УДК 517.956.3:62-621.2

# Выбор уравнения состояния в математических моделях трубопроводного транспорта природного газа

Э.А. Бондарев[1], А.Ф. Воеводин[2], К.К. Аргунова[1], И.И. Рожин[1]

[1]Институт проблем нефти и газа Сибирского отделения Российской академии наук, ул. Октябрьская, 1, Якутск, 677980

[2]Институт гидродинамики им. М.А. Лаврентьева Сибирского отделения Российской академии наук, просп. Акад. М.А. Лаврентьева, 15, Новосибирск, 630090

E-mails: bondarev@ipng.ysn.ru (Бондарев Э.А.), voevodin@hydro.nsc.ru (Воеводин А.Ф.), akk@ipng.ysn.ru (Аргунова К.К.), rozhin@ipng.ysn.ru (Рожин И.И.)

**Бондарев Э.А., Воеводин А.Ф., Аргунова К.К., Рожин И.И.** Выбор уравнения состояния в математических моделях трубопроводного транспорта природного газа // Сиб. журн. вычисл. математики / РАН. Сиб. отд-ние. — Новосибирск, 2017. — Т. 20, № 3. — С. 239–249.

Путем сравнения с достоверными экспериментальными данными в широком диапазоне давления и температуры показано, что уравнение состояния реального газа Редлиха–Квонга адекватно отражает все особенности поведения коэффициента несовершенства, коэффициента дросселирования и приведенной разности изобарной и изохорной теплоемкостей. Установлено, что это уравнение удовлетворяет ограничениям, необходимым для гиперболичности системы уравнений, описывающих течение реального газа в трубах.

**DOI:** 10.15372/SJNM20170302

**Ключевые слова:** *уравнение состояния, природный газ, гиперболические уравнения.*

**Bondarev E.A.,Voevodin A.F., Argunova K.K., Rozhin I.I.** The choice of the equation of state in mathematical models of pipeline transportation of natural gas // Siberian J. Num. Math. / Sib. Branch of Russ. Acad. of Sci. — Novosibirsk, 2017. — Vol. 20, № 3. — P. 239–249.

By comparison with reliable experimental data in a wide range of pressure and temperature, it has been shown that the Redlich–Kwong equation of state appropriately reflects all the characteristics of the coefficient of compressibility, the throttling factor and the normalized difference of specific isobaric and isochoric heat capacities. It has been found that this equation corresponds to the inequalities required to ensure a set of equations of gas flow in pipelines to be hyperbolic.

**Keywords:** *equation of state, natural gas, hyperbolic equations.*

## 1. Введение

Системы трубопроводного транспорта природного газа (магистральные газопроводы) являются существенной отраслью экономики России, от эффективности работы которой во многом зависит энергетическая безопасность страны. При проектировании таких систем до настоящего времени используются упрощенные математические модели течения газа в трубах, основанные на использовании уравнения Дарси–Вейсбаха для расчета гидравлических характеристик потока и различных модификаций формулы Шухова для вычисления температуры [1, 2]. И это несмотря на то, что даже в учебной литературе [3] излагается современный подход к выводу основных уравнений течения газа в трубах и методу характеристик для их решения.

Уравнения математической модели изучаемого процесса были выведены из фундаментальных законов сохранения массы, количества движения и энергии еще в 1961 г. [4], а затем обобщены на случай трубы переменного сечения в 1968 г. [5]. Обзор последующих публикаций по этой проблеме, в которых основное внимание уделялось разработке адекватных численных методов, пригодных для решения широкого круга задач, включая заполнение газопровода или его внезапное перекрытие, обнаружение утечки газа при образовании магистральной трещины трубы, содержится в монографиях [6–8]. В них читатель найдет и наиболее употребительные уравнения состояния природных газов, которые используются для замыкания математической модели течения реального газа в трубах. Цель настоящей статьи — показать, что критерием выбора таких уравнений должно быть не только их соответствие экспериментальным данным, но и определенным требованиям термодинамики и теории гиперболических уравнений.

