УДК 532.72

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ ТЕПЛОВОЙ УСТОЙЧИВОСТИ ПОТОКА ХИМИЧЕСКИ АКТИВНОЙ ЖИДКОСТИ

Т. А. Боднарь

Технологический институт Алтайского государственного технического университета,
659305 Бийск

Анализ устойчивости решения системы дифференциальных уравнений в частных производных, описывающих тепловое состояние потока химически активной жидкости, основан на сведении бесконечномерной задачи к пространству конечной размерности, содержащему ту часть решения, которая определяет его устойчивость. В рамках метода проекций в качестве конечномерного используется нуль-пространство соответствующего производящего оператора. В общем случае нуль-пространство производящего оператора исследуемой задачи состоит из его собственных функций. Рассматривается случай сочетания параметров потока жидкости, при которых производящий оператор вырождается и для построения его нуль-пространства необходимо использовать векторы, порожденные жордановой цепочкой. Приведены результаты расчетов.

Тепловая устойчивость тангенциального и осевого потоков химически активной жидкости изучалась в работах [1, 2]. В результате проведенного анализа определены границы устойчивости решений соответствующих задач, представляющие собой некоторые гиперповерхности в пространстве физических параметров потока жидкости, рассматриваемых как независимые координаты. (Если в качестве бифуркационного оставлен только один параметр потока, а остальные фиксированы, то гиперповерхность вырождается в точку.)

Определение устойчивости решений бесконечномерных задач, описываемых дифференциальными уравнениями в частных производных, сопряжено с редукцией их размерности. В рамках метода проекций [3] редукция достигается за счет проектирования рассматриваемой задачи на собственное пространство, порождаемое соответствующим производящим оператором. В работах [1, 2] анализ тепловой устойчивости проводился для таких сочетаний параметров потока жидкости, для которых производящие операторы имеют простую структуру, т. е. алгебраические и геометрические кратности собственных значений каждого из операторов совпадают. Нуль-пространство производящего оператора, имеющего простую структуру, состоит из его собственных функций. Вместе с тем при определенных сочетаниях параметров потока жидкости собственные значения производящих операторов имеют алгебраическую кратность, превышающую геометрическую, и операторы не имеют простой структуры. В этом случае для построения нуль-пространства производящего оператора и изучения устойчивости решения задачи необходимо использовать понятие обобщенных функций, порождаемых жордановой цепочкой. Очевидно, необходимость определения собственного функционального пространства возникает только тогда, когда кратное собственное значение равно нулю, а вещественные части остальных собственных значений отрицательны. В противном случае вопрос об устойчивости решается сразу и дополнительный анализ не требуется.

Рассмотрим задачу об эволюции теплового состояния осевого потока химически активной жидкости в круглом канале конечной длины, представляющую собой математическую модель политропического химического реактора [4], записанную в операторном виде [2]:

$$
\begin{gathered}
\frac{\partial \boldsymbol{U}}{\partial t} = A\boldsymbol{U} + B(\boldsymbol{U},\boldsymbol{U}) + C(\boldsymbol{U},\boldsymbol{U},\boldsymbol{U}) + \boldsymbol{\Phi}(0,0) + O(|\boldsymbol{U}|^4),\\
\boldsymbol{U}(x,t_0) = 0, \qquad \boldsymbol{U}(0,t) = 0, \qquad \frac{\partial \boldsymbol{U}(l,t)}{\partial x} - 0{,}5w\boldsymbol{U}(l,t) = 0,
\end{gathered} \tag{1}
$$

где x — координата, направленная вдоль оси потока; t — время; t_0 — начальный момент времени; w — скорость потока жидкости; l — длина реактора. Неизвестным в задаче (1) является вектор $\boldsymbol{U}$, характеризующий в общем случае физико-химическое состояние потока жидкости. На вектор $\boldsymbol{U}$ действуют постоянный $\boldsymbol{\Phi}(0,0)$, линейный $A\boldsymbol{U}$ и нелинейные $B(\boldsymbol{U},\boldsymbol{U})$, $C(\boldsymbol{U},\boldsymbol{U},\boldsymbol{U})$ операторы, обращающие его в другие векторы, имеющие одинаковую с $\boldsymbol{U}$ размерность. Размерность вектора $\boldsymbol{U}$ равна числу независимых параметров, характеризующих тепловое и химическое состояние жидкости. В работе [2] в качестве таких параметров используются температура U_1 и концентрация U_2 одного из реагирующих компонентов жидкости. Функции теплового источника φ и теплопотерь φ_1 имеют вид

$$
\begin{aligned}
\varphi(U_1,U_2) = c_0k_1(1+U_2\exp{(-0{,}5wx)})(1+k_2c_0(1+U_2\exp{(-0{,}5wx)}))^{-2}\times\\
\times\exp{(U_1\exp{(-0{,}5wx)}(1+\beta U_1\exp{(-0{,}5wx)})^{-1})},\\
\varphi_1 = \alpha_1 U_1\exp{(-0{,}5wx)},
\end{aligned}
$$

где c_0, k_1, k_2, α_1, β — постоянные. Переменные и параметры, входящие в задачу (1), безразмерны.

