

УДК 519.6: 532.517+544.015

Моделирование затвердевания бинарного сплава на основе железа, модифицированного наноразмерными частицами*

В.Н. Попов, А.Н. Черепанов, В.Г. Щукин

*Институт теоретической и прикладной механики
им. С.А. Христиановича СО РАН, Новосибирск*

E-mail: popov@itam.nsc.ru

Предложена математическая модель затвердевания бинарного сплава железа (Fe-C), модифицированного тугоплавкими наноразмерными частицами. Описываются процессы гетерогенного зародышеобразования на поверхности наноразмерных частиц и кристаллизации сплава в цилиндрической форме. Для температуры ликвидуса принята линейная аппроксимация от концентрации растворенного углерода, закон изменения которой подчиняется правилу неравновесного рычага. Объем твердой фазы, образовавшейся вокруг зародыша, в процессе кристаллизации определяет характерный размер зёрненной структуры в затвердевшем сплаве. Проведено численное моделирование затвердевания расплава в цилиндрическом тигле и рассмотрены особенности кинетики гетерогенного зарождения и роста твердой фазы. Определено, что условия зародышеобразования и кристаллизации существенно различаются внутри отливки. Показано, что по мере охлаждения расплава устанавливается объемно-последовательная кристаллизация.

Ключевые слова: кристаллизация, бинарный сплав, зародышеобразование, модифицирование, наноразмерные тугоплавкие частицы, численное моделирование.

Введение

Сплавы на основе железа являются основными конструкционными материалами практически во всех отраслях современного производства. Однако проблема повышения качества и прочности литого металла до настоящего времени является актуальной. Один из способов решения этой задачи заключается в увеличении дисперсности и однородности структуры затвердевшего сплава при добавлении в расплав наноразмерных тугоплавких частиц. На частицах возможно гетерогенное зародышеобразование, зависящее от их размера, формы и смачиваемости [1–4]. В качестве модификаторов могут служить специально подготовленные частицы материалов SiC, TiC, TiN и др. Использование такой технологии позволяет увеличить количество центров кристаллизации, повысить тем самым дисперсность и эксплуатационные свойства металла.

К настоящему времени существует значительное число работ, посвященных экспериментальным и теоретическим исследованиям по формированию структуры литых металлов и сплавов (см., например [1, 5–9]). Технология применения наноразмерных тугоплавких химических соединений в литейном производстве представлена в [1, 10]. В исследованиях [10–14] было экспериментально подтверждено уменьшение среднего

* Работа выполнена в рамках Программы фундаментальных научных исследований государственных академий наук на 2013–2020 годы (проект АААА-А17-117030610136-3).

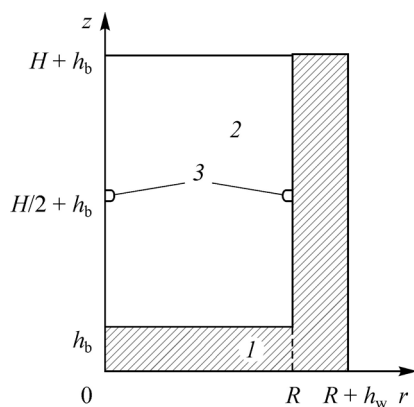
размера зерна в слитке, приводящее к улучшению прочностных свойств металла. В работах [15, 16] была предложена математическая модель гетерогенного зародышеобразования и последующего затвердевания двухкомпонентного сплава с диаграммой состояний эвтектического типа. Однако эта модель не учитывает различий условий кристаллизации в объеме металла и требует дальнейшего развития. Таким образом, построение и апробация модели затвердевания бинарного сплава, описывающей процессы в широком диапазоне исходных параметров, остается насущной задачей. Разработка новых моделей и применение численного моделирования часто является единственным способом, позволяющим получить представление об изучаемых процессах.

В настоящей работе рассматривается процесс затвердевания в керамическом цилиндрическом тигле двухкомпонентного сплава Fe-C, модифицированного тугоплавкими наноразмерными частицами. Сформулирована математическая модель, описывающая теплофизические явления в металле и форме, включая гетерогенное зародышеобразование и кристаллизацию первичной фазы (α -фазы) расплава. Определены кинетика роста твердой фазы и температурные режимы в затвердевающей отливке. По результатам численного моделирования оценивается адекватность модели кристаллизации при наличии наноразмерных частиц в бинарном сплаве на основе железа.

