

УДК 519.633

Восстановление коэффициента диффузии, зависящего от времени, по нелокальным данным*

С.И. Кабанихин^{1,2,3}, М.А. Шишленин^{1,2,3}

¹Институт вычислительной математики и математической геофизики Сибирского отделения Российской академии наук, просп. Акад. М.А. Лаврентьева, 6, Новосибирск, 630090

²Институт математики им. С.Л. Соболева Сибирского отделения Российской академии наук, просп. Акад. В.А. Коптюга, 4, Новосибирск, 630090

³Новосибирский национальный исследовательский государственный университет (НГУ), ул. Пирогова, 2, Новосибирск, 630090

E-mails: kabanikhin@sscc.ru (Кабанихин С.И.), mshishlenin@ngs.ru (Шишленин М.А.)

Кабанихин С.И., Шишленин М.А. Восстановление коэффициента диффузии, зависящего от времени, по нелокальным данным // Сиб. журн. вычисл. математики / РАН. Сиб. отд-ние. — Новосибирск, 2018. — Т. 21, № 1. — С. 55–63.

Исследована обратная задача определения старшего коэффициента, зависящего от времени, по нелокальной дополнительной информации. Для приближенного решения нелинейной обратной задачи построен градиентный метод минимизации целевого функционала. Проведено сравнение с методом, основанным на линеаризованной схеме аппроксимации по времени. Приведены результаты численных расчетов.

DOI: 10.15372/SJNM20180104

Ключевые слова: параболическое уравнение, коэффициентная обратная задача, численные методы, нелокальное условие.

Kabanikhin S.I., Shishlenin M.A. Recovery of the time-dependent diffusion coefficient by known non-local data // Siberian J. Num. Math. / Sib. Branch of Russ. Acad. of Sci.—Novosibirsk, 2018. — Vol. 21, № 1. — P. 55–63.

The inverse problem of recovering the leading time-dependent coefficient by the known non-local additional information is investigated. For an approximate solution of the nonlinear inverse problems we propose the gradient method of minimizing the target functional. The comparative analysis with the method based on the linearized approximation scheme with respect to time is made. The results of the numerical calculations are presented.

Keywords: parabolic equation, time-dependent coefficient inverse problem, numerical methods, nonlocal condition.

1. Введение

Исследована обратная задача определения старшего коэффициента, зависящего от времени, по нелокальной дополнительной информации. Дополнительной информацией относительно решения прямой задачи может быть значение в какой либо точке [1] или на границе области [16]. В некоторых случаях дополнительное условие задается в виде интеграла по области (нелокальное условие) [1]. Обратные задачи с нелокальными условиями возникают в теплопереносе, термоэластичности, химической кинетике, медицине [3–5, 7, 9, 10, 17].

*Работа выполнена при поддержке РФФИ (проекты № 17-51-540004, № 16-29-15120, № 16-01-00755).

Одним из перспективных направлений в медицине является лечение с помощью полимерных пленок, содержащих лекарственные вещества (ЛВ). Такие пленки должны продолжительное время поддерживать требуемый уровень лекарственного вещества в крови или тканях пациента [2, 11, 12]. Если пренебречь процессами растворения или разрушения полимера, то основным механизмом высвобождения ЛВ из пленки будет диффузия. Одной из важнейших характеристик, влияющей на выход ЛВ из полимерной пленки, является коэффициент диффузии пленки, который меняется со временем и в общем случае неизвестен.

В данной работе исследована обратная задача определения старшего коэффициента, зависящего от времени, по нелокальной дополнительной информации. В пункте 2 приводится постановка прямой и обратной задачи и изложен алгоритм, основанный на линеаризованной схеме аппроксимации по времени [1]. В пункте 3 для приближенного решения нелинейной обратной задачи построен градиентный метод минимизации целевого функционала. В п. 4 приведены результаты численных расчетов и проведен сравнительный анализ линеаризованного и градиентного метода решения обратной задачи.

2. Постановка задачи и конечно-разностный алгоритм

Пусть относительно решения $u(x, t)$ прямой задачи:

$$q(t)u_t = \operatorname{div}(\sigma(x)\nabla u), \quad x \in \Omega \in \mathbb{R}^n, \quad t \in (0, T), \quad (1)$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad x \in \Omega, \quad (2)$$

$$u|_{\partial\Omega} = 0, \quad t \in (0, T), \quad (3)$$

в которой коэффициенты q и σ предполагаются положительными, задана нелокальная дополнительная информация

$$\int_{\Omega} u(x, t) dx = f(t), \quad t \in (0, T). \quad (4)$$

В обратной задаче (1)–(4) требуется определить коэффициент диффузии $q(t)$ по заданным функциям $\sigma(x)$, $u_0(x)$ и $f(t)$.

