ПМТФ, № 5, 1963

К ТЕОРИИ СЛАБЫХ ДИФФУЗИОННЫХ ВОЛН

Г. С. Леонов, В. А. Погосян

(*Москва*)

В работе [1] на основе анализа решения системы гидродинамических и электродинамических уравнений для электронного и ионного газов при отсутствии внешнего магнитного поля показано, что в цилиндрическом симметричном разряде могут существовать два типа бегущих волн вдоль оси разряда трубки: электронные и ионные. Там же показано, что электронные волны быстро затухают, а ионные волны могут как затухать, так и усиливаться. В настоящее время ясно, что страты (слои) не имеют прямого отношения к продольным электрическим колебаниям электронов и ионов в плазме. Драйвестейн [2] рассматривал подвижные страты как волны плотности заряженных частиц в плазме положительного столба, зависящие от процессов возникновения и исчезновения частиц. Возможность существования волн такого типа вытекает из совместного решения уравнений диффузии для электронов и положительных ионов и уравнения Пуассона. Дальнейшему развитию [2] посвящен ряд работ [3-6], в которых были уточнены и расширены исходные уравнения. В этих исследованиях применяется метод малых возмущений. Полученные дисперсионные соотношения годны для описания либо только бегущих, либо только стоячих страт. На основе экспериментальных данных в [7] сделан вывод о единой природе страт. Теоретическому обоснованию этого вывода посвящена работа [8]. В отличие от [3-6,8] ниже рассматривается более полная система уравнений, в которой учитывается термодиффузия и зависимость параметров уравнений от электронной температуры.

Полученное дисперсионное соотношение пригодно для описания как подвижных, так и неподвижных страт. Его можно распространить также на случай положительного столба в продольном магнитном поле.

1. Общие уравнения. Как известно, в положительном столбе с движущимися стратами плотность электронов N_e, плотность ионов N_p и электронная температура T, а также продольный градиент потенциала E — функции координаты x, взятой вдоль оси трубки, и времени t. Плотности носителей тока изменяются, кроме того, с изменением расстояния рассматриваемой точки от оси трубки, как и в случае однородного положительного столба.

Рассмотрим цилиндрический положительный столб. Предполагается, что выполняются следующие условия:

1) электроны и ионы имеют максвелловское распределение по скоростям при постоянных по сечению столба температурах T_e и T_p;

2) рекомбинация происходит только на стенках сосуда;

3) длина свободного пробега электронов и ионов мала по сравнению с радиусом столба;

4) ионизация происходит только при однократном соударении между электроном и атомом в основном состоянии, и, следовательно, частота ионизации не зависит от концентрации электронов.

Для слоистого положительного столба при этих предположениях имеем:

а) Уравнения баланса носителей

$$\frac{\partial N_e}{\partial t} + \operatorname{div}(N_e W_e) - Z N_e = 0, \qquad \frac{\partial N_p}{\partial t} + \operatorname{div}(N_p, W_p) - Z N_p = 0 \qquad (1.1)$$

Здесь W_e и W_p — векторы скоростей дрейфа электронов и ионов, имеющие составляющие w_{ex}, w_{er} и w_{px}, w_{pr} вдоль оси x и радиуса r, соответственно, Z — число пар ионов, образуемых одним электроном в одну секунду.

Для Z можно написать следующее упрощенное выражение

$$Z(U_e) = A\sqrt{U_e}\exp\left(-\frac{U_i}{U_e}\right) \tag{1.2}$$

В дальнейшем ограничимся рассмотрением только центральной области положительного столба, что позволяет упростить задачу путем сведения ее к одномерной. В уравнениях (1.1) можно произвести разделение переменных. Полагая, как обычно, что в слоистом положительном столбе, по тем же причинам, что и в квазинейтральной плазме однородного столба, радиальное движение носителей регулируется амбиполярной диффузией, получаем (при граничных условиях Шотки)

$$N_e = n_e(x, t)\, J_0\left(\frac{2.4r}{R}\right), \qquad N_p = n_p(x, t)\, J_0\left(\frac{2.4r}{R}\right)$$

где $n_e(x, t)$ и $n_p(x, t)$ — плотности электронов и ионов по оси разряда, $J_0(\mu r)$ — функция Бесселя нулевого порядка, 2.4 — первый корень уравнения $J_0(\mu r) = 0$. Используя эти соотношения для N_e и N_p с учетом того, что теперь рассматриваем точки вблизи оси трубки, получим одномерный вариант уравнений (1.1) в виде

$$\frac{\partial n_e}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(n_e w_{ex}) + \frac{n_e}{\tau_D} - Zn_e = 0, \qquad \tau_D = \left(\frac{R}{2.4}\right)^2 \frac{1}{D_a}, \quad D_a = b_p U_e \tag{1.3}$$

$$\frac{\partial n_p}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(n_p w_{px}) + \frac{n_p}{\tau_D} - Zn_e = 0$$