Математическая модель

Рассматривается затвердевание сплава Fe-C в цилиндрическом тигле, схема которого представлена на рис. 1. Высота отливки составляет H , радиус — R , толщина термоизоляционной прокладки в донной части тигля — h_b , а боковой стенки — h_w . Расплав модифицирован тугоплавкими наноразмерными частицами с характерным размером l_p , их массовое содержание m_p не превышает 0,05 %, и поэтому они не влияют на теплофизические характеристики расплава. Теплофизические параметры металла в жидком и твердом состояниях полагаются постоянными и равными средним значениям в рассматриваемых интервалах температур. Между внешними поверхностями тигля, свободной поверхностью расплава и окружающей средой происходит теплообмен, при этом коэффициенты теплоотдачи являются постоянными. На поверхностях контакта расплава с тиглем учитывается термическое сопротивление R_h , определенное по результатам экспериментов [13]. Температура расплава в начальный момент плавления выше температуры кристаллизации металла. Контрольные точки фиксации температуры выбраны по аналогии с исследованием [13]: в центре отливки и у боковой стенки тигля.

С учетом принятых допущений и симметрии рассматриваемого процесса теплоперенос в сплаве описывается уравнением в цилиндрической системе координат (r, z) :



$$c_e \rho_e \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left(r \lambda_e \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\lambda_e \frac{\partial T}{\partial z} \right) + \rho_2 \kappa \frac{\partial f_s}{\partial t},$$

$$0 \leq r \leq R, \quad h_b \leq z \leq h_b + H, \quad t > 0, \quad (1)$$

где локальное значение коэффициентов составляет $c_e = c_1$, $\rho_e = \rho_1$, $\lambda_e = \lambda_1$ при $f_s = 0$,

Рис. 1. Схема сечения цилиндрического тигля с расплавом.

1 — тигль, 2 — расплав в тигле,
3 — точки контроля температуры.

$c_e = c_2$, $\rho_e = \rho_2$, $\lambda_e = \lambda_2$ при $f_s = 1$ и $c_e = c_1(1 - f_s) + c_2 f_s$, $\rho_e = \rho_1(1 - f_s) + \rho_2 f_s$, $\lambda_e = \lambda_1(1 - f_s) + \lambda_2 f_s$ при $0 < f_s < 1$. Здесь f_s — доля твердой фазы в расплаве, λ , c , ρ — теплопроводность, теплоемкость и плотность соответственно, κ — удельная теплота плавления исходного сплава Fe-C. Индексы: $i = 1$ — для жидкой и $i = 2$ — для твердой фаз сплава, $i = 3$ — для материала тигля.

Изменение температуры в тигле описывается уравнением

$$c_3 \rho_3 \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda_3 \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right), \quad (2)$$

$$0 \leq r \leq R + h_w, \quad 0 \leq z \leq h_b; \quad R \leq r \leq R + h_w, \quad h_b \leq z \leq h_b + H, \quad t > 0.$$

Условия на поверхностях соприкосновения металла с тиглем имеют вид:

$$\lambda_i (\partial T / \partial r)|_{R-} = \lambda_3 (\partial T / \partial r)|_{R+} = (T|_{R+} - T|_{R-}) / R_h, \quad r = R, \quad h_b \leq z \leq h_b + H,$$

$$\lambda_i (\partial T / \partial z)|_{h_b+} = \lambda_3 (\partial T / \partial z)|_{h_b-} = (T|_{h_b+} - T|_{h_b-}) / R_h, \quad 0 \leq r \leq R, \quad z = h_b, \quad i = 1, 2.$$

Условия симметрии в расплаве и тигле записываются следующим образом:

$$r(\partial T / \partial r) = 0, \quad r = 0, \quad 0 \leq z \leq h_b + H.$$

Согласно [13], условие теплообмена между свободной поверхностью расплава и окружающей средой имеет вид

$$\lambda_i (\partial T / \partial z) = \alpha_1 (T_c - T), \quad 0 \leq r \leq R, \quad z = h_b + H, \quad i = 1, 2;$$