## 2. Постановка задачи

Предложенная в [4, 5] математическая модель представляет собой систему гиперболических уравнений, аналогичных одномерным уравнениям газовой динамики с дополнительными слагаемыми в правой части:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho v) = 0, \tag{1}$$

$$\frac{\partial(\rho v)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\left(p + \rho v^2\right) = -\rho\left(\mathrm{g}y' + \frac{\lambda v|v|}{2D}\right), \tag{2}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho E) + \frac{\partial}{\partial x}\left(\rho v\left(E + \frac{p}{\rho}\right)\right) = \frac{4q}{D} - \rho v \mathrm{g} y', \tag{3}$$

где $\rho$ — плотность газа; $D$ — диаметр трубы; $E = u + v^2/2$ — полная энергия единицы массы, равная сумме внутренней энергии $u$ и кинетической энергии; $\mathrm{g}$ — ускорение силы тяжести; $y$ — ордината оси $x$, отсчитываемая от горизонтальной плоскости, а штрих означает дифференцирование по $x$; $p$ — давление газа; $q$ — удельный тепловой поток; $t$ — время; $v$ — скорость течения газа; $\lambda$ — коэффициент гидравлического сопротивления.

Последнее слагаемое в уравнении (2) содержит феноменологическое соотношение Дарси–Вейсбаха, определяющее связь между касательными напряжениями трения на стенке трубы и скоростью стационарного течения газа. Это соотношение можно также вывести методами теории подобия. В нем коэффициент гидравлического сопротивления $\lambda$ в общем случае зависит от диаметра, относительной шероховатости стенок трубы и числа Рейнольдса. Возможность использования этой зависимости в случае неустановившегося движения (гипотеза квазистационарности) подробно обсуждается в приложении V монографии И.А. Чарного [9]. Неубывание энтропии при такой форме записи правой части уравнения (2) подтверждается видом уравнения (68) в монографии [10]. Аналогичное соотношение, определяющее теплопередачу от газа, текущего в трубе, к внешней среде с известной температурой $T_{\mathrm{e}}$, обычно задается в виде закона Ньютона:

$$q = \alpha\left(T_{\mathrm{e}} - T\right),$$

где $T$ — температура газа; $\alpha$ — суммарный коэффициент теплопередачи.

## 3. Основные результаты и их обсуждение

Для однозначного определения решения системы (1)–(3), кроме соответствующих граничных и начальных условий, необходимо привлечь еще два соотношения, связывающие параметры потока. Из термодинамики известно, что из четырех термодинамических величин $p$, $\rho$, $T$, $u$ только две независимые [11]. Действительно, согласно теореме об универсальном интегрирующем множителе, выражение $[du + p\,dV]/T$ (где $V = 1/\rho$ — удельный объем) является полным дифференциалом удельной энтропии $s$:

$$Tds = du + p\,dV, \tag{4}$$

а из условия равенства смешанных производных функции получаем известное соотношение [12]:

$$\left(\frac{\partial i}{\partial p}\right)_T = V - T\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p, \tag{5}$$

где $i$ — удельная энтальпия.

Таким образом, чтобы замкнуть систему дифференциальных уравнений, достаточно одного заданного термодинамического потенциала $u = u\,(V, s)$. Однако в практических задачах связь термодинамических величин для реальных газов обычно задается в виде двух уравнений состояния: термического, связывающего переменные $p$, $V$ и $T$, и калорического, связывающего внутреннюю энергию $u$ с $p$ и $V$ или энтальпию $i$ с $p$ и $T$.

Для природных газов, с которыми приходится встречаться в большинстве задач добычи и транспорта, термическое уравнение состояния принято писать в виде

$$pV = zRT, \tag{6}$$

где $R$ — газовая постоянная, зависящая от компонентного состава природного газа, а $z$ — так называемый коэффициент несовершенства газа, определяемый обычно экспериментально в зависимости от отношения давления и температуры к их критическим значениям $p_c$ и $T_c$, также зависящим от компонентного состава природного газа.