При такой постановке вектор $\boldsymbol{U}$ и операторы $\boldsymbol{\Phi}(0,0)$, $A\boldsymbol{U}$, $B(\boldsymbol{U},\boldsymbol{U})$, $C(\boldsymbol{U},\boldsymbol{U},\boldsymbol{U})$ записываются следующим образом:

$$
\boldsymbol{U} = \begin{Vmatrix} U_1\\ U_2\end{Vmatrix}, \qquad \boldsymbol{\Phi}(0,0) = \begin{Vmatrix} \varphi(0,0)\\ -\alpha\varphi(0,0)\end{Vmatrix},
$$

$$
A\boldsymbol{U} = \begin{Vmatrix} \partial^2/\partial x^2 + \varphi_{1,0} - \alpha_1 - 0{,}25w^2 & \varphi_{0,1}\\ -\alpha\varphi_{1,0} & \partial^2/\partial x^2 - \alpha\varphi_{0,1} - 0{,}25w^2\end{Vmatrix}\begin{Vmatrix} U_1\\ U_2\end{Vmatrix},
$$

$$
B(\boldsymbol{U},\boldsymbol{U}) = \begin{Vmatrix} \varphi_{2,0} & \varphi_{1,1} & \varphi_{0,2}\\ -\alpha\varphi_{2,0} & -\alpha\varphi_{1,1} & -\alpha\varphi_{0,2}\end{Vmatrix}\begin{Vmatrix} U_1^2 & U_1U_2 & U_2^2\end{Vmatrix}^{\mathrm{т}},
$$

$$
C(\boldsymbol{U},\boldsymbol{U},\boldsymbol{U}) = \begin{Vmatrix} \varphi_{3,0} & \varphi_{2,1} & \varphi_{1,2} & \varphi_{0,3}\\ -\alpha\varphi_{3,0} & -\alpha\varphi_{2,1} & -\alpha\varphi_{1,2} & -\alpha\varphi_{0,3}\end{Vmatrix}\begin{Vmatrix} U_1^3 & U_1^2U_2 & U_1U_2^2 & U_2^3\end{Vmatrix}^{\mathrm{т}}.
$$

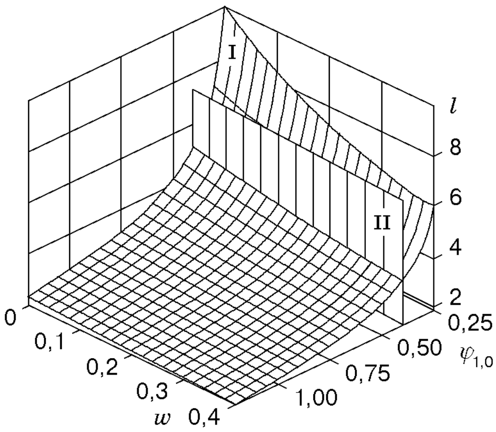
Здесь

$$
\varphi_{i,j} = \frac{1}{i!j!}\exp{(0{,}5wx)}\,\frac{\partial^{i+j}\varphi(0,0)}{\partial U_1^i\partial U_2^j};
$$

α — постоянная; $\|\cdot\|^{\mathrm{т}}$ — транспонированная матрица.

В качестве производящего выберем линейный оператор $A\boldsymbol{U}$. Тогда изучение устойчивости решений системы уравнений (1) связано с решением спектральной задачи $A\boldsymbol{U} = 0$. Собственные значения σ_n ($n = 1, 2, \ldots$) оператора A удовлетворяют квадратным уравнениям [2]

$$
\begin{aligned}
\sigma_n^2 + \sigma_n(2\lambda_n^2 + 0{,}5w^2 + \alpha\varphi_{0,1} + \alpha_1 - \varphi_{1,0}) + \alpha\alpha_1\varphi_{0,1} +\\
+ (\lambda_n^2 + 0{,}25w^2)(\lambda_n^2 + 0{,}25w^2 + \alpha\varphi_{0,1} + \alpha_1 - \varphi_{1,0}) = 0,
\end{aligned} \tag{2}
$$



где λ_n — положительные корни уравнения $\operatorname{tg}(\lambda l) = 2\lambda w^{-1}$, расположенные в порядке возрастания: $\lambda_1 < \lambda_2 < \ldots$.