граничные условия на боковой поверхности тигля записываются как

$$\lambda_3 (\partial T / \partial r) = \alpha_2 (T_c - T), \quad r = R + h_b, \quad 0 \leq z \leq h_b + H;$$

на его дне —

$$\lambda_3 (\partial T / \partial z) = \alpha_2 (T - T_c), \quad 0 \leq r \leq R + h_b, \quad z = 0;$$

на верхней поверхности боковой стенки —

$$\lambda_3 (\partial T / \partial z) = \alpha_2 (T_c - T), \quad R \leq r \leq R + h_b, \quad z = h_b + H,$$

α_1 , α_2 — коэффициенты теплоотдачи.

Начальные значения температуры при $t = 0$ в расплаве составляют $T = T_{10}$, в тигле — $T = T_{30}$.

Рассматриваемый расплав содержит смачиваемые тугоплавкие наноразмерные частицы. Из результатов работы [17] следует, что гомогенное зародышеобразование в процессе затвердевания такого расплава практически не наблюдается, а зарождение и рост кристаллической фазы происходит лишь на затравках. Согласно [15], в предположении, что наноразмерные частицы имеют форму куба, грани которого характеризуются углом смачивания θ , скорость образования зародышей кристаллов сплава определяется согласно формуле

$$I = n_p \frac{2\pi^2 D_0}{l_a^4 l_c^2} R_c^4 (1 - \cos \theta) (\sin \theta)^2 \exp \{ -(E + \Delta G^*) / (k_B T) \},$$

где $n_p = m_p \rho_1 / (100 \rho_p l_p^3)$ — число наноразмерных частиц в единице объема расплава, ρ_p — плотность вещества частицы, l_p — длина ребра нанозатравки, l_a , l_c — межатомное расстояние в расплаве и в наночастице соответственно, D_0 — предэкспонента в законе

Аррениуса для коэффициента диффузии, k_B — константа Больцмана, E — энергия активации процесса диффузии в расплаве, ΔG^* — энергия Гиббса критического зародыша

$$\Delta G^* = \pi \sigma_{12}^\infty R_0 (R_0 - 6\delta)(1 - \cos \theta)^2 (2 + \cos \theta) / 3,$$

R_c — критический радиус зародыша, определяемый соотношением $R_c = R_0 - \delta$ [16], δ — параметр Толмена [18], $R_0 = 2\sigma_{12}^\infty T_{l0} / (\kappa \rho_l \Delta T_0)$, σ_{12}^∞ — поверхностное натяжение на поверхности раздела зародыш–расплав, $\Delta T_0 = T_{l0} - T$, T_{l0} — исходная температура ликвидуса.

Доля растущей твердой фазы f_s при охлаждении жидкого металла после времени t_{l0} , когда температура достигла T_{l0} , описывается подобно [5, 19] и составляет

$$f_s(r, z, t) = 1 - \exp \left\{ - \int_{t_{l0}}^t I(r, z, \tau) V_s(r, z, \tau) d\tau \right\}, \quad V_s(r, z, t) = (4\pi/3)(R^3 - R_{e0}^3),$$

где V_s — объем твердой фазы, образовавшейся на нанозатравке. Будем предполагать, что рост кристаллической фазы подчиняется нормальному механизму и определяется линейной зависимостью скорости роста от переохлаждения $\partial R / \partial t = K_\alpha \Delta T$ [1, 8], где R — радиус кристалла, K_α — физическая константа, $\Delta T = T_l - T$, T_l — текущая температура

ликвидуса, $R(r, z, t) = R_{e0} + \int_{t_{l0}}^t K_\alpha \Delta T d\tau$, $R_{e0} = (1,5/\pi)^{1/2} l_p$ — радиус сферической частицы,

имеющей площадь поверхности, равную поверхности кубической частицы. Кинетическая константа K_α может быть оценена с использованием формулы

$$K_\alpha = (D \Delta H_a) / (l_a k_B T_A^2),$$

где ΔH_a — энтальпия плавления в расчете на один атом, T_A — температура плавления чистого металла-растворителя (Fe), D — коэффициент диффузии [20].