Из соотношения (4) следует, что термическое и калорическое уравнения состояния не являются независимыми: при известном термическом для определения калорического уравнения состояния достаточно задания изохорной и изобарной теплоемкостей

$$\left(\frac{\partial u}{\partial T}\right)_V = c_V, \quad \left(\frac{\partial i}{\partial T}\right)_p = c_p$$

как функций $p$ и $T$, которые, как правило, считаются положительными и, кроме того, $c_p > c_V$.

Ограничимся рассмотрением физически однородных газов, уравнения состояния которых удовлетворяют условиям термодинамического равновесия. Тогда в случае задания уравнения состояния в виде потенциала $u = u\,(V, s)$ условия устойчивости термодинамического равновесия формулируются так [12, 13]: матрица

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 u}{\partial V^2} & \dfrac{\partial^2 u}{\partial V \partial s} \\ \dfrac{\partial^2 u}{\partial s\,\partial V} & \dfrac{\partial^2 u}{\partial s^2} \end{pmatrix}$$

является положительно определенной, т. е. вторые производные функции $u = u\,(V, s)$

удовлетворяют следующим условиям:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial V^2} > 0, \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial V^2}\frac{\partial^2 u}{\partial s^2} - \left(\frac{\partial^2 u}{\partial s\,\partial V}\right)^2 > 0, \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial s^2} > 0.$$

Так как $T = \left(\frac{\partial u}{\partial s}\right)_V$ и $p = -\left(\frac{\partial u}{\partial V}\right)_s$, то указанные условия можно привести к виду:

$$\left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_s < 0, \tag{7}$$

$$\left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_s \left(\frac{\partial T}{\partial s}\right)_V + \left(\frac{\partial p}{\partial s}\right)_V \left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_s < 0, \tag{8}$$

$$\left(\frac{\partial T}{\partial s}\right)_V > 0. \tag{9}$$

Эти условия играют важную роль в математической теории уравнений газовой динамики: они обеспечивают их гиперболичность и, следовательно, возможность корректной постановки задачи Коши [13, 14]. Однако они оказываются недостаточными для единственности разрывных решений задачи Коши, и на уравнения состояния необходимо наложить следующие дополнительные ограничения, не вытекающие непосредственно из требований термодинамики, но необходимые для устойчивости ударной волны [14]:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial V \partial s} = \left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_s < 0, \tag{10}$$

$$\left(\frac{\partial^3 u}{\partial V^3}\right)_s = \left(\frac{\partial^2 p}{\partial V^2}\right)_s > 0. \tag{11}$$

Поскольку уравнение состояния реальных газов обычно задается в виде (6), рассмотрим ограничения, которым должна удовлетворять функция $z > 0$ для выполнения условий (7)–(11).

С учетом (5) уравнение (4) можно привести к виду

$$T ds = c_p\, dT - T\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p dp. \tag{12}$$

Кроме того, имеем

$$dV = \left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_T dp + \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p dT. \tag{13}$$

Исключая из (12) с помощью (13) сначала $dT$, а затем $dp$, получаем

$$T\,ds = c_p\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p^{-1} dV - c_V\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p^{-1}\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_T dp, \tag{14}$$

$$T\,ds = c_V\, dT - T\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_T^{-1} dV. \tag{15}$$

При этом использовано известное в термодинамике соотношение

$$c_p - c_V = T\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p. \tag{16}$$

Из (14) и (15) получаем

$$\left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_s = \left(\frac{c_p}{c_V}\right)\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_T^{-1}, \tag{17}$$

$$\left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_s = \frac{T}{c_V}\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p \left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_T^{-1}, \tag{18}$$

$$\left(\frac{\partial T}{\partial s}\right)_V = \frac{T}{c_V}. \tag{19}$$

Считая теплоемкости реальных газов положительными, из (17) имеем, что для выполнения условия (7) необходимо и достаточно, чтобы

$$\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_T = \frac{V}{zp}\left(p\frac{\partial z}{\partial p} - z\right) < 0,$$

то есть

$$z_1 = z - p\,\frac{\partial z}{\partial p} > 0. \tag{20}$$

Учитывая равенства (16)–(19), условие (8) можно привести к виду

$$\frac{T}{c_V}\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_T^{-1} < 0,$$

откуда следует, что условия (7)–(9) выполняются для всех реальных газов с уравнением состояния (6) при $z_1 > 0$.