Обратная задача определения пары функций (1)–(4) является нелинейной. В статье [1] рассматриваются задачи определения старшего коэффициента многомерного параболического уравнения, зависящего от времени, по дополнительной информации как о решении во внутренней точке рассматриваемой области, так и по заданному интегралу от решения задачи по области. Для приближенного решения нелинейной обратной задачи построены линеаризованная аппроксимация по времени и конечно-элементная аппроксимация по пространству. Вычислительный алгоритм основан на специальной декомпозиции приближенного решения на равномерной сетке по времени.

Изложим кратко алгоритм работы [1] в применении к задаче (1)–(4). Пусть N_t — количество узлов по времени равномерной сетки $h_t = T/N_t$. Обозначим $u^m(x) = u(x, h_tm)$, $q^m = q(h_tm)$. Для решения прямой задачи (1)–(3) применим неявную схему:

$$q^{m+1} \frac{u^{m+1} - u^m}{h_t} = \operatorname{div}(\sigma(x)\nabla u^{m+1}), \quad x \in \Omega, \quad m = 0, \dots, N_t - 1, \quad (5)$$

$$u^0(x) = u_0(x), \quad x \in \Omega, \quad (6)$$

$$u^m|_{\partial\Omega} = 0. \quad (7)$$

Данные обратной задачи перепишем в виде

$$\int_{\Omega} u^m(x) dx = f^m, \quad m = 0, \dots, N_t. \quad (8)$$

В силу нелинейности дискретной обратной задачи рассмотрим линеаризованную схему второго порядка, в которой приближенное решение на новом временном шаге находится из линейной задачи. Схема основана на следующем приближении $q(t)u(t)$ в точке $t^{m+1/2}$:

$$q^{m+1/2}u^{m+1/2} = \frac{1}{2} [q^{m+1}u^m + q^m u^{m+1}] + O(h_t^2).$$

Тогда схему (5), отвечающую за уравнение, можно переписать следующим образом:

$$q^{m+1} \frac{u^{m+1} - u^m}{h_t} = \frac{q^{m+1}}{2} \left[\frac{\operatorname{div}(\sigma(x)\nabla u^{m+1})}{q^m} + \frac{\operatorname{div}(\sigma(x)\nabla u^m)}{q^{m+1}} \right].$$

Предполагаем, что решение в начальный момент времени $q(0)$ нам известно. Переход с временного слоя m на слой $m+1$ осуществляется следующим образом. Сначала решаются две вспомогательные прямые задачи:

$$q^m y^{m+1} - \frac{h_t}{2} \operatorname{div}(\sigma(x)\nabla y^{m+1}) = q^m u^m, \quad y^{m+1}|_{\partial\Omega} = 0,$$

$$q^m w^{m+1} - \frac{h_t}{2} \operatorname{div}(\sigma(x)\nabla w^{m+1}) = \frac{h_t}{2} q^m \operatorname{div}(k(x)\nabla u^m), \quad w^{m+1}|_{\partial\Omega} = 0.$$

Затем находится неизвестный коэффициент

$$q^{m+1} = \frac{\int_{\Omega} w^{m+1}(x) dx}{f^{m+1} - \int_{\Omega} y^{m+1}(x) dx}. \quad (9)$$

3. Метод оптимизации

Приближенное решение коэффициентной обратной задачи будем искать, минимизируя целевой функционал

$$J(q) = \int_0^T \left[\int_{\Omega} u(x, t; q) dx - f(t) \right]^2 dt \rightarrow \min_q.$$

1. Задаем начальное приближение $q^{(0)}(t)$.
2. Предположим, что приближенное решение $q^{(k)}(t)$ известно и покажем как определить $q^{(k+1)}(t)$.
3. Решаем прямую задачу:

$$\begin{aligned} q^{(k)}(t)u_t^{(k)} &= \operatorname{div}(\sigma(x)\nabla u^{(k)}), \quad x \in \Omega, \quad t \in (0, T); \\ u^{(k)}(x, 0) &= u_0(x); \\ u^{(k)}|_{\partial\Omega} &= 0. \end{aligned}$$