Число кристаллов α -фазы, образовавшихся при затвердевании сплава, составляет

$$N(r, z, t) = \int_{t_{l0}}^t I(r, z, \tau) [1 - f_s(r, z, \tau)] d\tau, \quad (3)$$

Переохлаждение $\Delta T = T_l - T$ можно представить в виде [17]

$$\Delta T = T_A - \beta_0 C_0 / (1 - f_s)^{1-k} - T,$$

здесь температура ликвидуса T_l аппроксимируется зависимостью от концентрации C растворенного компонента (углерода), β_0 — модуль коэффициента наклона линии ликвидуса на диаграмме состояния Fe-C. Концентрация легирующего компонента определяется из уравнения неравновесного рычага $C = C_0 / (1 - f_s)^{1-k}$ [8], где C_0 — исходная концентрация, k — коэффициент распределения растворенного компонента. Рост твердой фазы происходит в температурном интервале $T_{l0} \geq T \geq T_E$, где $T_{l0} = T_A - \beta_0 C_0$, T_E — температура эвтектики. Полагаем, что при $T = T_E$ доля твердой фазы равна f_{sE} .

Результаты численных экспериментов

С целью апробации модели рассмотрено объемное затвердевание в цилиндрическом тигле сплава Fe-0,49% C с введенными тугоплавкими частицами TiN в количестве 0,03 % от массы (объемная концентрация наночастиц $n_p = 7,65 \cdot 10^{17} \text{ 1/м}^3$). Для определения начальных и граничных условий использовалось описание эксперимента, в котором изучалась кристаллизация цилиндрической отливки аналогичного размера [13].

Численное исследование динамики кристаллизации модифицированного расплава проводилось при следующих параметрах для тигля и сплава Fe-0,49%С [13, 21–23]: $c_1 = 680$ Дж/(кг·К), $\lambda_1 = 30$ Вт/(м·К), $\rho_1 = 7100$ кг/м³, $c_2 = 580$ Дж/(кг·К), $\lambda_2 = 27$ Вт/(м·К), $\rho_2 = 7450$ кг/м³, $\kappa = 2,77 \cdot 10^5$ Дж/кг, $T_{30} = 900$ К, $T_A = 1803$ К, $T_{10} = 1758$ К, $T_E = 1420$ К, $\beta_0 = 91,7$ К/%, $C_0 = 0,49$ % масс., $k = 0,5$, $K_\alpha = 3,5 \cdot 10^{-5}$ м/(с·К), $\alpha_1 = 150$ Вт/(м²·К); плотность модифицирующих наночастиц TiN составляла $\rho_p = 5440$ кг/м³, $m_p = 0,03$ % масс., $l_p = 8 \cdot 10^{-8}$ м, $l_a = 2,9 \cdot 10^{-10}$ м, $l_c = 8,23 \cdot 10^{-10}$ м, $D_0 = 1,4 \cdot 10^{-7}$ м²/с, $\Delta H_a = 2,58 \cdot 10^{-20}$ Дж, $E = 9,6 \cdot 10^{-20}$ Дж, $\sigma_{12}^\infty = 0,2$ Дж/м², $k_B = 1,38 \cdot 10^{-23}$ Дж/К, $\delta = 1,53 \cdot 10^{-11}$ м, $\theta = 5^\circ$; $R = 0,017$ м, $H = 0,051$ м, $h_b = 10^{-2}$ м, $h_w = 1,5 \cdot 10^{-3}$ м, $c_3 = 1080$ Дж/(кг·К), $\rho_3 = 1,65 \cdot 10^3$ кг/м³; $\lambda_3 = 1,28$ Вт/(м·К), $\alpha_2 = 150$ Вт/(м²·К), $R_h = 10^{-4}$ м²·К/Вт, $T_c = 293$ К.