Из условия (10) на основании (18) получим

$$\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p = \frac{V}{zT}\left(z + T\frac{\partial z}{\partial T}\right) > 0,$$

то есть

$$z_2 = z + T\frac{\partial z}{\partial T} > 0. \tag{21}$$

Таким образом, для выполнения условий (7)–(10) необходимо и достаточно наложить следующие требования на функцию $z\,(p,T)$:

$$\frac{\partial}{\partial p}\left(\frac{z}{p}\right) < 0, \tag{22}$$

$$\frac{\partial}{\partial T}\,(zT) > 0. \tag{23}$$

Неравенство (22) позволяет ввести важный в дальнейшем физический параметр — скорость звука [13]:

$$c^2 = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_s = kRT\left(\frac{z^2}{z_1}\right) > 0,$$

где показатель адиабаты $k > 1$.

Проверку ограничений (22) и (23), накладываемых на коэффициент несовершенства реального газа, выполним на примере уравнения Редлиха–Квонга [15]:

$$p = \frac{RT}{V-b} - \frac{a}{\sqrt{T}\,V(V+b)}, \tag{24}$$

где коэффициенты $a$ и $b$ могут быть определены по критическим значениям давления $p_\text{c}$ и температуры $T_\text{c}$ следующим образом:

$$a = m_1\frac{R^2T_\text{c}^{2.5}}{p_\text{c}}, \qquad b = m_2\frac{RT_\text{c}}{p_\text{c}}, \qquad m_1 = 0.42748, \qquad m_2 = 0.08664.$$

Это уравнение выбрано по следующим причинам: 1) авторы монографии [15] считают его “наиболее удачным двухпараметрическим уравнением состояния”; 2) оно наиболее часто используется при расчетах поведения газовых смесей [16], в том числе при расчетах условий термодинамического равновесия газовых гидратов [17].

Подставляя в уравнение (24) уравнение (6), получим следующее кубическое уравнение для коэффициента несовершенства:

$$z^3 - z^2 + \big(A - B\,(B-1)\big)z - AB = 0, \tag{25}$$

где $A = m_1\frac{p_\text{r}}{T_\text{r}^{2.5}}$, $B = m_2\frac{p_\text{r}}{T_\text{r}}$, $T_\text{r}$ и $p_\text{r}$ — приведенные, т. е. отнесенные к своим критическим значениям, температура и давление.

Первый вывод подтверждается результатами сравнения решения уравнения (25) с данными базы [18], составленной Национальным институтом стандартов и технологий США. Сравнение в диапазоне изменения приведенного давления $0.5 \div 10.5$ и приведенной температуры $1.0 \div 1.8$ велось не только по коэффициенту несовершенства газа, но и по коэффициенту дросселирования [15]:

$$\varepsilon = \frac{RT^2}{c_p p}\frac{\partial z}{\partial T},$$

и по нормированной разности удельных теплоемкостей [15]:

$$\frac{c_p - c_V}{R} = \frac{\left(z + T\dfrac{\partial z}{\partial T}\right)^2}{z - p\,\dfrac{\partial z}{\partial p}}.$$

В указанном диапазоне изменения давления и температуры для метана с параметрами $p_\text{c} = 4.5992$ МПа, $T_\text{c} = 190.564$ К [18] уравнение (25) имеет один действительный корень, являющийся функцией приведенных давления и температуры.