Коэффициент при старшей степени уравнения (2) равен единице, а остальные коэффициенты являются аналитическими функциями от параметров задачи w, α, α_1, $\varphi_{1,0}$, $\varphi_{0,1}$ (это соответствует расширенным на многопараметрический случай условиям теорем XII.1, XII.2 [5]). Отсюда следует, что в пространстве параметров задачи, рассматриваемых как независимые координаты, граница устойчивости решения линейного уравнения $A\boldsymbol{U} = 0$ является гладкой гиперповерхностью, в каждой точке которой сочетание значений координат обращает в нуль максимальный вещественный корень первого из уравнений (2) или, если корни комплексно-сопряженные, их вещественную часть.

Анализ устойчивости бифуркационного решения системы уравнений (1) при комплексно-сопряженных и действительных корнях характеристического уравнения (2) при $n = 1$ проведен в [1, 2].

Представляет интерес вопрос об устойчивости решений системы (1) в точках гиперповерхности, в которых

$$\varphi_{1,0} - a = 0 \quad (a = 2\lambda_1^2 + 0{,}5w^2 + \alpha\varphi_{0,1} + \alpha_1), \quad \alpha\alpha_1\varphi_{0,1} - (\lambda_1^2 + 0{,}25w^2)^2 = 0 \tag{3}$$

и оба корня первого из уравнений (2) имеют вещественные и мнимые части, равные нулю: $\operatorname{Re}\sigma_{11} = \operatorname{Re}\sigma_{12} = \operatorname{Im}\sigma_{11} = \operatorname{Im}\sigma_{12} = 0$. Решение первого из уравнений (2) с учетом соотношений (3), полученное при фиксированных значениях $\alpha = 1$, $\alpha_1 = 0{,}1$, $\varphi_{0,1} = 0{,}1$, представлено на рисунке в виде зависимости $l(w, \varphi_{1,0})$. Корни уравнения (2) имеют нулевую вещественную часть на поверхности I, нулевую мнимую часть на поверхности II и равны нулю на линии пересечения поверхностей I, II. Поверхность I (за исключением ее линии пересечения с поверхностью II) ограничивает сверху область устойчивых решений уравнения $A\boldsymbol{U} = 0$. Физический смысл результатов расчета состоит в том, что критическая длина реактора l уменьшается с увеличением коэффициента $\varphi_{1,0}$, характеризующего интенсивность тепловыделения в жидкости ($\partial l/\partial\varphi_{1,0} < 0$), и увеличивается с возрастанием скорости потока, определяющей конвективную составляющую переноса тепла через границу области, занимаемой жидкостью ($\partial l/\partial w > 0$).

Пусть $\mu = \operatorname{Re}\sigma_{11} = \operatorname{Re}\sigma_{12} = 0{,}5(\varphi_{1,0} - a)$, и после подстановки $\varphi_{1,0} = 2\mu + a$ в выражение для оператора A запишем его в окрестности точки $\mu = 0$ в виде разложения

$$A = A(\mu) = A(0) + \mu\,\frac{\partial A(0)}{\partial\mu}, \tag{4}$$

где

$$A(0) = \left\| \begin{matrix} \partial^2/\partial x^2 + a - \alpha_1 - 0{,}25w^2 & \varphi_{0,1} \\ -\alpha a & \partial^2/\partial x^2 - \alpha\varphi_{0,1} - 0{,}25w^2 \end{matrix} \right\|, \quad \frac{\partial A(0)}{\partial\mu} = \left\| \begin{matrix} 2 & 0 \\ -2\alpha & 0 \end{matrix} \right\|.$$

Собственное значение $\sigma_1 = 0$ имеет алгебраическую кратность 2 и геометрическую кратность 1, т. е. существует только один собственный вектор

$$\boldsymbol{y}_1 = \left\| \begin{matrix} 1 \\ -\eta\varphi_{0,1}^{-1} \end{matrix} \right\| \sin(\lambda_1 x) \qquad (\eta = \lambda_1^2 + \alpha\varphi_{0,1} + 0{,}25w^2),$$

удовлетворяющий уравнению $(A(0) - \sigma_1 I)\boldsymbol{y}_1 = 0$, которому отвечает только один сопряженный относительно скалярного произведения собственный вектор

$$\boldsymbol{y}_2^* = \left\| \begin{matrix} a\alpha \\ \eta \end{matrix} \right\| \sin(\lambda_1 x),$$