4. Решаем сопряженную задачу:

$$\begin{aligned} \left(q^{(k)}(t) \psi^{(k)} \right)_t &= -\operatorname{div}(\sigma(x) \nabla \psi^{(k)}) - 2 \left[\int_{\Omega} u^{(k)}(x, t) dx - f(t) \right], \quad x \in \Omega, \quad t \in (0, T); \\ \psi^{(k)}(x, T) &= 0, \quad x \in \Omega, \\ \psi^{(k)}|_{\partial\Omega} &= 0, \quad t \in (0, T). \end{aligned}$$

5. Определяем градиент функционала

$$J'(q^{(k)})(t) = \int_{\Omega} u_t^{(k)}(x, t) \psi^{(k)}(x, t) dx.$$

6. Находим $q^{(k+1)}(t)$ по формуле:

$$q^{(k+1)}(t) = q^{(k)}(t) - \alpha J' q^{(k)}(t),$$

здесь $\alpha > 0$ — параметр спуска (в расчетах п. 4 выбран $\alpha = 0.2$).

Сходимость метода Ландвебера для нелинейной коэффициентной обратной задачи была доказана в работе [13]. Для уменьшения числа итераций можно использовать априорную информацию о принадлежности искомого решения некоторому классу функций [14, 15].

4. Численные расчеты

В численных расчетах мы полагали $n = 1$, $\sigma(x) \equiv 1$, $T = 1$, $\Omega = (0, L)$, $L = 2$, $N_x = 100$, $N_t = 500$, $h_x = L/N_x$. Начальные данные $u_0(x) = \sin(\pi x/4) + 2x$. Параметр спуска $\alpha = 0.2$. Начальное приближение $q^{(0)}(t) \equiv 1$. Возмущенные данные заданы в следующем виде:

$$f_{\delta}(t) = f(t)(1 + \delta\xi),$$

где ξ — случайная величина, которая имеет непрерывное равномерное распределение на отрезке $[-1, 1]$, $\delta > 0$ — уровень погрешности.

На рисунках 1–5 представлены результаты расчетов в случае, когда $q(t) = 2$: рис. 1 — линии уровня решения прямой задачи; рис. 2 — точные данные обратной задачи (линия 1) и возмущенные данные $\delta = 0.01$ (линия 2); рис. 3 — точное решение обратной задачи (линия 1) и приближенное решение обратной задачи на 2000-й итерации (линия 2); рис. 4 — точное решение обратной задачи (линия 1) и приближенное решение обратной задачи на 2000-й итерации (линия 2) для возмущенных данных $\delta = 0.01$; рис. 5 — точное решение обратной задачи (линия 1) и приближенное решение обратной задачи по линеаризованной схеме (линия 2) для точных данных.

На рисунках 6–10 приведены результаты расчетов в случае, когда $q(t) = 4 + 0.5 \sin(10t) - 3t$: рис. 6 — линии уровня решения прямой задачи; рис. 7 — точные данные обратной задачи (линия 1) и возмущенные данные $\delta = 0.01$ (линия 2); рис. 8 — точное решение обратной задачи (линия 1) и приближенное решение обратной задачи на 2000-й итерации (линия 2); рис. 9 — точное решение обратной задачи (линия 1) и приближенное решение обратной задачи на 2000-й итерации (линия 2) для возмущенных данных $\delta = 0.01$; рис. 10 — точное решение обратной задачи (линия 1) и приближенное решение обратной задачи по линеаризованной схеме (линия 2) для точных данных.