Результаты тестирования, представленные на рисунках 1–3, свидетельствуют о достаточном для практических расчетов соответствии уравнения Редлиха–Квонга опытным данным. На этих рисунках видно, что оно правильно отражает особенности поведения коэффициента несовершенства газа (рис. 1), коэффициента дросселирования (рис. 2) и приведенной разности теплоемкостей газа (рис. 3), при этом вычисленные значения для первых двух характеристик несколько выше, а для третьей — несколько ниже, базовых данных (сравни поверхности 1 (расчет) и 2 (данные) на этих рисунках).

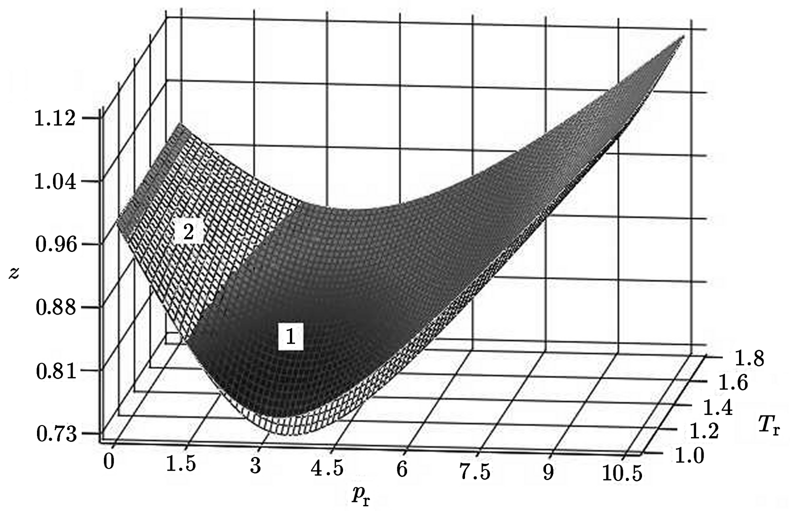


**Рис. 1.** Зависимость коэффициента несовершенства газа от приведенных давления и температуры (1 — уравнение Редлиха–Квонга, 2 — база данных [18])

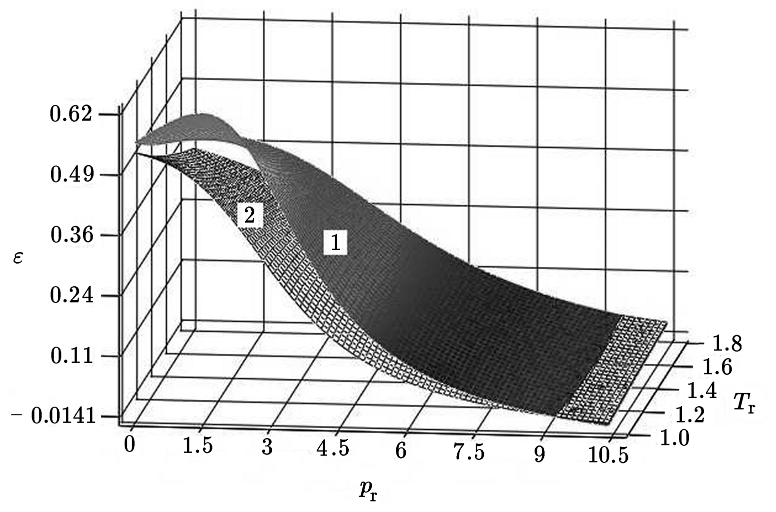


**Рис. 2.** Зависимость коэффициента дросселирования от приведенных давления и температуры (1 — уравнение Редлиха–Квонга, 2 — база данных [18])