обращающий в нуль оператор $(A^*(0) - \sigma_1 I)$, где I — единичная матрица 2×2;

$$A^* = \left\| \begin{matrix} \partial^2/\partial x^2 + 2\mu + a - \alpha_1 - 0{,}25w^2 & -\alpha(2\mu + a) \\ \varphi_{0,1} & \partial^2/\partial x^2 - \alpha\varphi_{0,1} - 0{,}25w^2 \end{matrix} \right\|.$$

Скалярное произведение вектора $\boldsymbol{y}_1$ и сопряженного вектора $\boldsymbol{y}_2^*$ не может быть нормировано, так как оно равно нулю в силу (3):

$$\langle \boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2^* \rangle = \int_0^l \boldsymbol{y}_1^{\mathrm{T}} \bar{\boldsymbol{y}}_2^* \, dx = (\varphi_{0,1} a\alpha - \eta^2)\varphi_{0,1}^{-1} \int_0^l \sin^2(\lambda_1 x)\, dx =$$

$$= (\varphi_{0,1}\alpha\alpha_1 - (\lambda_1^2 + 0{,}25w^2)^2)\varphi_{0,1}^{-1} \int_0^l \sin^2(\lambda_1 x)\, dx = 0.$$

(Черта означает комплексную сопряженность, но здесь $\bar{\boldsymbol{y}}_2^* = \boldsymbol{y}_2^*$, поскольку $\boldsymbol{y}_2^*$ — вещественный вектор.)

Значение двукратного корня $\sigma_1 = 0$, что не позволяет сделать заключение относительно устойчивости решений задачи (1). В этом случае для анализа устойчивости необходимо использовать нелинейные члены системы уравнений (1) с целью устранения точки вырождения линейной задачи $A(0)\boldsymbol{U} = 0$, определяемой соотношениями (3).

Двигаясь из точки вырождения, будем искать разветвляющиеся собственные значения σ_{11}, σ_{12} при возмущении параметра μ. Следуя [3], считаем, что одно из собственных значений тождественно равно нулю, например $\sigma_{11} \equiv 0$, а другое собственное значение σ_{12}, являющееся гладкой функцией μ [5], определяет устойчивость решения задачи. Ветви σ_{11}, σ_{12} будут непрерывными функциями параметра μ, если двукратному собственному значению соответствует двумерное нуль-пространство оператора $A(0)$, допускающее нормировку.

Для построения нуль-пространства оператора $A(0)$ со скалярным произведением, допускающим нормировку, необходимо использовать понятие обобщенных векторов. В соответствии с [3, 6] векторный базис оператора $A(0)$ определяется следующей жордановой цепочкой уравнений для собственных и обобщенных собственных векторов:

$$A(0)\boldsymbol{y}_1 = 0, \qquad A^*(0)\boldsymbol{y}_2^* = 0, \qquad A(0)\boldsymbol{y}_2 = \boldsymbol{y}_1, \qquad A^*(0)\boldsymbol{y}_1^* = \boldsymbol{y}_2^*. \tag{5}$$

Собственные векторы $\boldsymbol{y}_1$, $\boldsymbol{y}_2^*$ определены, а из двух последних уравнений (5) находим с точностью до постоянных множителей C_1, C_2 обобщенные собственные векторы

$$\boldsymbol{y}_2 = C_1 \left\| \begin{matrix} 0 \\ \varphi_{0,1}^{-1} \end{matrix} \right\| \sin(\lambda_1 x), \qquad \boldsymbol{y}_1^* = C_2 \left\| \begin{matrix} 0 \\ -1 \end{matrix} \right\| \sin(\lambda_1 x).$$

В построенном векторном базисе оператора $A(0)$ справедливы соотношения $\langle \boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2^* \rangle = \langle A(0)\boldsymbol{y}_2, \boldsymbol{y}_2^* \rangle = \langle \boldsymbol{y}_2, A^*(0)\boldsymbol{y}_2^* \rangle = 0$, $\langle \boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_1^* \rangle = \langle A(0)\boldsymbol{y}_2, \boldsymbol{y}_1^* \rangle = \langle \boldsymbol{y}_2, A^*(0)\boldsymbol{y}_1^* \rangle = \langle \boldsymbol{y}_2, \boldsymbol{y}_2^* \rangle$. Полагая $C_1 = C_2 = 2\varphi_{0,1}\lambda_1/[\eta(l\lambda_1 - \sin(\lambda_1 l)\cos(\lambda_1 l))]$, получим условие нормировки $\langle \boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_1^* \rangle = \langle \boldsymbol{y}_2, \boldsymbol{y}_2^* \rangle = 1$.