Здесь

$$w_{ex} = -be\left[E + \frac{U_e}{n_e}\frac{\partial n_e}{\partial x} + \left(\delta - \frac{3}{2}\right)\frac{\partial U_e}{\partial x}\right], \quad w_{px} = b_p\left[E - \frac{U_p}{n_p}\frac{\partial n_p}{\partial x}\right] \tag{1.4}$$

Величина τ_D представляет собой диффузионное время жизни носителей, R — радиус трубки, D_a — коэффициент амбиполярной диффузии, b_p — подвижность ионов, b_e — подвижность электронов, U_e — электронная температура, выраженная в электрон-вольтах, k — постоянная Больцмана, e — заряд электрона. В однородном положительном столбе диффузия в осевом направлении полностью компенсирована. В каждом поперечном сечении такого столба число возникающих в объеме ионов уравновешивается потерями частиц на стенках вследствие радиальной диффузии. Условием баланса частиц в этом случае [9] будет

$$Z\tau_D = 1 \tag{1.5}$$

При наличии страт наряду с радиальной диффузией следует учитывать осевую диффузию вдоль положительного столба.

б) Уравнение Пуассона

$$\partial E / \partial x = 4\pi e(n_p - n_e) \tag{1.6}$$

в) Уравнение сохранения энергии электронного газа

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(n_e \frac{3}{2} U_e\right) + \frac{\partial}{\partial x}\left(n_e w_{ex}^* \frac{3}{2} U_e\right) = -n_e w_{ex} E - n_e H(U_e) \tag{1.7}$$

Первый член справа в (1.7) дает энергию, приобретаемую электронами от электрического поля на единицу объема в единицу времени, второй член дает потерю энергии этими электронами при столкновениях. Второй член слева выражает поток энергии через рассматриваемый объем

$$w_{ex}^{*} = -\frac{2}{3}\,\delta b_e \left[E + \frac{U_e}{n_e}\frac{\partial n_e}{\partial x} + \left(\delta^{*} - \frac{3}{2}\right)\frac{\partial U_e}{\partial x} \right] \qquad (1.8)$$

Через функцию распределения f_0 величины δ и δ^{*}, входящие в (1.3) и (1.8), выражаются соответственно [10]

$$\delta = \int_0^\infty w^5 \lambda f_0\, dw \Big/ \int_0^\infty w^3\, \lambda f_0\, dw, \qquad \delta^{*} = \int_0^\infty w^7 \lambda f_0\, dw \Big/ \int_0^\infty w^5 \lambda f_0 dw$$

Значения δ и δ^{*} для различных газов неодинаковы, что обусловлено зависимостью эффективного сечения для электронно-атомных столкновений от скорости электронов в реальных газах.

Здесь справа приведены вычисленные значения δ и δ^{*} для He, Ne и Ar; при этом зависимость эффективного сечения θ от скорости аппроксимировалась в виде степенной функции

$$\theta = C_0 w_e^{q}$$

	He	Ne	Ar
$q =$	-1	1	2
$\delta =$	$^5/_2$	$^3/_2$	1
$\delta^{*} =$	$^7/_2$	$^5/_2$	2

Уравнения (1.3), (1.6), (1.7) будут исходными для задачи. Аналогичные по форме уравнения использовались для описания подвижных страт в работах [5, 6]. В [5] в уравнениях (1.3) и (1.7) опущены члены, содержащие производную U_e по x. В [6] в уравнении (1.3) отсутствует член, содержащий произведение U_p на $\partial \ln n_p / \partial x$, и, кроме того, рассматриваются только малые частоты.