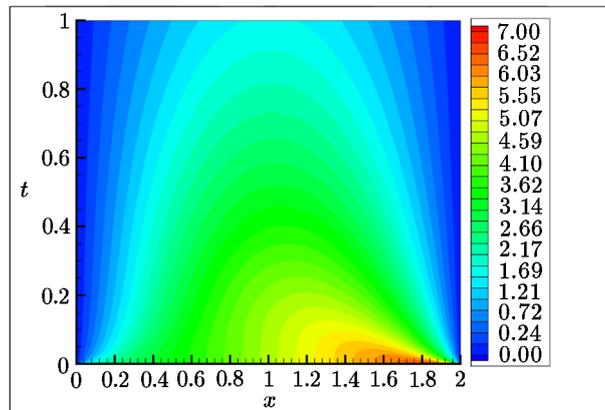


Рис. 1. Линии уровня решения прямой задачи $q(t) = 2$

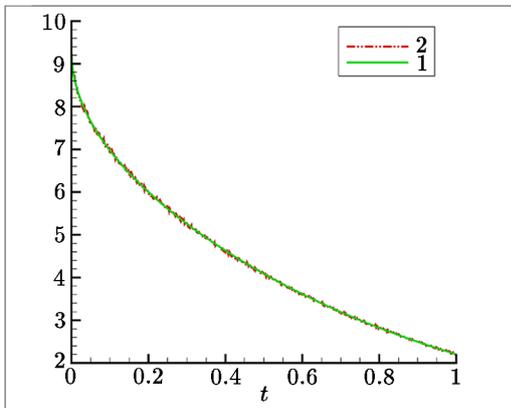


Рис. 2. Данные обратной задачи: линия 1 — $f(t)$, линия 2 — $f_{0.01}(t)$

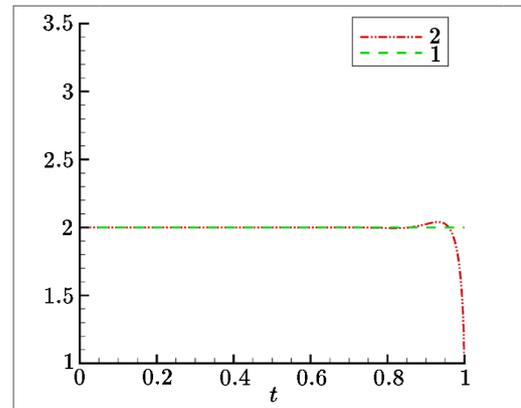


Рис. 3. Решение обратной задачи: линия 1 — точное решение, линия 2 — приближенное решение $q^{(2000)}(t)$, $\delta = 0$

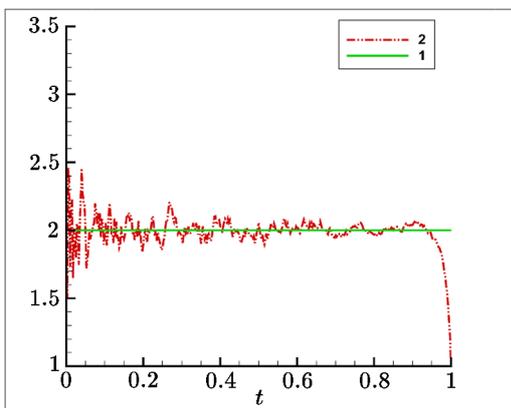


Рис. 4. Решение обратной задачи: линия 1 — точное решение, линия 2 — приближенное решение $q^{(2000)}(t)$, $\delta = 0.01$

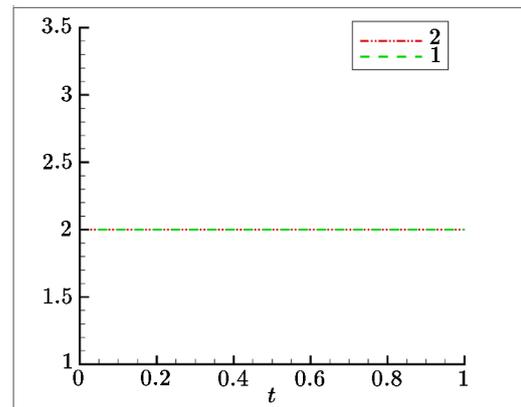


Рис. 5. Решение обратной задачи: линия 1 — точное решение, линия 2 — приближенное решение, полученное по формуле (9), $\delta = 0$