Решения задачи (1) будем искать в виде рядов по степеням амплитуды

$$\varepsilon = \langle \boldsymbol{U}, \boldsymbol{y}_1^* \rangle, \tag{6}$$

определяемой как проекция вектора $\boldsymbol{U}$ на собственное подпространство, ассоциированное с обобщенным собственным вектором $\boldsymbol{y}_1^*$:

$$\boldsymbol{U}(\varepsilon) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon^n \boldsymbol{U}_n}{n!}, \qquad \mu(\varepsilon) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon^n \mu_n}{n!}. \tag{7}$$

Векторы $\boldsymbol{U}_n = \| U_{1n} \quad U_{2n} \|^{\text{т}}$ и коэффициенты μ_n неизвестны и подлежат определению.

Подстановка рядов (7) в первое уравнение системы (1), в котором оператор A представлен в виде разложения (4), и отождествление совокупностей слагаемых с одинаковой степенью амплитуды ε приводят к системе

$$A(0)\boldsymbol{U}_1 = 0; \tag{8}$$

$$A(0)\boldsymbol{U}_2 + 2\mu_1 \frac{\partial A(0)}{\partial \mu} \boldsymbol{U}_1 + B(\boldsymbol{U}_1, \boldsymbol{U}_1) = 0 \tag{9}$$

и уравнениям при более высоких степенях ε.

Совместное решение уравнений (6), (7) дает $\langle \boldsymbol{U}_1, \boldsymbol{y}_1^* \rangle = 1$, $\langle \boldsymbol{U}_n, \boldsymbol{y}_1^* \rangle = 0$, $n \geqslant 2$. Следовательно, задача на собственные значения (8) имеет единственное решение $\boldsymbol{U}_1 = \boldsymbol{y}_1$.

Уравнение (9) содержит неизвестный параметр μ_1, неизвестный вектор

$$\boldsymbol{U}_2 = \| \; U_{12} \quad U_{22} \; \|^{\text{т}}$$

и известные после решения уравнения (8) векторы

$$\frac{\partial A(0)}{\partial \mu} \boldsymbol{U}_1 = \| \; 2 \quad -2\alpha \; \|^{\text{т}} \sin(\lambda_1 x),$$

$$B(\boldsymbol{U}_1, \boldsymbol{U}_1) = 8 \sin^2(\lambda_1 x) \exp(-0{,}5 w x) \left\| \begin{matrix} \varphi_{2,0}^0 - \eta\varphi_{1,1}^0 + \eta^2 \varphi_{0,2}^0 \\ -\alpha(\varphi_{2,0}^0 - \eta\varphi_{1,1}^0 + \eta^2 \varphi_{0,2}^0) \end{matrix} \right\|,$$

где $\varphi_{i,j}^0 = \varphi_{i,j}(x = 0)$.

Умножив скалярно уравнение (9) на вектор $\boldsymbol{y}_2^*$ и применяя условие ортогональности $\langle A(0)\boldsymbol{U}_2, \boldsymbol{y}_2^* \rangle = 0$, находим параметр

$$\mu_1 = 0{,}5 \langle B(\boldsymbol{U}_1, \boldsymbol{U}_1), \boldsymbol{y}_2^* \rangle \Big\langle \frac{\partial A(0)}{\partial \mu} \boldsymbol{U}_1, \boldsymbol{y}_2^* \Big\rangle^{-1}. \tag{10}$$

Подстановка выражений

$$\langle B(\boldsymbol{U}_1, \boldsymbol{U}_1), \boldsymbol{y}_2^* \rangle = \int_0^l B(\boldsymbol{U}_1, \boldsymbol{U}_1)^{\text{т}} \, \bar{\boldsymbol{y}}_2^* \, dx = 8 C_1 \alpha \Delta (a - \eta) \int_0^l \sin^3(\lambda_1 x) \exp(-0{,}5 w x) \, dx,$$

$$\Big\langle \frac{\partial A(0)}{\partial \mu} \boldsymbol{U}_1, \boldsymbol{y}_2^* \Big\rangle = \int_0^l \Big[\frac{\partial A(0)}{\partial \mu} \boldsymbol{U}_1 \Big]^{\text{т}} \bar{\boldsymbol{y}}_2^* \, dx = 2 C_1 \alpha (a - \eta) \int_0^l \sin^2(\lambda_1 x) \, dx$$

($\Delta = \varphi^0_{2,0} - \eta\varphi^0_{1,1} + \eta^2\varphi^0_{0,2}$) в уравнение (10) дает

$$\mu_1 = 4\Delta \int\limits_0^l \sin^3(\lambda_1 x)\exp(-0{,}5wx)\,dx\left[\int\limits_0^l \sin^2(\lambda_1 x)\,dx\right]^{-1}. \tag{11}$$

Интегралы в правой части (11) выражаются через элементарные функции.