2. Уравнения, описывающие возмущенное состояние. Система исходных уравнений допускает решение, соответствующее стационарному (однородному) состоянию положительного столба. Возникающие в стратах изменения n_e и n_p, E и U_e представим в следующем виде:

$$n_e = n\,[1 + \nu_e(x, t)], \qquad n_p = n\,[1 + \nu_p(x, t)]$$
$$E = E_0\,[1 + \eta(x, t)], \qquad U_e = U_{e0}\,[1 + v(x, t)] \qquad (2.1)$$

где n, E_0, U_{e0} характеризуют положительный столб в стационарном состоянии, а ν_e, ν_p, η, v описывают возмущения. Подставим (2.1) в уравнения (1.3), (1.6), (1.7) и ограничимся случаем, когда отклонения от стационарного состояния настолько малы, что произведениями ν_e, ν_p, η, v и квадратами этих величин можно пренебречь; будем полагать, что возмущения подчиняются пространственновременной зависимости вида

$$\nu_e,\ \nu_p,\ \eta v \sim e^{i(kx - \omega t)} \qquad (2.2)$$

В результате получим

$$-i\omega\nu_e / b_e - iE_0 k\nu_e - iE_0 k^2\eta + U_{e0}k^2\nu_e + (\delta - {}^3/_2) - U_{e0}k^2 v -$$
$$- U_{e0}Z'(U_{e0})\, v/b_e = 0 \qquad (2.3)$$

$$-i\omega\nu_p / b_p + iE_0 k\nu_p + iE_0 k\eta + U_p k^2\nu_p + \tau^{-1}\nu_p / b_p -$$
$$- Z'(U_{e0})\, U_{e0} v / b_p - Z(U_{e0})\, \nu_e / b_p = 0 \qquad (2.4)$$

$$iE_0\, k\eta = 4\pi e n\,(\nu_p - \nu_e) \qquad (2.5)$$

$$-{}^3/_2\, iU_{e0}\,\omega\nu_e - {}^3/_2\, iU_{e0}\,\omega\nu_e - i\delta b_e E_0 U_{e0}\, k\nu_e - i\delta b_e U_{e0} E_0 k\eta -$$
$$- i\delta b_e E_0 U_{e0} k v + \delta b_e U_{e0}^2\, \nu_e k^2 + b_e \delta\,(\delta^{*} - {}^3/_2)\, U_{e0}^2 k^2 v -$$
$$- 2b_e E_0^2 \eta - ib_e E_0 U_{e0}\, k\nu_e - ib_e(\delta - {}^3/_2)\, E_0 U_{e0}\, kv = 0 \qquad (2.6)$$

Здесь, как и в работе [5], не принималось во внимание изменение величины τ_D, связанное с изменением T_e. Умножим (2.6) на $ik/2E_0 b_e$ и опустим в уравнениях члены, которые содержат b_e в знаменателе, вследствие их малости. Подставляя (2.5) в (2.3), (2.4) и (2.6), получим

$$(-iE_0k + 4\pi en + U_{e0}k^2)\,\nu_e - 4\pi en\nu_p + \delta_1 U_{e0}k^2 v = 0 \tag{2.7}$$

$$\left(4\pi en + \frac{1}{\tau_D b_p}\right)\nu_e + \left(\frac{i\omega}{b_p} - iE_0k - \frac{1}{\tau_D b_p} - U_p k^2 - 4\pi en\right)\nu_p - \\ - \frac{Z'(U_{e0})\,U_{e0}}{b_p}\,v = 0 \tag{2.8}$$

$$\left(\frac{\delta U_{e0}}{2}k^2 + 4\pi en + \frac{4i\pi en\delta U_{e0}}{2E_0}k + \frac{i\delta U_{e0}{}^2 k_0{}^3}{2E_0} + \frac{U_{e0}k^2}{2}\right)\nu_e - \\ - \left(\frac{4i\pi en\delta U_{e0}k}{2E_0} + 4\pi en\right)\nu_p + \left(\frac{\delta U_{e0}k^2}{2} + \frac{i\delta_0 U_{e0}{}^2 k^3}{2E_0} + \frac{\delta_1 U_{e0}k^2}{2}\right)v = 0 \tag{2.9}$$

Здесь

$$\delta_1 = \delta - {}^3/_2, \qquad \delta_0 = \delta\,(\delta^* - {}^3/_2)$$

Проведенная линеаризация уравнений означает, что допустимы только малые амплитуды волн. Для сопоставления результатов настоящих вычислений с опытом можно обратиться к данным измерений длины и частоты очень слабых подвижных страт. Опыт показывает, что в общем случае в подвижных стратах размах изменения электрического потенциала может достигать нескольких вольт, а электронная температура и плотность носителей могут изменяться более чем в два раза (резкие страты). Экспериментальное исследование разряда в гелии показало, что влияние резкости страт на их длину и частоту проявляется слабо. Поэтому можно предположить, что данные формулы могут быть применены для оценки указанных величин также и в случае достаточно резких страт.