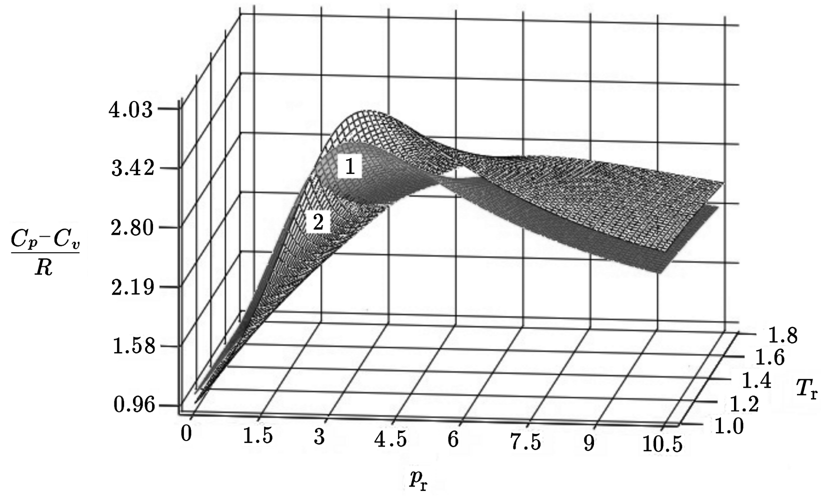


**Рис. 3.** Зависимость нормированной разности теплоемкостей от приведенных давления и температуры (1 — уравнение Редлиха–Квонга, 2 — база данных [18])

Последующее тестирование на ограничения (22) и (23), накладываемые на уравнение состояния природного газа для выполнения требований гиперболичности уравнений газовой динамики (1)–(3), показало, что уравнение Редлиха–Квонга можно использовать для замыкания этой системы и, следовательно, для описания процессов добычи и транспорта природного газа (рис. 4 и рис. 5). Однако следует отметить немонотонную зависимость функций $z_1$ из (20) и $z_2$ из (21) от давления в окрестности плоскости $T_r = 1$, $p_r = 1$. Как уже было отмечено относительно использования уравнения Ван-дер-Ваальса [14], здесь такое поведение указанных функций отражает неустойчивость термодинамического равновесия газа вблизи критической точки.