При реализации модели (1), (2) использовался конечно-разностный алгоритм. Расчетная область разбивалась на $I \times K$ ячеек. Шаги пространственной сетки h_r , h_z выбирались из условия, что поверхности соприкосновения расплава и формы расположены посередине между соседними узлами сетки. Вдоль временной переменной использовался постоянный шаг. Разностные уравнения строились посредством аппроксимации балансных соотношений, получаемых интегрированием уравнений (1), (2) с использованием соответствующих граничных условий. Распределение температуры описывалось значениями в узлах сетки. Решение алгебраической системы, полученной при неявной аппроксимации уравнений теплопереноса, осуществлялось итерационным методом блочной последовательной верхней релаксации [24]. Расчеты продолжались до момента полного затвердевания расплава.

На рис. 2 показаны изменение температуры, процесс переохлаждения расплава и образование доли твердой фазы в затвердевающем металле в центре формирующейся отливки ($r = 0$) и в точке соприкосновения с боковой поверхностью тигля ($r = R$) при $z = h_b + H/2$ (см. рис. 1). Переохлаждение определяется как $\Delta T = T_1 - T$ при $T_{10} \geq T \geq T_E$.

В точке контакта расплава с боковой стенкой тигля перегрев снимается за 5 с и далее имеет место переохлаждение металла ниже температуры ликвидуса на 0,96 К (рис 2а, 2б). С появлением и ростом переохлаждения наблюдается процесс образования зародышей кристаллов α -фазы металла продолжительностью 0,2 с. Время метастабильного

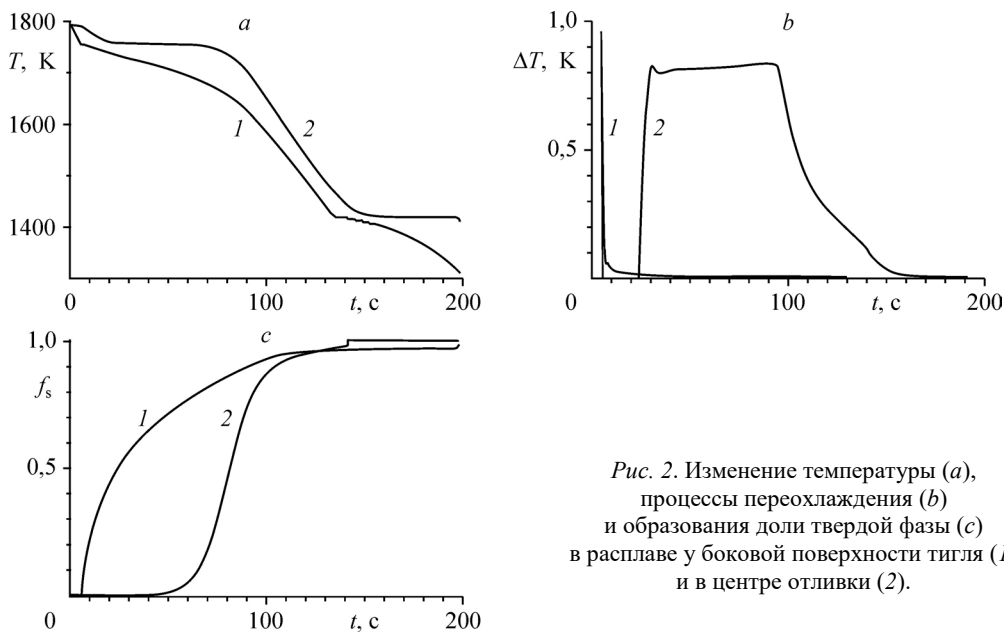


Рис. 2. Изменение температуры (а), процессы переохлаждения (б) и образования доли твердой фазы (с) в расплаве у боковой поверхности тигля (1) и в центре отливки (2).