В соответствии с [3] определение устойчивости стационарного бифуркационного решения $A\boldsymbol{U} + B(\boldsymbol{U},\boldsymbol{U}) + C(\boldsymbol{U},\boldsymbol{U},\boldsymbol{U}) = 0$ сводится к анализу спектральной задачи

$$\gamma\tilde{\boldsymbol{U}} = A\tilde{\boldsymbol{U}} + B(\boldsymbol{U}(\varepsilon),\tilde{\boldsymbol{U}}) + C(\boldsymbol{U}(\varepsilon),\boldsymbol{U}(\varepsilon),\tilde{\boldsymbol{U}}) \tag{12}$$

для малых возмущений $\exp(\gamma t)\tilde{\boldsymbol{U}}$ решения $\boldsymbol{U}(\varepsilon)$. После подстановки рядов (7) в (12) находим

$$\gamma\tilde{\boldsymbol{U}} = A(0)\tilde{\boldsymbol{U}} + \varepsilon\Big[\mu_1\,\frac{\partial A(0)}{\partial\mu}\,\tilde{\boldsymbol{U}} + B(\boldsymbol{U}_1,\tilde{\boldsymbol{U}})\Big] + O(\varepsilon^2\tilde{\boldsymbol{U}}). \tag{13}$$

Невозмущенное решение задачи $\tilde{\boldsymbol{U}}$ может быть разложено на часть $\tilde{\boldsymbol{U}}_1$, принадлежащую нуль-пространству оператора $A(0)$, и добавочную малую часть $\tilde{\boldsymbol{U}}_2$ с нулевой проекцией $\langle\tilde{\boldsymbol{U}}_2,\boldsymbol{y}^*_i\rangle = 0$, $i = 1,\,2$.

Часть решения, принадлежащая нуль-пространству оператора $A(0)$, является линейной комбинацией векторов $\boldsymbol{y}_1,\boldsymbol{y}_2$: $\tilde{\boldsymbol{U}}_1 = \theta_1\boldsymbol{y}_1 + \theta_2\boldsymbol{y}_2$, общее решение невозмущенной задачи имеет вид

$$\tilde{\boldsymbol{U}} = \theta_1\boldsymbol{y}_1 + \theta_2\boldsymbol{y}_2 + \tilde{\boldsymbol{U}}_2. \tag{14}$$

Подстановка невозмущенного решения (14) в уравнение (13) дает

$$\gamma\tilde{\boldsymbol{U}}_1 = A(0)\tilde{\boldsymbol{U}}_1 + \varepsilon\Big[\mu_1\,\frac{\partial A(0)}{\partial\mu}\tilde{\boldsymbol{U}}_1 + B(\boldsymbol{y}_1,\tilde{\boldsymbol{U}}_1)\Big] + O(\varepsilon\tilde{\boldsymbol{U}}_2) + O(\varepsilon^2\tilde{\boldsymbol{U}}), \tag{15}$$

где

$$A(0)\tilde{\boldsymbol{U}}_1 = \theta_2\boldsymbol{y}_1; \quad \frac{\partial A(0)}{\partial\mu}\,\tilde{\boldsymbol{U}}_1 = 2\theta_1\sin(\lambda_1 x)\|1 \quad -\alpha\|^{\text{т}};$$

$$B(\boldsymbol{y}_1,\tilde{\boldsymbol{U}}_1) = (2\eta\theta_1 - C_1\theta_2)\varphi^{-1}_{0,1}\varphi^0_{1,1}\sin^2(\lambda_1 x)\exp(-0{,}5wx)\|-1 \quad \alpha\|^{\text{т}}.$$

В [3] доказано, что $O(\varepsilon\tilde{\boldsymbol{U}}_2) = O(\varepsilon^2\tilde{\boldsymbol{U}})$, и, следовательно, два последних слагаемых в (15) имеют одинаковый порядок малости.