3. Дисперсионное соотношение. Уравнения (2.7), (2.8) и (2.9) представляют собой линейные однородные алгебраические уравнения относительно ν_e, ν_p и v. Из условия существования нетривиального решения этих уравнений, а также учитывая, что для страт выполняется условие (как это показано в [5])

$$\frac{1}{4\pi en}\left|\frac{i\omega}{b_p} - iE_0k - \frac{1}{\tau_D b_p} - U_p k^2\right| \ll 1$$

после некоторых несложных преобразований находим

$$\frac{iU_{e0}{}^2}{2E_0}\gamma k^4 + \frac{U_{e0}{}^2\,\delta k^3}{2} - i\delta_1 U_{e0}k^2 + \frac{\gamma U_{e0}{}^2\omega}{2E_0 b_p}k^2 - \\ - \frac{3iU_{e0}{}^2\,\omega}{4b_p}k - \frac{U^2{}_{e0}z'}{2b_p}k + \frac{iU_{e0}E_0 z'}{b_p} = 0 \tag{3.1}$$

где $\gamma = \delta\,(\delta^* - \delta)$. Положим теперь $k = \varkappa + i\vartheta$, т. е.

$$\nu_e,\ \nu_p,\ \eta,\ v \sim e^{-\vartheta x}e^{i(\varkappa x - \omega t)}$$

Если $\vartheta > 0$, то волна ослабляется в положительном направлении (в направлении от анода к катоду).

Легко видеть, что после подстановки $k = \varkappa + i\vartheta$ уравнение (3.1) распадается на два уравнения, которые могут быть получены путем приравнивания нулю действительной и мнимой частей.

В предположении, что $|\vartheta/\varkappa| \ll 1$, пренебрегая членами выше первой степени, получим

$$\left[\frac{3U_{e0}^2\delta\varkappa^2}{2} + \frac{\gamma U_{e0}^2\omega\varkappa}{E_0 b_p} - \frac{U_{e0}^2 Z'}{2b_p}\right]\vartheta + \frac{\gamma U_{e0}^3 \varkappa^4}{2E_0} - \delta_1 U_{e0} E_0 \varkappa^2 -$$

$$- \frac{3U_{e0}\,\omega\varkappa}{4b_p} + \frac{U_{e0} E_0 Z'}{b_p} = 0 \qquad (3.2)$$

$$\left[-\frac{2\gamma U_{e0}^2 \varkappa^3}{E_0} + 2\delta_1 U_{e0}\varkappa E_0 + \frac{3U_{e0}\,\omega}{4b_p}\right]\vartheta + \frac{U_{e0}^2\,\delta\varkappa^3}{2} + \frac{\gamma U_{e0}^2\,\omega}{2E_0 b_p}\varkappa^2 +$$

$$- \frac{U_{e0}^2 Z'(U_{e0})}{2b_p}\varkappa = 0 \qquad (3.3)$$

Из (3.3) находим

$$\varkappa = \left[\left(\frac{\gamma\omega}{2\delta b_p E_0}\right)^2 + \frac{Z'(U_{e0})}{b_p\,\delta}\right]^{1/2} - \frac{\gamma\omega}{2\delta b_p E_0} \qquad (3.4)$$

Разлагая подкоренное выражение в (3.4) в ряд, имеем

$$\varkappa = \frac{Z'(U_{e0})\,E_0}{\gamma\omega} - \frac{1}{8}\left(\frac{2\delta b_p E_0}{\gamma\omega}\right)^{2/3}\left(\frac{Z'(U_{e0})}{b_p\,\delta}\right)^2 + \ldots \qquad (3.5)$$

Так что для больших ω

$$\varkappa \approx \frac{Z' E_0}{\gamma\omega} = \frac{U_i^* E_0}{\gamma U_{e0}\,\tau_D\,\omega} \qquad (3.6)$$

Из (1.2) следует соотношение

$$\frac{dZ}{dU_e} = \frac{U_i^*}{U_{e0}^2} Z(U_{e0}) = \frac{U_i^*}{U_{e0}^2}\frac{1}{\tau_D}, \quad U_i^* = U_i + 0{,}5\,U_{e0} \qquad (3.7)$$

Подставляя в (3.6) выражение (1.3) для τ_D и учитывая (3.7), окончательно найдем

$$\varkappa \approx \frac{\lambda^2 b_p\, U_i^* E_0}{\gamma R^2 U_{e0}\,\omega} \qquad (3.8)$$

Полагая здесь $\gamma = 2\delta$, получим для $\varkappa$ выражение Воячека [5].

Действие магнитного поля B на плазму уменьшает амбиполярную диффузию в перпендикулярном к нему направлении в отношении

$$\frac{1}{1 + \omega_e\,\omega_p\,\tau_e\,\tau_p} \qquad \left(\omega = \frac{eB}{mc}\right)$$

Здесь ω — гиромагнитная частота, τ — среднее время свободного пробега носителей.