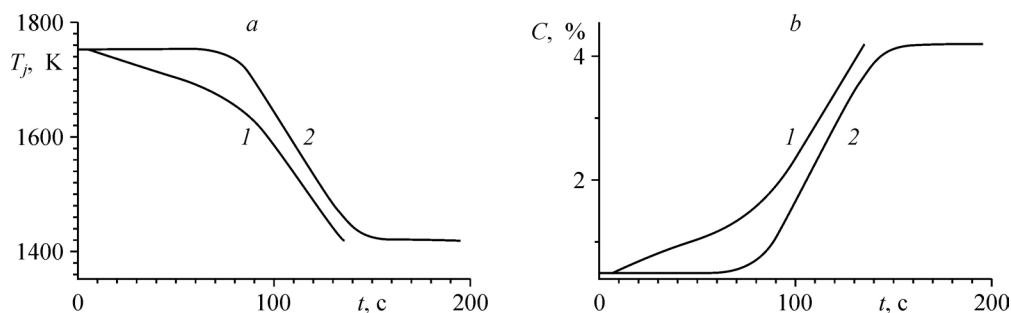


Рис. 3. Изменение температуры ликвидуса (а) и концентрации углерода на границе растущей твердой фазы (b) в расплаве у боковой поверхности тигля (1) и в центре отливки (2).

состояния, когда доля кристаллической фазы практически равна нулю, составляет около 0,2 с. При интенсивном росте твердой фазы переохлаждение быстро снижается до значений меньше 0,01 К. Кристаллизация α -фазы сплава Fe-C вблизи стенки продолжается 130 с и достигает величины $f_{sE} = 0,973$. Таким образом, полное затвердевание завершается на 136-ой секунде.

В центре отливки перегрев полностью снимается за 23 секунды, однако образование зародышей кристаллов α -фазы металла начинается на 28-ой секунде при величине переохлаждения расплава 0,7 К. Далее, при переохлаждении около 0,8 К происходит выравнивание интенсивности выделения скрытой теплоты кристаллизации и интенсивности отвода тепла в окружающий расплав. Это приводит к одновременному сосуществованию (около 20 секунд) метастабильного состояния кристаллической фазы и образованию зародышей. Интенсивное затвердевание α -фазы сплава происходит с 48-ой по 196 секунду. Переохлаждение уменьшается при снижении скорости роста твердой фазы. Полное затвердевание сплава завершается на 198-ой секунде (рис. 2а, 2с).

Рис. 3 иллюстрирует изменение температуры ликвидуса и концентрации вытесняемого твердой фазой углерода. В точке контакта расплава с боковой стенкой тигля после снятия перегрева на 5-ой секунде температура ликвидуса быстро меняется, так как происходит интенсивный рост твердой фазы и, как следствие, изменение концентрации примеси в расплаве. В центре отливки интенсивный рост твердой фазы начинается на 48 секунде, а до этого времени там сохраняются исходные значения концентрации углерода $C_0 = 0,49\%$ и температура ликвидуса $T_{l0} = 1758\text{ К}$. К моменту завершения затвердевания α -фазы сплава при $f_{sE} = 0,973$ концентрация углерода в расплаве становится равной 4,2 %.

На рис. 4 представлены распределения температуры и доли твердой фазы в поперечном сечении отливки от центра до границы соприкосновения с боковой стенкой тигля ($z = h_b + H/2$) в момент 28 с. Результаты расчетов показывают, что перегрев в расплавленном металле отсутствует. Температура в центральной части отливки при $r \leq 7,5\text{ мм}$

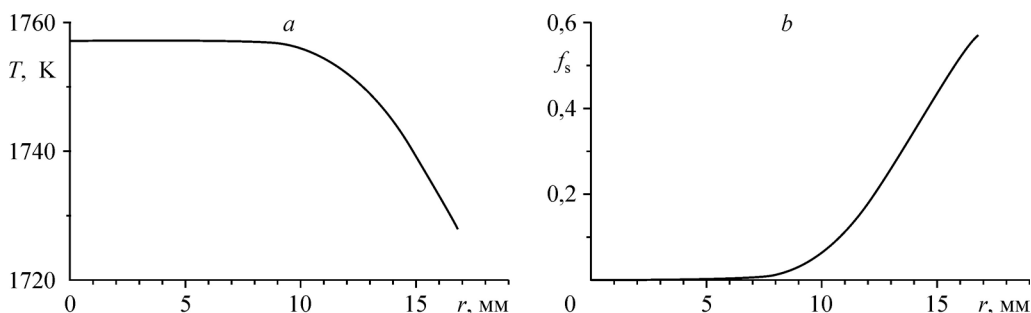


Рис. 4. Радиальные изменения температуры (а) и доли твердой фазы (b) в расплаве.