Умножив скалярно левую и правую части уравнения (15) на векторы $\boldsymbol{y}^*_1,\boldsymbol{y}^*_2$, получим систему алгебраических уравнений относительно неизвестных постоянных θ_1, θ_2

$$\gamma\langle\tilde{\boldsymbol{U}}_1,\boldsymbol{y}^*_i\rangle = \langle A(0)\tilde{\boldsymbol{U}}_1,\boldsymbol{y}^*_i\rangle + \varepsilon\Big[\mu_1\Big\langle\frac{\partial A(0)}{\partial\mu}\,\tilde{\boldsymbol{U}}_1,\boldsymbol{y}^*_i\Big\rangle + \langle B(\boldsymbol{y}_1,\tilde{\boldsymbol{U}}_1),\boldsymbol{y}^*_i\rangle\Big] + O(\varepsilon^2\tilde{\boldsymbol{U}}), \quad i = 1,\,2. \tag{16}$$

Для решения системы (16) вычислим скалярные произведения

$$\langle\tilde{\boldsymbol{U}}_1,\boldsymbol{y}^*_1\rangle = \theta_1, \quad \langle\tilde{\boldsymbol{U}}_1,\boldsymbol{y}^*_2\rangle = \theta_2, \quad \langle A(0)\tilde{\boldsymbol{U}}_1,\boldsymbol{y}^*_1\rangle = \theta_2, \quad \langle A(0)\tilde{\boldsymbol{U}}_1,\boldsymbol{y}^*_2\rangle = 0,$$

$$\Big\langle\frac{\partial A(0)}{\partial\mu}\,\tilde{\boldsymbol{U}}_1,\boldsymbol{y}^*_1\Big\rangle = 2C_2\alpha\theta_1\int\limits_0^l \sin^2(\lambda_1 x)\,dx,$$

$$\Big\langle\frac{\partial A(0)}{\partial\mu}\,\tilde{\boldsymbol{U}}_1,\boldsymbol{y}^*_2\Big\rangle = 2\alpha(\alpha - \eta)\theta_1\int\limits_0^l \sin^2(\lambda_1 x)\,dx,$$

$$\langle B(\boldsymbol{y}_1, \tilde{\boldsymbol{U}}_1), \boldsymbol{y}_1^* \rangle = \alpha C_2 (C_1\theta_2 - 2\eta\theta_1)\varphi_{0,1}^{-1}\varphi_{1,1}^0 \int\limits_0^l \sin^3(\lambda_1 x)\exp(-0{,}5wx)\,dx,$$

$$\langle B(\boldsymbol{y}_1, \tilde{\boldsymbol{U}}_1), \boldsymbol{y}_2^* \rangle = \alpha(a-\eta)(C_1\theta_2 - 2\eta\theta_1)\varphi_{0,1}^{-1}\varphi_{1,1}^0 \int\limits_0^l \sin^3(\lambda_1 x)\exp(-0{,}5wx)\,dx$$

и определим коэффициенты

$$e_1 = 2C_2\alpha\mu_1 \int\limits_0^l \sin^2(\lambda_1 x)\,dx - 2C_2\alpha\eta\varphi_{0,1}^{-1}\varphi_{1,1}^0 \int\limits_0^l \sin^3(\lambda_1 x)\exp(-0{,}5wx)\,dx,$$

$$e_2 = C_1C_2\alpha\varphi_{0,1}^{-1}\varphi_{1,1}^0 \int\limits_0^l \sin^3(\lambda_1 x)\exp(-0{,}5wx)\,dx,$$

$$e_3 = 2\alpha(a-\eta)\mu_1 \int\limits_0^l \sin^2(\lambda_1 x)\,dx - 2\alpha(a-\eta)\eta\varphi_{0,1}^{-1}\varphi_{1,1}^0 \int\limits_0^l \sin^3(\lambda_1 x)\exp(-0{,}5wx)\,dx,$$

$$e_4 = C_1\alpha(a-\eta)\varphi_{0,1}^{-1}\varphi_{1,1}^0 \int\limits_0^l \sin^3(\lambda_1 x)\exp(-0{,}5wx)\,dx.$$

Тогда система (16) приобретает вид

$$\gamma\theta_1 = e_1\varepsilon\theta_1 + (1 + e_2\varepsilon)\theta_2 + O(\varepsilon^2), \quad \gamma\theta_2 = e_3\varepsilon\theta_1 + e_4\varepsilon\theta_2 + O(\varepsilon^2). \tag{17}$$

Система уравнений (17) имеет нетривиальное решение относительно θ_1, θ_2, если

$$\det \left\| \begin{matrix} e_1\varepsilon - \gamma + O(\varepsilon^2) & 1 + e_2\varepsilon + O(\varepsilon^2) \\ e_3\varepsilon + O(\varepsilon^2) & e_4\varepsilon - \gamma + O(\varepsilon^2) \end{matrix} \right\| = 0. \tag{18}$$