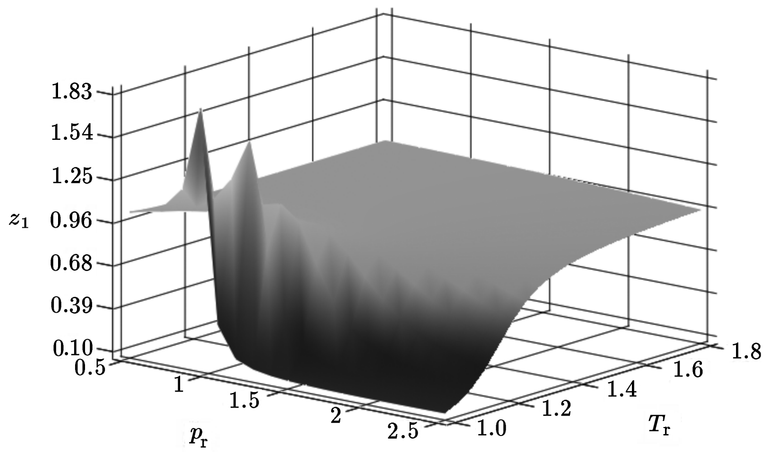


**Рис. 4.** Зависимость функции $z_1$ от приведенных давления и температуры

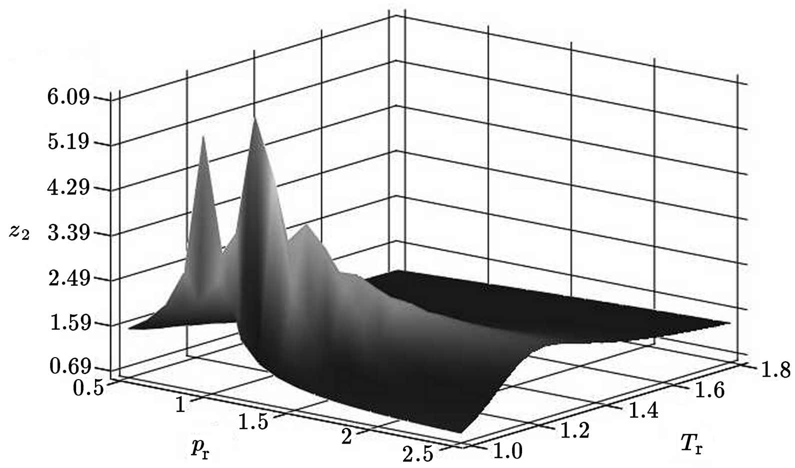


**Рис. 5.** Зависимость функции $z_2$ от приведенных давления и температуры

## 4. Заключение

Математической моделью течения природного газа в современных магистральных газопроводах с рабочим давлением 10 МПа является система дифференциальных уравнений в частных производных гиперболического типа, отличающаяся от одномерных уравнений газовой динамики только видом правых частей. Следовательно, для замыкания этих уравнений кроме феноменологических соотношений, описывающих вязкое трение и теплообмен с окружающей средой, следует использовать уравнения состояния газа, отвечающие не только правилам термодинамики, но и требованиям устойчивости разрывных решений. В статье показано, что уравнение Редлиха–Квонга, широко используемое для расчетов поведения газонефтяных смесей, соответствует и математическим требованиям однозначности разрывных решений задачи Коши для уравнений газовой динамики.

## Литература

1. **Shashi Menon E.** Gas Pipeline Hydraulic. — Boca Ranton, London, New York, Singapore: Taylor&Francis Group, CRS Press, 2005.

2. **Бобровский С.А., Щербаков С.Г., Яковлев Е.И.** Трубопроводный транспорт газа. — М.: Наука, 1976.

3. **Лурье М.А.** Математическое моделирование процессов трубопроводного транспорта нефти, нефтепродуктов и газа. — М.: Изд-во РГУ нефти и газа им. И.М. Губкина, 2003.

4. **Чарный И.А.** Основы газовой динамики. — М.: Гостоптехиздат, 1961.

5. **Васильев О.Ф., Воеводин А.Ф.** О газотермодинамическом расчете потоков в простых и сложных трубопроводах (постановка задачи) // Известия СО АН СССР. Сер. технических наук. — 1968. — Вып. 13. — С. 53–62.

6. Неизотермическое течение газа в трубах / О.Ф. Васильев, Э.А. Бондарев, А.Ф. Воеводин, М.А. Каниболотский. — Новосибирск: Наука, 1978.

7. Термогидродинамика систем добычи и транспорта газа / Э.А. Бондарев, В.И. Васильев, А.Ф. Воеводин и др. — Новосибирск: Наука, 1988.

8. **Бондарев Э.А., Воеводин А.Ф., Никифоровская В.С.** Методы идентификации математических моделей гидравлики. — Якутск: Издательский дом СВФУ, 2014.
9. **Чарный И.А.** Неустановившиеся движения реальной жидкости в трубах. — М.: Недра, 1975.
10. **Воеводин А.Ф., Шугрин С.М.** Методы решения одномерных эволюционных систем. — Новосибирск: Наука, 1993.
11. **Вукалович М.П., Новиков И.И.** Уравнение состояния реального газа. — М.–Л.: Госэнергоиздат, 1948.
12. **Вулис Л.А.** Термодинамика газовых потоков. — М.–Л.: Госэнергоиздат, 1950.
13. **Годунов С.К.** Термодинамика газов и дифференциальные уравнения // УМН. — 1959. — Т. 14, вып. 5(89). — С. 97–116.
14. **Рождественский Б.Л., Яненко Н.Н.** Системы квазилинейных уравнений и их приложения к газовой динамике. — М.: Наука, 1988.
15. **Рид Р., Праусниц Дж., Шервуд Т.** Свойства газов и жидкостей. Справочное пособие / Пер. с англ. под ред. Б.И. Соколова. 3-е изд., перераб. и доп. — Л.: Химия, 1982.
16. **Брусиловский А.И.** Фазовые превращения при разработке месторождений нефти и газа. — М.: Грааль, 2002.
17. **Sloan E.D., Koh C.A.** Clathrate Hydrates of Natural Gases. Third ed. — Boca Raton, London, New York, Singapore: Taylor&Francis Group, CRS Press, 2008.
18. NIST Chemistry WebBook. — http://webbook.nist.gov/chemistry.