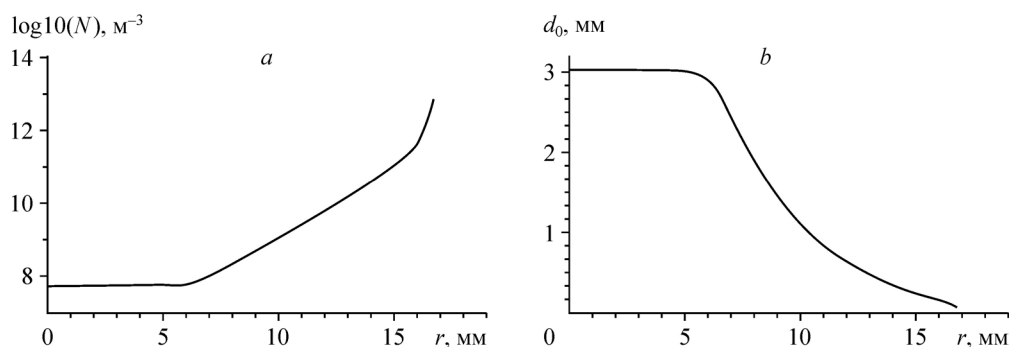


Рис. 5. Изменение концентрации возникших зародышей (а) и размера зерна (b) в поперечном сечении отливки.

близка к температуре ликвидуса и далее снижается к боковой стенке тигля. Во всем объеме расплава присутствует твердая фаза, однако ее доля распределена неравномерно: $f_s \leq 0,001$ при $r \leq 7,5$ мм и $0,001 < f_s \leq 0,55$ при $7,5 \text{ мм} < r \leq 17$ мм (рис. 4b). С момента снятия перегрева кристаллизация происходит во всем объеме расплава, а граница затвердевшего металла последовательно перемещается от боковой и донной поверхностей тигля, а также свободной поверхности расплава к центру отливки. Время затвердевания, переохлаждение и темп кристаллизации существенно меняются с удалением от боковой стенки тигля (рис. 2). Очевидно, что различаются и условия зародышеобразования в расплаве. Рис. 5a демонстрирует изменение концентрации возникших в отливке зародышей. Область с наиболее мелкой структурой металла находится вблизи боковой стенки тигля, что качественно совпадает с имеющимися экспериментальными данными [13]. На рис. 5b представлена оценка размеров зёрненной структуры металла в отливке, рассчитанных по формуле $d_0 = (\sqrt{2} / N)^{1/3}$ [25].

Заключение

Предложена двумерная математическая модель неравновесной кристаллизации бинарного сплава Fe-C, модифицированного тугоплавкими наноразмерными частицами. Проведено численное моделирование затвердевания расплава в цилиндрическом тигле и исследованы особенности кристаллизации сплава в объеме слитка с учетом гетерогенного зарождения и роста кристаллов в процессе охлаждения расплава. Определено, что условия зародышеобразования и кристаллизации существенно различаются внутри объема отливки. Установлено, что по мере охлаждения расплава имеет место объемно-последовательное затвердевание металла. Рассчитанные температурные режимы кристаллизации сплава и размеры структуры затвердевшего металла качественно согласуются с известными опытными данными.

Список литературы

1. Сабуров В.П., Черепанов А.Н., Жуков М.Ф., Галевский Г.В., Крушенко Г.Г., Борисов В.Т. Плазмохимический синтез ультрадисперсных порошков и их применение для модифицирования металлов и сплавов. Новосибирск: Наука, 1995. 344 с.
2. Turnbull D. Theory of catalysis of nucleation by surface patches // *Acta Metallurgica*. 1953. Vol. 1, Iss. 1. P. 8–14.
3. Fletcher N.H. Size effect in heterogeneous nucleation // *J. Chem. Phys.* 1958. Vol. 29, Iss. 3. P. 572-576.
4. Maxwell I., Hellawell F. A simple model for grain refinement during solidification // *Acta Metallurgica*. 1975. Vol. 23, Iss. 2. P. 229–237.
5. Баландин Г.Ф. Основы теории формирования отливки. Ч. 2. М.: Машиностроение, 1979. 335 с.
6. Greer A.L. Overview: application of heterogeneous nucleation in grain-refining of metals // *J. Chem. Phys.* 2016. Vol. 145, No. 21. P. 211704-1–211704-15.
7. Chalmers B. Principles of solidification. N.Y.: Wiley, 1964. 288 p.
8. Flemings M.C. Solidification Processing. N.Y.: McGraw-Hill, 1974. 424 p.
9. Мальцев М.В. Модифицирование структуры металлов и сплавов. М.: Металлургия, 1964. 215 с.