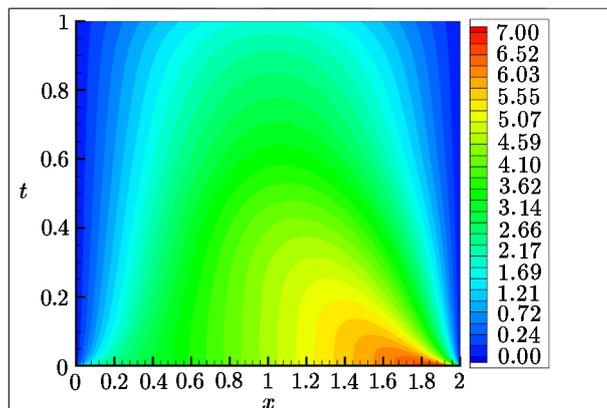


Рис. 6. Линии уровня решения прямой задачи $q(t) = 4 + 0.5 \sin(10t) - 3t$

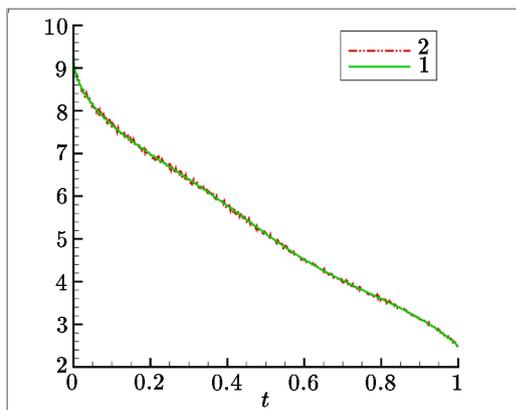


Рис. 7. Данные обратной задачи: линия 1 — $f(t)$, линия 2 — $f_{0.01}(t)$

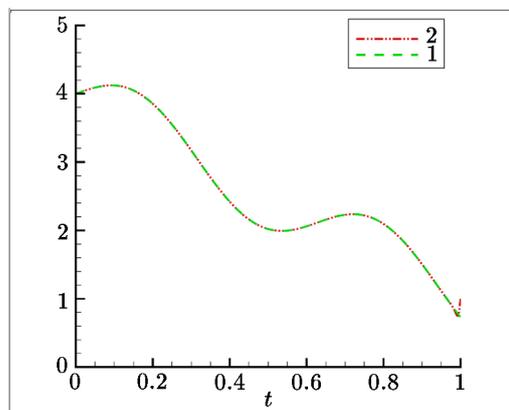


Рис. 8. Решение обратной задачи: линия 1 — точное решение, линия 2 — приближенное решение $q^{(2000)}(t)$, $\delta = 0$

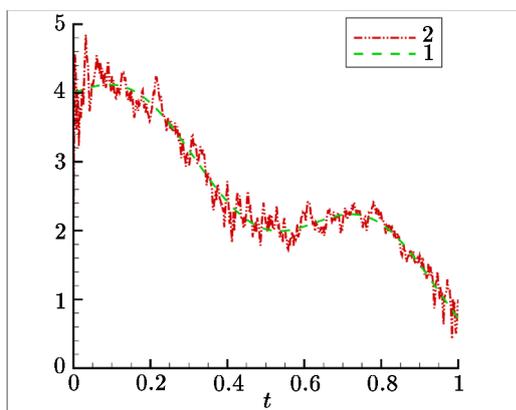


Рис. 9. Решение обратной задачи: линия 1 — точное решение, линия 2 — приближенное решение $q^{(2000)}(t)$, $\delta = 0.01$

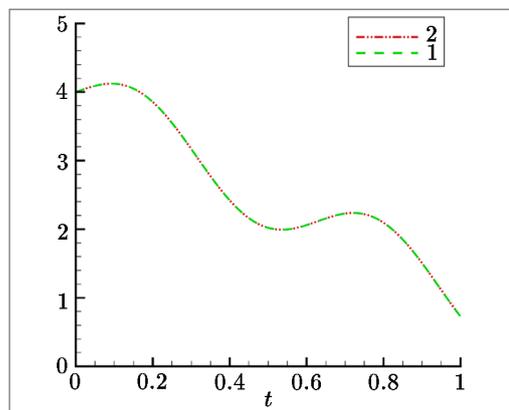


Рис. 10. Решение обратной задачи: линия 1 — точное решение, линия 2 — приближенное решение, полученное по формуле (9), $\delta = 0$

5. Заключение

Численные расчеты показывают, что оптимизационный метод решения обратной задачи является более устойчивым к ошибкам в данных, чем метод, предложенный в работе [1]. Расчеты показывают, что если $q(t)$ монотонно убывает, то в этом случае оптимизационный метод является более устойчивым к ошибкам в данных обратной задачи (рис. 8, 9).