Таким образом, при наличии магнитного поля, параллельного оси положительного столба, величина τ_D отличается от своего значения в отсутствие поля множителем $1 + \omega_e\,\omega_p\tau_e\tau_p$. С учетом этого замечания окончательно для $\varkappa$ получим

$$\varkappa = \left[\left(\frac{\gamma\omega}{2\delta b_p E_0}\right)^2 + \frac{\lambda^2 U_i^*}{\delta U_{e0} R^2 (1 + b_p\, b_e B^2 / c^2)}\right]^{1/2} - \frac{\gamma\omega}{2\delta b_p E_0} \qquad (3.9)$$

Полагая здесь $\omega = 0$, получим дисперсионное соотношение для неподвижных страт

$$\varkappa = \frac{\lambda}{R}\left[\frac{U_i^*}{\delta U_{e0}(1 + b_p b_e B^2 / c^2)}\right]^{1/2} \tag{3.10}$$

Отсюда при $B=0$ получается формула Чапника [4]. Для ϑ из (3.2) имеем

$$\vartheta = \frac{-\gamma U_{e0}^3 \varkappa^4 / 2E_0 + \delta U_{e0} E_0 \varkappa^2 + 3U_{e0}\,\omega\varkappa / 4b_p - U_{e0} E_0 Z' / b_p}{{}^3/_2\, U_{e0}^2\, \delta\varkappa^2 + \gamma U_{e0}^2\, \omega\varkappa / b_p E_0 - U_{e0}^2 Z'/2b_p} \tag{3.11}$$

Если в (3.11) вместо $\varkappa$ подставить его выражение из (3.4), то получим связь между ϑ и ω. Общий анализ этой связи затруднителен. Однако легко видеть, что в двух предельных случаях, соответствующих достаточно большим и достаточно малым частотам, ϑ имеет отрицательное значение.

Приводим результаты сравнения длин страт $l = l_2$, вычисленных по формуле (3.9), с экспериментальными данными ($l = l_1$) из [11]. Сравнение производилось для гелия при давлении 0.9 *мм* рт. ст. и радиусе трубки 1 *см*.

$B =$	0	400	600	1000	1200	*(гс)*
$(2\pi)^{-1}\omega =$	19800	18600	17100	14200	12900	*(гц)*
$E =$	4.2	3.8	3.3	3.2	3.0	*(в/см)*
$l_1 =$	5.8	6.1	6.2	6.9	7.8	*(см)*
$l_2 =$	2.9	3.2	3.6	4.7	5.6	*(см)*

Характер зависимости длины неподвижных страт от величины магнитного поля, получаемой по формуле (3.10), соответствует экспериментальным данным для H_2, приведенным в [11].

Авторы признательны А. А. Зайцеву за внимание к работе.

Поступила 3 VI 1963

ЛИТЕРАТУРА

1. Конюков М. В. и Терлецкий Я. П. Об электроакустических волнах в газоразрядной плазме. Ж. эксперим. и теор. физ., 1954, т. 27, № 5 (11), стр. 542.
2. Druyvesteyn M. I. Versuch einer theorie der positiven säule mit laufenden Schichten. Physica, 1934, H. 1, No 4, S. 273.
3. Stewart A. B. Oscillating glow discharge plasma. J. Appl. Phys., 1956, vol. 27, No. 8, p. 911.
4. Чапник П. М. К теории слоистого положительного столба. Докл. АН СССР, 1956, т. 107, № 4, стр. 529.
5. Wojaczek K. Vereinfachte Diffusionstheorie der Laufenden Scichten. Ann. phys., 1959, 7 Folge, Band 3, S. 37.
6. Rother H. Theorie der Diffusionswellen (Laufende Schichten in Niederdruckentiladungen). Ann. phys., 1959, 7 Folge, Band 4, S. 373.
7. Клярфельд Б. Н. Образование страт в газовом разряде. Ж. эксперим. и теор. физ., 1952, т. 22, № 1, стр. 66.
8. Недоспасов А. В. К вопросу о стратах в инертных газах. Ж. техн. физ., 1958, т. XXVIII, № 1, стр. 173.
9. Грановский В. Л. Электрический ток в газе. М.— Л., 1952, т. I.
10. Чепман С. и Каулинг Т. Математическая теория неоднородных газов. ИЛ, 1960.
11. Зайцев А. А., Васильева М. Я. Слоистый положительный столб газового разряда в продольном магнитном поле. Радиотехника и электроника, 1962, т. 7, № 3, стр. 557.