации солитонов, их амплитуд и скоростей, что подтверждается данными настоящих расчетов. При этом лишь довольно узкий диапазон изменения p_m (примерно от 0,1 до 0,2) пригоден для эффективного численного изучения процесса в том смысле, что задание p_m из этого интервала обеспечивает приемлемую частоту генерации солитонов (т. е. достаточно быстрое развитие процесса) и умеренные значения амплитуд генерируемых солитонов и волн в следе, не приводящие к развитию неустойчивости.

Зависимости основных характеристик процесса от интенсивности давления p_m , варьируемой в указанных пределах, представлены на

жения (вверх по потоку в системе отсчета, связанной с областью давления). К моменту $t = 60$ успевают сформироваться два таких солитона, первый из которых (верхняя кривая) уже находится в стадии заплеска на правую стенку. Расход жидкости на формирование солитонов компенсируется образованием продолжительной впадины на поверхности позади источника возмущения.

Развитие генерируемых солитонов во времени можно проследить по рис. 2, где представлены изменения их амплитуд и скоростей. Кривая 1 — амплитуда $a_1(t)$ первого солитона, точнее, вертикальная координата локального максимума поверхности жидкости впереди источника возмущения, 2 — скорость $v_1(t)$ движения этого максимума, т. е. производная по времени от его горизонтальной координаты. В некоторый момент времени перед областью давления возникает второй локальный максимум, изменения его амплитуды $a_2(t)$ и скорости $v_2(t)$ показаны кривыми 3 и 4

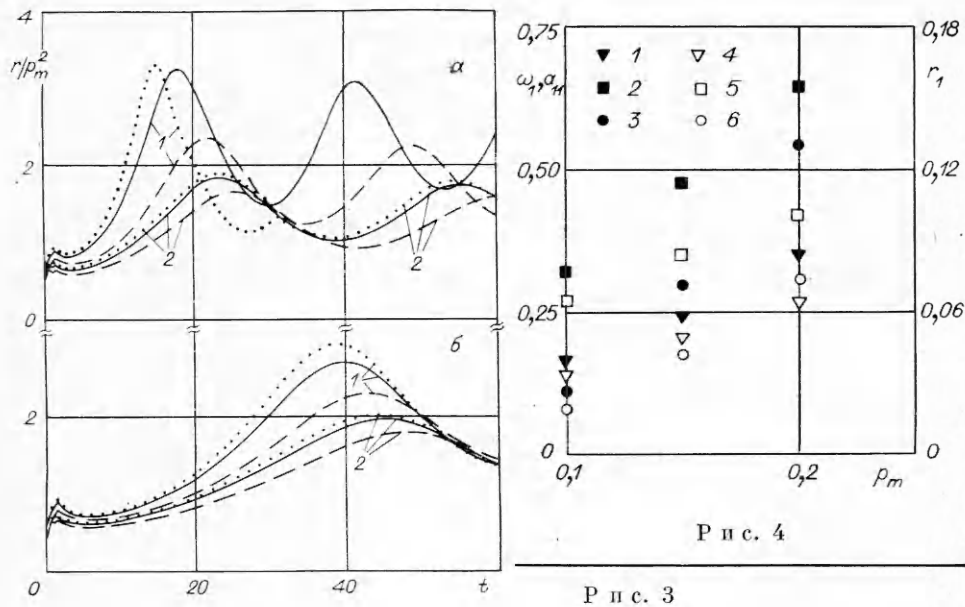


рис. 3 и 4, которые, кроме того, позволяют проследить динамику расхождения результатов расчета по приближению Буссинеска с результатами потенциальной модели по мере увеличения p_m , т. е. по мере усиления нелинейности процесса (роста параметров δ_1, δ_2 из (1.19)). На рис. 3 дано волновое сопротивление $r(t)$, рассчитанное для $p_m = 0,2$ (а) и $0,1$ (б). Сплошная, штриховая и пунктирная линии 1 отвечают расчетам по модели потенциального течения идеальной жидкости, аналогичные линии 2 — по обобщенному приближению Буссинеска. Основной вариант вычислений с шагом сетки по горизонтальной координате $h_1 = 0,2$ представлен сплошными кривыми, а штриховыми и пунктирными — результаты расчетов с $h_1 = 0,4$ и $h_1 = 0,1$ соответственно. При вариации шага сетки по горизонтальной координате сохранялись неизменными отношение $\tau/h_1 = 0,5$ и величина шага $h_2 = 2/19$ по z .