*Поступила в редакцию 20 декабря 2016 г.,*
*в окончательном варианте 2 марта 2017 г.*

## Литература в транслитерации

1. **Shashi Menon E.** Gas Pipeline Hydraulic. — Boca Ranton, London, New York, Singapore: Taylor&Francis Group, CRS Press, 2005.
2. **Bobrovskiy S.A., Shcherbakov S.G., Yakovlev E.I.** Truboprovodnyy transport gaza. — M.: Nauka, 1976.
3. **Lur'e M.A.** Matematicheskoe modelirovanie protsessov truboprovodnogo transporta nefti, nefteproduktov i gaza. — M.: Izd-vo RGU nefti i gaza im. I.M. Gubkina, 2003.
4. **Charnyy I.A.** Osnovy gazovoy dinamiki. — M.: Gostoptekhizdat, 1961.
5. **Vasil'ev O.F., Voevodin A.F.** O gazotermodinamicheskom raschete potokov v prostyh i slozhnyh truboprovodah (postanovka zadachi) // Izvestiya SO AN SSSR. Ser. tekhnicheskih nauk. — 1968. — Vyp. 13. — S. 53–62.
6. Neizotermicheskoe techenie gaza v trubah / O.F. Vasil'ev, E.A. Bondarev, A.F. Voevodin, M.A. Kanibolotskiy. — Novosibirsk: Nauka, 1978.
7. Termogidrodinamika sistem dobychi i transporta gaza / E.A. Bondarev, V.I. Vasil'ev, A.F. Voevodin i dr. — Novosibirsk: Nauka, 1988.
8. **Bondarev E.A., Voevodin A.F., Nikiforovskaya V.S.** Metody identifikatsii matematicheskih modeley gidravliki. — Yakutsk: Izdatel'skiy dom SVFU, 2014.
9. **Charnyy I.A.** Neustanovivshiesya dvizheniya real'noy zhidkosti v trubah. — M.: Nedra, 1975.
10. **Voevodin A.F., Shugrin S.M.** Metody resheniya odnomernyh evolyutsionnyh sistem. — Novosibirsk: Nauka, 1993.
11. **Vukalovich M.P., Novikov I.I.** Uravnenie sostoyaniya real'nogo gaza. — M.–L.: Gosenergoizdat, 1948.

12. **Vulis L.A.** Termodinamika gazovyh potokov. — M.–L.: Gosenergoizdat, 1950.
13. **Godunov S.K.** Termodinamika gazov i differentsial'nye uravneniya // UMN. — 1959. — T. 14, vyp. 5(89). — S. 97–116.
14. **Rozhdestvenskiy B.L., Yanenko N.N.** Sistemy kvazilineynyh uravneniy i ih prilozheniya k gazovoy dinamike. — M.: Nauka, 1988.
15. **Rid R., Prausnits Dzh., Shervud T.** Svoystva gazov i zhidkostey. Spravochnoe posobie / Per. s angl. pod red. B.I. Sokolova. 3-e izd., pererab. i dop. — L.: Himiya, 1982.
16. **Brusilovskiy A.I.** Fazovye prevrashcheniya pri razrabotke mestorozhdeniy nefti i gaza. — M.: Graal', 2002.
17. **Sloan E.D., Koh C.A.** Clathrate Hydrates of Natural Gases. Third ed. — Boca Raton, London, New York, Singapore: Taylor&Francis Group, CRS Press, 2008.
18. NIST Chemistry WebBook. — http://webbook.nist.gov/chemistry.