Отметим, что предложенный оптимизационный алгоритм можно применить в случае, когда дополнительная информация (4) задается только в отдельные моменты времени t_j , $j = 1, 2, \dots, K$:

$$\int_{\Omega} u(x, t_j) dx = f(t_j), \quad t = t_j, \quad j = 1, 2, \dots, K.$$

Изменится только постановка сопряженной задачи:

$$\begin{aligned} \left(q^{(k)}(t) \psi^{(k)} \right)_t &= -\operatorname{div} \left(\sigma(x) \nabla \psi^{(k)} \right), \quad x \in \Omega, \quad t \in (0, T), \quad t \neq t_j, \quad j = 1, \dots, K, \\ \left[q^{(k)}(t) \psi^{(k)} \right]_{t=t_j} &= -2 \left[\int_{\Omega} u^{(k)}(x, t_j) dx - f(t_j) \right], \quad x \in \Omega, \quad j = 1, \dots, K, \\ \psi^{(k)}(x, T) &= 0, \quad x \in \Omega, \\ \psi^{(k)}|_{\partial\Omega} &= 0, \quad t \in (0, T). \end{aligned}$$

Здесь $\left[q^{(k)}(t) \psi^{(k)}(x, t) \right]_{t=t_j}$ означает скачок функции $q^{(k)}(t) \psi^{(k)}(x, t)$ на линии $t = t_j$.

Литература

1. **Вабищевич П.Н., Клибанов М.В.** Вычислительная идентификация старшего коэффициента параболического уравнения // Дифф. уравнения. — 2016. — Т. 52, № 7. — С. 896–903.
2. **Губайдуллин И.М., Жалнин Р.В., Масыгин В.Ф., Тишкин В.Ф., Шуршина А.С.** Применение разрывного метода Галеркина для решения обратной задачи диффузии лекарственных веществ из хитозановых пленок // Журн. СВМО. — 2016. — Т. 18, № 2. — С. 94–105.
3. **Bouziati A.** Mixed problem with integral conditions for a certain parabolic equation // J. of Applied Mathematics and Stochastic Analysis. — 1996. — Vol. 9. — P. 323–330.
4. **Cannon J.R., Rundell W.** Recovering a time dependent coefficient in a parabolic differential equation // J. Math. Anal. Appl. — 1991. — Vol. 160. — P. 572–582.
5. **Cannon J.R., Yin H.-M.** Numerical solutions of some parabolic inverse problems // Numerical Methods for Partial Differential Equations. — 1990. — Vol. 6. — P. 177–191.
6. **Dehghan M.** Identification of a time-dependent coefficient in a partial differential equation subject to an extra measurement // Numerical Methods for Partial Differential Equations. — 2005. — Vol. 21. — P. 611–622.
7. **Ivanchov N.I.** On the determination of the time-dependent leading coefficient in a parabolic equation // Sibirsk. Mat. Zh. — 1998. — Vol. 39. — P. 539–550.
8. **Hussein M., Lesnic D., and Ismailov M.I.** An inverse problem of finding the time-dependent diffusion coefficient from an integral condition // Mathematical Methods in the Applied Sciences. — 2016. — Vol. 39, № 5. — P. 963–980.

9. **Liao W., Dehghan M., and Mohebbi A.** Direct numerical method for an inverse problem of a parabolic partial differential equation // *J. of Computational Applied Mathematics*. — 2009. — Vol. 232. — P. 351–360.
10. **Onyejekwe O.N.** Determination of two-time dependent coefficients in a parabolic partial differential equation by homotopy analysis method // *Inter. J. of Applied Mathematical Research*. — 2014. — Vol. 3, № 2. — P. 161–167.
11. **Shaik M. R., Korsapati M., and Panati D.** Polymers in controlled drug delivery systems // *Inter. J. Pharm. Sei.* — 2012. — Vol. 2, № 4. — P. 112–116.
12. **Vilar G., Tulla-Puche J., and Albericio F.** Polymers and drug delivery systems // *Current Drug Delivery*. — 2012. — Vol. 9, № 4. — P. 367–394.
13. **Kabanikhin S.I., Scherzer O., and Shishlenin M.A.** Iteration methods for solving a two dimensional inverse problem for a hyperbolic equation // *J. of Inverse and Ill-Posed Problems*. — 2003. — Vol. 11, № 1. — P. 87–109.
14. **Kabanikhin S.I., Shishlenin M.A.** Quasi-solution in inverse coefficient problems // *J. of Inverse and Ill-Posed Problems*. — 2008. — Vol. 16, № 7. — P. 705–713.
15. **Кабанихин С.И., Шишленин М.А.** Об использовании априорной информации в коэффициентных обратных задачах для гиперболических уравнений // *Тр. ИММ УрО РАН*. — 2012. — Т. 18, № 1. — С. 147–164.
16. **Kabanikhin S.I.** Definitions and examples of inverse and ill-posed problems // *J. of Inverse and Ill-Posed Problems*. — 2008. — Vol. 16, № 4. — P. 317–357.
17. **Alifanov O.M.** *Inverse Heat Transfer Problems*. — Springer-Verlag, 2011.