Рассчитанные по потенциальной модели значения частоты появления первого солитона $\omega_1 = 2\pi/t_1$, его амплитуды $a_{11} = a_1(t_1)$ и волнового сопротивления $r_1 = r(t_1)$ в момент отделения t_1 представлены в зависимости от p_m на рис. 4 точками 1—3 соответственно, точками 4—6 — значения этих же параметров, найденные в результате расчета по обобщенному приближению Буссинеска. Можно видеть, что при $p_m = 0,2$ приближенная модель в сравнении с более точной потенциальной существенно занижает частоту генерации солитонов (на 25%), их амплитуды в момент отделения (на 35%) и максимальные значения волнового сопротивления (на 43%). С уменьшением p_m расхождения между данными, полученными в рамках рассматриваемых моделей, убывают, и при $p_m = 0,1$ относительные погрешности перечисленных выше величин составляют уже 11, 16 и 28%. Несложной экстраполяцией по представленным на рис. 4 результатам можно получить верхнюю границу p_m^* интервала изменения p_m , на котором использование обобщенного приближения Буссинеска приводит к погрешностям, не превышающим 10% (относительно результатов расчета по потенциальной модели), по всем рассматриваемым здесь параметрам процесса: $p_m^* = 0,04$.

4. В качестве одной из мер по контролю точности вычислений была предусмотрена проверка в процессе счета сохранения массы жидкости, а именно прослеживалось изменение во времени интеграла

$$\Delta M(t) = \int_0^l (\eta(x, t) - \eta_0(x)) dx.$$

К моменту окончания счета $t = 60$ (600 шагов по времени) дефект массы $\Delta M(t)$ достиг $8,3 \cdot 10^{-5}$ при $p_m = 0,1$ и $6,5 \cdot 10^{-5}$ при $p_m = 0,2$. Для приближения Буссинеска эти цифры существенно лучше: $1,4 \cdot 10^{-9}$ и $3,4 \cdot 10^{-9}$ соответственно, но и значение $8,3 \cdot 10^{-5}$ следует признать вполне удовлетворительным с учетом того, что масса всей жидкости в канале примерно $hl = 75$. Сохранение массы жидкости в расчетах по потенциальной модели можно улучшить ценой увеличения количества итераций на каждом шаге по t , т. е. за счет роста затрат машинного времени, которые, впрочем, для указанных значений дефекта массы весьма велики и в силу двумерности эллиптической части задачи существенно превосходят (в 50 раз при $p_m = 0,1$ и почти в 100 раз при $p_m = 0,2$) аналогичные затраты при использовании обобщенного приближения Буссинеска.

С целью анализа чувствительности результатов численного эксперимента к изменению параметров сетки выполнены контрольные расчеты с варьированием шагов по горизонтальной координате $h_1 = \{0,4; 0,2; 0,1\}$ и по времени (с сохранением отношения $\tau/h_1 = 0,5$). Шаг по координате z в потенциальной модели оставался неизменным ($h_2 = 2/19$). На рис. 3 можно проследить влияние изменений параметров сетки на поведение волнового сопротивления. В целом измельчение расчетной сетки дает качественный эффект, аналогичный эффекту от увеличения p_m , т. е. усиление нелинейности — рост частоты генерации солитонов и их амплитуд. Такой эффект представляется естественным, поскольку отражает факт снижения счетной вязкости с уменьшением шагов сетки. Что касается величины этого эффекта, т. е. относительных изменений различных характеристик течения при переходе с одной сетки на другую, то в потенциальной модели в сравнении с приближением Буссинеска эти изменения оказались, во-первых, более заметными на всем интервале $0,1 \leq p_m \leq 0,2$ и, во-вторых, существенно зависящими от p_m . Так, при $p_m = 0,1$ расхождения между потенциальной и приближенной моделями по амплитуде первого солитона в момент его отделения составили 14, 16 и 17 % на сетках с $h_1 = 0,4; 0,2$ и $0,1$ соответственно, а при $p_m = 0,2$ — 21, 35 и 44 %. Таким образом, с увеличением p_m аккуратное численное исследование процесса становится довольно затруднительным не только ввиду невозможности применения приближенных слабонелинейных моделей, но и в силу необходимости использования достаточно мелких расчетных сеток при численном решении уравнений, точно учитывающих нелинейность.

Автор выражает благодарность И. В. Стуровой за постановку задачи и внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Wu D. M., Wu T. Y. Three-dimensional nonlinear long waves due to moving surface pressure // Proc. 14th sympos. on naval hydrodynamics.— Michigan, 1982.
2. Wu T. Y. Generation of upstream advancing solitons by moving disturbances // J. Fluid Mech.— 1987.— V. 184.— P. 75.
3. Lee S. J., Yates G. T., Wu T. Y. Experiments and analyses of upstream-advancing solitary-waves generated by moving disturbances // J. Fluid Mech.— 1989.— V. 199.— P. 563.
4. Овсянников Л. В., Макаренко Н. И., Налимов В. И. и др. Нелинейные проблемы теории поверхностных и внутренних волн.— Новосибирск: Наука, 1985.
5. Протопопов Б. Е. Численное моделирование поверхностных волн в канале переменной глубины // Динамика сплошной среды: Сб. науч. тр./АН СССР, Сиб. отд-ние, Ин-т гидродинамики.— 1988.— Вып. 84.

г. Новосибирск

Поступила 30/XI 1989 г.