Очевидно, что γ является собственным значением матрицы

$$\left| \begin{matrix} e_1\varepsilon + O(\varepsilon^2) & 1 + e_2\varepsilon + O(\varepsilon^2) \\ e_3\varepsilon + O(\varepsilon^2) & e_4\varepsilon + O(\varepsilon^2) \end{matrix} \right| = 0.$$

Учитывая, что $\sqrt{e_3\varepsilon + O(\varepsilon^2)} = \sqrt{e_3\varepsilon} + O(\varepsilon^{3/2})$, находим корни квадратного уравнения (18)

$$\gamma_{1,2} = \pm\sqrt{e_3\varepsilon} + 0{,}5(e_1 + e_4)\varepsilon + O(\varepsilon^{3/2}). \tag{19}$$

Выражение для собственных значений (19) соответствует (с точностью до обозначений) формуле, полученной в рамках общей теории [3]. Если вещественные части корней γ_1, γ_2 имеют одинаковые знаки, то бифуркационное решение устойчиво по одну сторону от критической точки и неустойчиво по другую; при противоположных знаках вещественных частей γ_1, γ_2 решение будет неустойчивым по обе стороны от критического значения. Наконец, если корни уравнения (19) равны нулю, то вопрос устойчивости решается включением в рассмотрение членов более высокого порядка $C(\boldsymbol{U}, \boldsymbol{U}, \boldsymbol{U})$ уравнения (1).

Как указано выше, для определения устойчивости решения бифуркационной задачи (1) при значениях параметров, соответствующих линии пересечения поверхностей I, II (см. рисунок), необходимо рассмотреть влияние нелинейных членов. Пусть коэффициенты при нелинейных членах равны $\varphi_{2,0} = 0{,}2$, $\varphi_{1,1} = 0{,}2$, $\varphi_{0,2} = 0$. Определим корни уравнения (19) для произвольной точки линии пересечения поверхностей I, II, например точки $\varphi_{1,0} = 0{,}4$, $w = 0{,}25$. В результате расчетов получаем

$$\lambda_1 = 0{,}29, \quad a = 0{,}4, \quad \eta = 0{,}2, \quad l = 4{,}009, \quad \boldsymbol{y}_1 = \|1 \quad -2\|^{\text{т}} \sin(0{,}29x),$$
$$\boldsymbol{y}_1^* = \|0 \quad -1\|^{\text{т}} \sin(0{,}29x), \qquad \boldsymbol{y}_2 = \|0 \quad 10\|^{\text{т}} \sin(0{,}29x),$$
$$\boldsymbol{y}_2^* = \|0{,}4 \quad 0{,}2\|^{\text{т}} \sin(0{,}29x), \quad C_1 = C_2 = 0{,}317, \quad e_1 = 0{,}119, \quad e_2 = 0{,}18,$$
$$e_3 = 0{,}065, \qquad e_4 = 0{,}1, \qquad \gamma_1 = 0{,}364, \qquad \gamma_2 = -0{,}146.$$

Отсюда следует, что один из вещественных корней γ_1, γ_2 будет положительным при любом знаке μ и бифуркационное решение в выбранной точке неустойчиво по обе стороны от критического значения.

Заметим, что при наличии в правой части дифференциального уравнения (1) дефекта $\boldsymbol{\Phi}(0,0) \neq 0$ бифуркационное решение расщепляется на изолированные. Общий метод [3] решения задач при возмущениях, обусловленных дефектом, не зависит от способа построения нуль-пространства производящего оператора, поэтому процедура нахождения изолированных решений при $\langle \boldsymbol{\Phi}(0,0), \boldsymbol{y}_i \rangle \neq 0$ $(i = 1,\ 2)$ такая же, как в случае производящего оператора простой структуры [1].

ЛИТЕРАТУРА

1. **Боднарь Т. А.** Тепловая устойчивость тангенциального потока жидкости в кольцевом канале // ПМТФ. 1991. № 4. С. 127–133.
2. **Боднарь Т. А.** Устойчивость политропического химического реактора // ПМТФ. 1996. Т. 37, № 5. С. 127–134.
3. **Йосс Ж., Джозеф Д.** Элементарная теория устойчивости и бифуркаций. М.: Мир, 1983.
4. **Кафаров В. В.** Методы кибернетики в химии и химической технологии. М.: Химия, 1976.
5. **Рид М., Саймон Б.** Методы современной математической физики. Т. 4. Анализ операторов. М.: Мир, 1982.
6. **Гантмахер Ф. Р.** Теория матриц. М.: Наука, 1988.

Поступила в редакцию 6/VI 1998 г.,
в окончательном варианте — 23/IV 1999 г.