10. Комшуков В.П., Черепанов А.Н., Протопопов Е.В., Фойгт Д.Б. Модифицирование металла нанопорошковыми инокуляторами в кристаллизаторе сортовой машины непрерывного литья заготовок. Механические и металлографические исследования // Известия ВУЗов. Черная металлургия. 2008. № 10. С. 21–24.
11. Borodianskiy K., Zinigrad M. Nanomaterials applications in modern metallurgical processes // Diffusion Foundations. 2016. Vol. 9. P. 30–41.
12. Park J.J., Hong S.M., Park E.K., Kim K.Y., Rhee C.K. Microstructure and properties of SA 106B carbon steel after treatment of the melt with nano-sized TiC particles // Materials Sci. and Engng: A. 2014. Vol. 613. P. 217–223.
13. Kuzmanov P.M., Popov S.I., Yovkov L.V., Dimitrova R.N., Cherepanov A.N., Manolov V. Investigation the effect of modification with nanopowders on crystallization process and microstructure of some alloys // AIP Conference Proceedings. 2017. Vol. 1893. P. 030104-1–030104-8.
14. Lazarova R., Petrov R.H., Gaydarova V., Davidkov A., Alexeev A., Manchev M., Manolov V. Microstructure and mechanical properties of P265GH cast steel after modification with TiCN particles // Materials & Design. 2011. Vol. 32. P. 2734–2741.
15. Cherepanov A., Cherepanova V., Manolov V., Yovkov L. On crystallization of a metal inoculated with nanoparticles // J. Physics: Conf. Series. 2018. Vol. 1115. P. 042042-1–042042-7.
16. Cherepanov A., Cherepanova V., Manolov V. To theory of crystallization of nanomodified alloy // AIP Conf. Proc. 2017. Vol. 1893. P. 030114-1–030114-7.
17. Черепанов А.Н., Попов В.Н., Солоненко О.П. Численный анализ динамики растекания и кристаллизации модифицированной металлической капли на подложке // Теплофизика и аэромеханика. 2008. Т. 15, № 3. С. 513–519.
18. Tolman R.C. The effect of droplet size on surface tension // J. Chem. Phys. 1949. Vol. 17. P. 333–337.
19. Колмогоров А.Н. К статистической теории кристаллизации металлов // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1937. Т. 1, № 3. С. 355–359.
20. Christian J.W. The theory of transformations in metals and alloys. Pergamon Press, 2002. 1200 p.
21. Шебзухова М.А., Шебзухов З.А., Шебзухов А.А. Параметр Толмена, автоадсорбция и поверхностное натяжение на плоских и искривленных поверхностях жидких металлов // Изв. РАН. Серия физическая. 2010. Т. 74, № 5. С. 729–736.
22. Холломон Д.Н., Тарнбалл Д. Образование зародышей при фазовых превращениях // Успехи физики металлов. Т. 1. М.: Металлургиздат, 1956. С. 304–357.
23. Пустовалов В.Г., Романов Е.П., Кондратьев В.П. К теории массопереноса в жидких металлах // Физика металлов и металловедение. 2009. Т. 107, № 1. С. 3–14.
24. Самарский А.А., Николаев Е.С. Методы решений сеточных уравнений. М.: Наука, 1978. 592 с.
25. Sloane N.J.A. The packing of spheres // Scientific American. 1984. Vol. 250, No. 1. P. 116–125.

*Статья поступила в редакцию 19 ноября 2019 г.,
после доработки — 19 ноября 2019 г.,
принята к публикации 10 февраля 2020 г.*