*Поступила в редакцию 16 июня 2017 г.,
в окончательном варианте 7 июля 2017 г.*

Литература в транслитерации

1. **Vabishchevich P.N., Klibanov M.V.** Vychislitel'naya identifikatsiya starshego koeffitsienta parabolicheskogo uravneniya // *Diff. uravneniya*. — 2016. — Т. 52, № 7. — С. 896–903.
2. **Gubaydullin I.M., Zhalnin R.V., Masyagin V.F., Tishkin V.F., Shurshina A.S.** Primenenie razryvnogo metoda Galerkina dlya resheniya obratnoy zadachi diffuzii lekarstvennykh veshchestv iz hitozanovykh plenok // *Zhurn. SVMO*. — 2016. — Т. 18, № 2. — С. 94–105.
3. **Bouziyani A.** Mixed problem with integral conditions for a certain parabolic equation // *J. of Applied Mathematics and Stochastic Analysis*. — 1996. — Vol. 9. — P. 323–330.
4. **Cannon J.R., Rundell W.** Recovering a time dependent coefficient in a parabolic differential equation // *J. Math. Anal. Appl.* — 1991. — Vol. 160. — P. 572–582.
5. **Cannon J.R., Yin H.-M.** Numerical solutions of some parabolic inverse problems // *Numerical Methods for Partial Differential Equations*. — 1990. — Vol. 6. — P. 177–191.
6. **Dehghan M.** Identification of a time-dependent coefficient in a partial differential equation subject to an extra measurement // *Numerical Methods for Partial Differential Equations*. — 2005. — Vol. 21. — P. 611–622.
7. **Ivancho N.I.** On the determination of the time-dependent leading coefficient in a parabolic equation // *Sibirsk. Mat. Zh.* — 1998. — Vol. 39. — P. 539–550.
8. **Hussein M., Lesnic D., and Ismailov M.I.** An inverse problem of finding the time-dependent diffusion coefficient from an integral condition // *Mathematical Methods in the Applied Sciences*. — 2016. — Vol. 39, № 5. — P. 963–980.

9. **Liao W., Dehghan M., and Mohebbi A.** Direct numerical method for an inverse problem of a parabolic partial differential equation // *J. of Computational Applied Mathematics*. — 2009. — Vol. 232. — P. 351–360.
10. **Onyejekwe O.N.** Determination of two-time dependent coefficients in a parabolic partial differential equation by homotopy analysis method // *Inter. J. of Applied Mathematical Research*. — 2014. — Vol. 3, № 2. — P. 161–167.
11. **Shaik M. R., Korsapati M., and Panati D.** Polymers in controlled drug delivery systems // *Inter. J. Pharm. Sei.* — 2012. — Vol. 2, № 4. — P. 112–116.
12. **Vilar G., Tulla-Puche J., and Albericio F.** Polymers and drug delivery systems // *Current Drug Delivery*. — 2012. — Vol. 9, № 4. — P. 367–394.
13. **Kabanikhin S.I., Scherzer O., and Shishlenin M.A.** Iteration methods for solving a two dimensional inverse problem for a hyperbolic equation // *J. of Inverse and Ill-Posed Problems*. — 2003. — Vol. 11, № 1. — P. 87–109.
14. **Kabanikhin S.I., Shishlenin M.A.** Quasi-solution in inverse coefficient problems // *J. of Inverse and Ill-Posed Problems*. — 2008. — Vol. 16, № 7. — P. 705–713.
15. **Kabanihin S.I., Shishlenin M.A.** Ob ispol'zovanii apriornoy informatsii v koeffitsientnykh obratnykh zadachah dlya giperbolicheskikh uravneniy // *Tr. IMM UrO RAN*. — 2012. — Т. 18, № 1. — S. 147–164.
16. **Kabanikhin S.I.** Definitions and examples of inverse and ill-posed problems // *J. of Inverse and Ill-Posed Problems*. — 2008. — Vol. 16, № 4. — P. 317–357.
17. **Alifanov O.M.** *Inverse Heat Transfer Problems*. — Springer-Verlag, 2011.

